Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

Обчисліть і запишіть в зошит результати:

1. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\mathrm{arctg}\sqrt{3}$

4. $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

5. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

6. $\arccos(-1)$

7. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Звірте відповіді: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; π; $\frac{5\pi}{6}$

До найпростіших тригонометричних рівнянь належать рівняння виду:

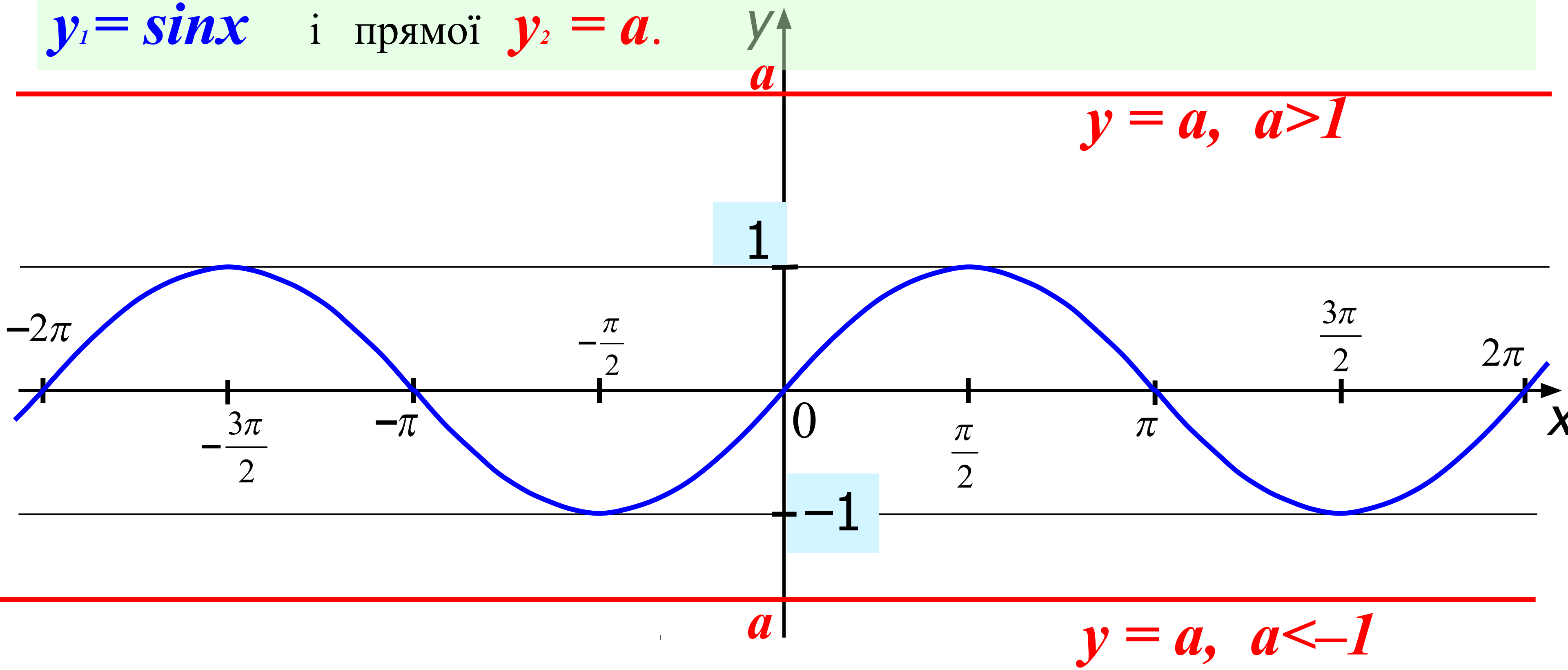
$$\sin x = a$$

$$\cos x = a$$

$$tg x = a$$

$$ctg x = a$$

Розв'яжемо рівняння **$\sin x = a$** за допомогою графічного способу. Для цього нам потрібно знайти абсциси точок перетину синусоїди $y_1 = \sin x$ і прямої $y_2 = a$.



I випадок: $a \notin [-1;1]$

В цьому випадку пряма $y = a$ не перетинає графік функції $y = \sin x$. Отже, точок перетину немає.

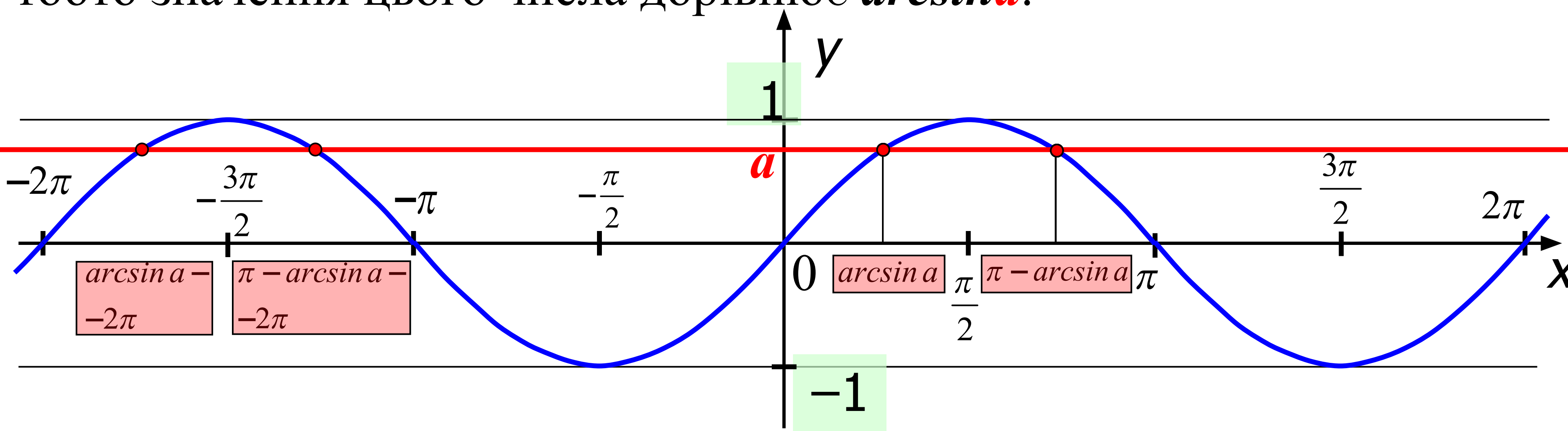
Тому **рівняння коренів не має.**

II випадок: $a \in [-1;1]$

Очевидно, що в цьому випадку точок перетину безліч, причому їх абсциси визначаються наступним чином:

1) Розглянемо точку, абсциса якої належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2) Абсциса цієї точки – це число(кут), синус якого дорівнює ***a***, тобто значення цього числа дорівнює ***arcsina***.



3) Абсциса другої точки належить відрізку [–π; π] і дорівнює (π–***arcsina***). Щоб це пояснити достатньо пригадати, що ***sin****x* = ***sin***(π–*x*).

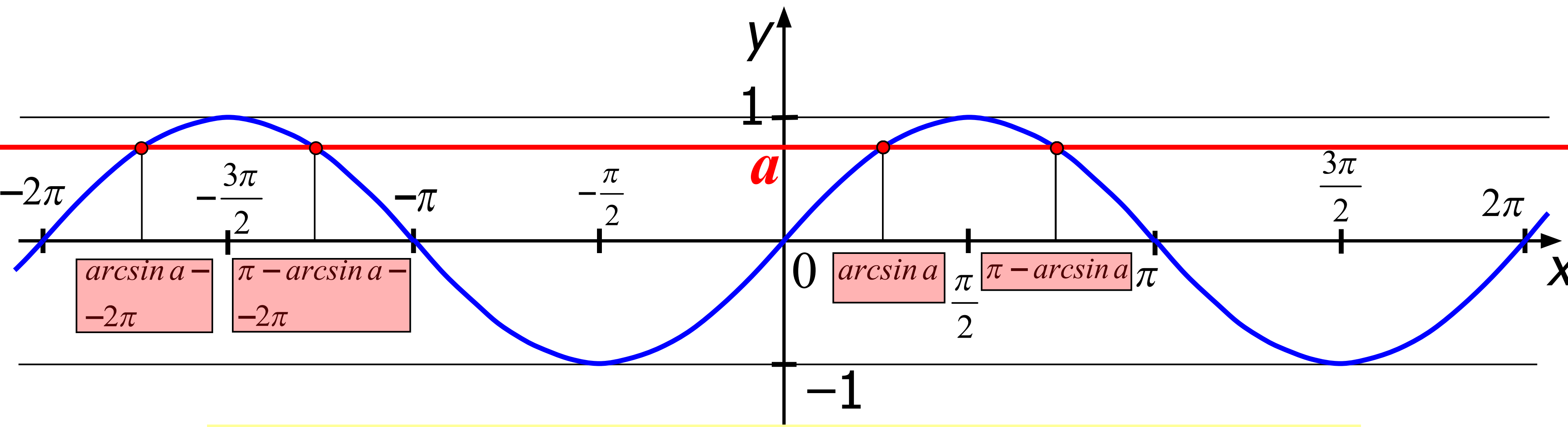
4) Всі інші абсциси точок перетину отримуємо враховуючи періодичність функції ***y = sinx (T=2πn***, де ***n***∈**Z**).

Завдання: назвіть абсциси двох наступних точок перетину справа.

Відповідь: **(*arcsina*+*2π*)** **і** **(*3π – arcsina*).**

Отже, всі корені в цьому випадку можна записати у вигляді сукупності:

$$\sin x = a \qquad x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + \pi \cdot 2n,\ n \in \mathbf{Z}; \\ -\arcsin a + \pi \cdot (2k+1),\ k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$



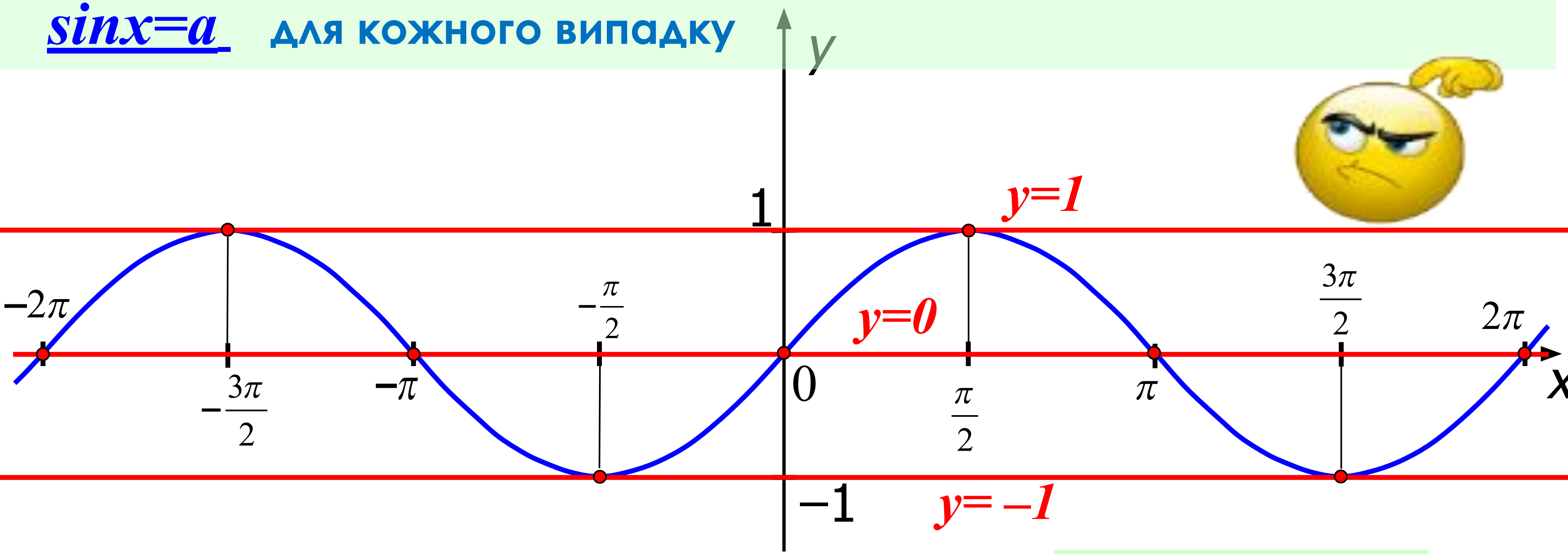
Або, ці два записи об'єднують в одну формулу (подумайте, як це пояснити):

$$\boxed{x = (-1)^m \cdot \arcsin a + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}.}$$

III випадок: $a = -1;\ a = 0$ **або** $a = 1.$

Ці три значення – особливі ! Для них загальна формула коренів, отримана нами попереду, не підходить. Спробуйте самостійно записати розв ’язки рівняння

sinx=a для кожного випадку



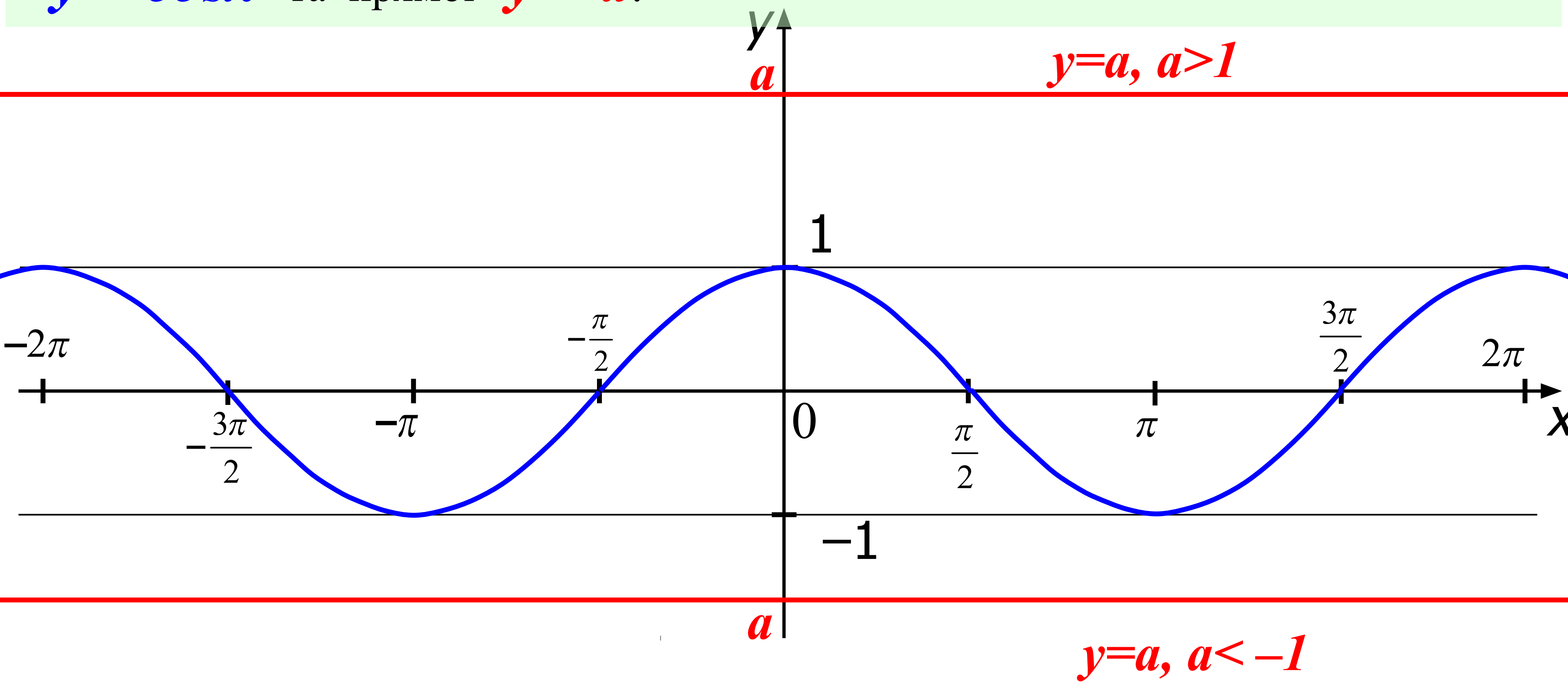
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi t,\ t \in \mathbf{Z}.$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi r,\ r \in \mathbf{Z}.$$

Запам’ятайте ці частинні випадки розв ’язків рівняння ***sinx =a***

Розв’яжемо рівняння ***cosx=a*** теж за допомогою графічного способу. Для цього нам потрібно знайти абсциси точок перетину косинусоїди ***y = cosx*** та прямої ***y = a***.



І випадок: $a \notin [-1;1]$

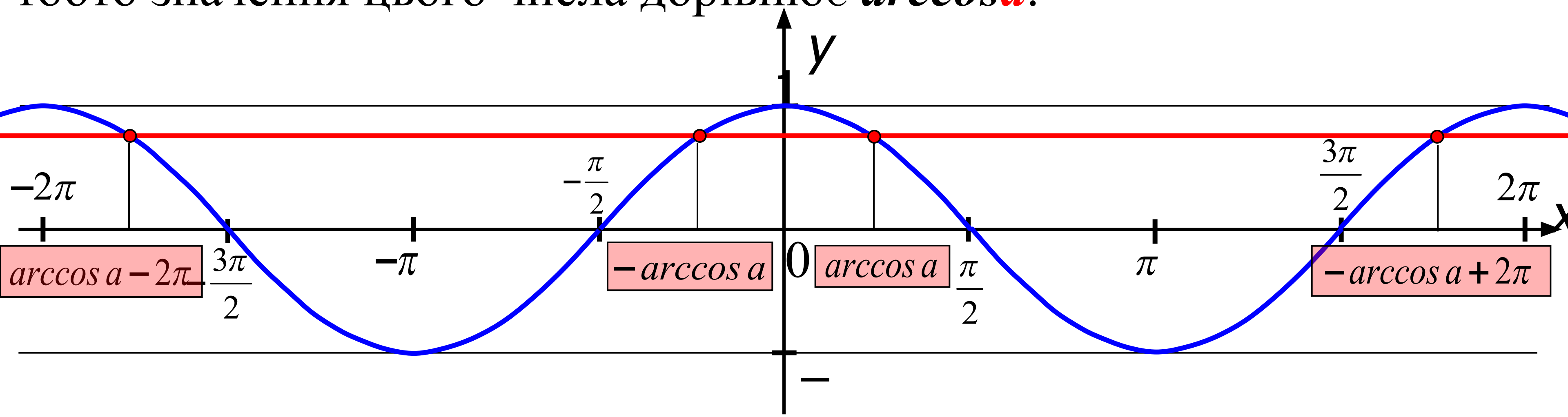
Очевидно, що в цьому випадку точок перетину немає. Тому **рівняння коренів не має.**

II випадок: $a \in [-1;1]$

Очевидно, що в цьому випадку точок перетину безліч, причому їх абсциси визначаються наступним чином:

1) Розглянемо точку, абсциса якої належить проміжку $[0;\pi]$

2) Абсциса цієї точки – це число(кут), косинус якого дорівнює ***a***, тобто значення цього числа дорівнює ***arccosa***.

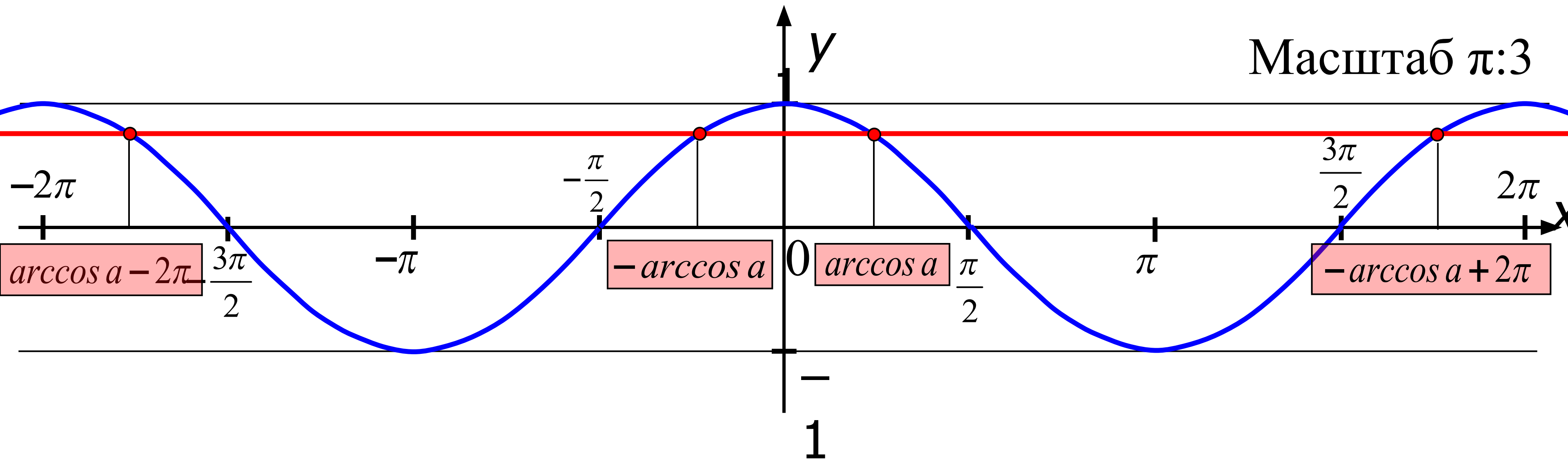


3) Абсциса другої точки, яка належить проміжку [–π; 0], дорівнює –***arccosa***. Щоб це пояснити достатньо пригадати, що ***cos****x* = ***cos***(–*x*).

4) Всі інші абсциси точок перетину отримуємо враховуючи періодичність функції ***y = cosx*** ***(***додаємо числа виду ***2πn***, де ***n***∈ **Z** ***)*** .

Таким чином, всі корені в цьому випадку можна записати у вигляді сукупності:

$$\cos x = a \qquad x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ -\arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

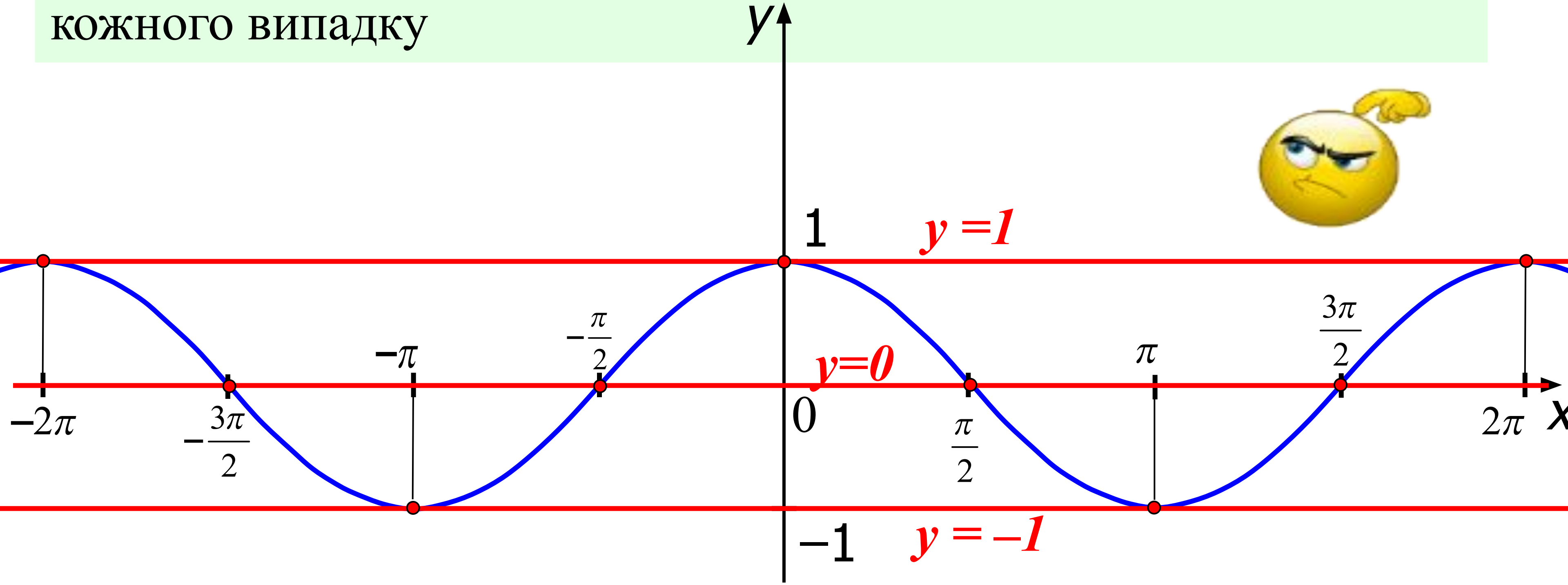


Досить часто ці два записи об’єднують в один:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

III випадок : $a = -1;\ a = 0$ або $a = 1.$

Самостійно запишіть розв 'язки рівняння $cosx = a$ для кожного випадку



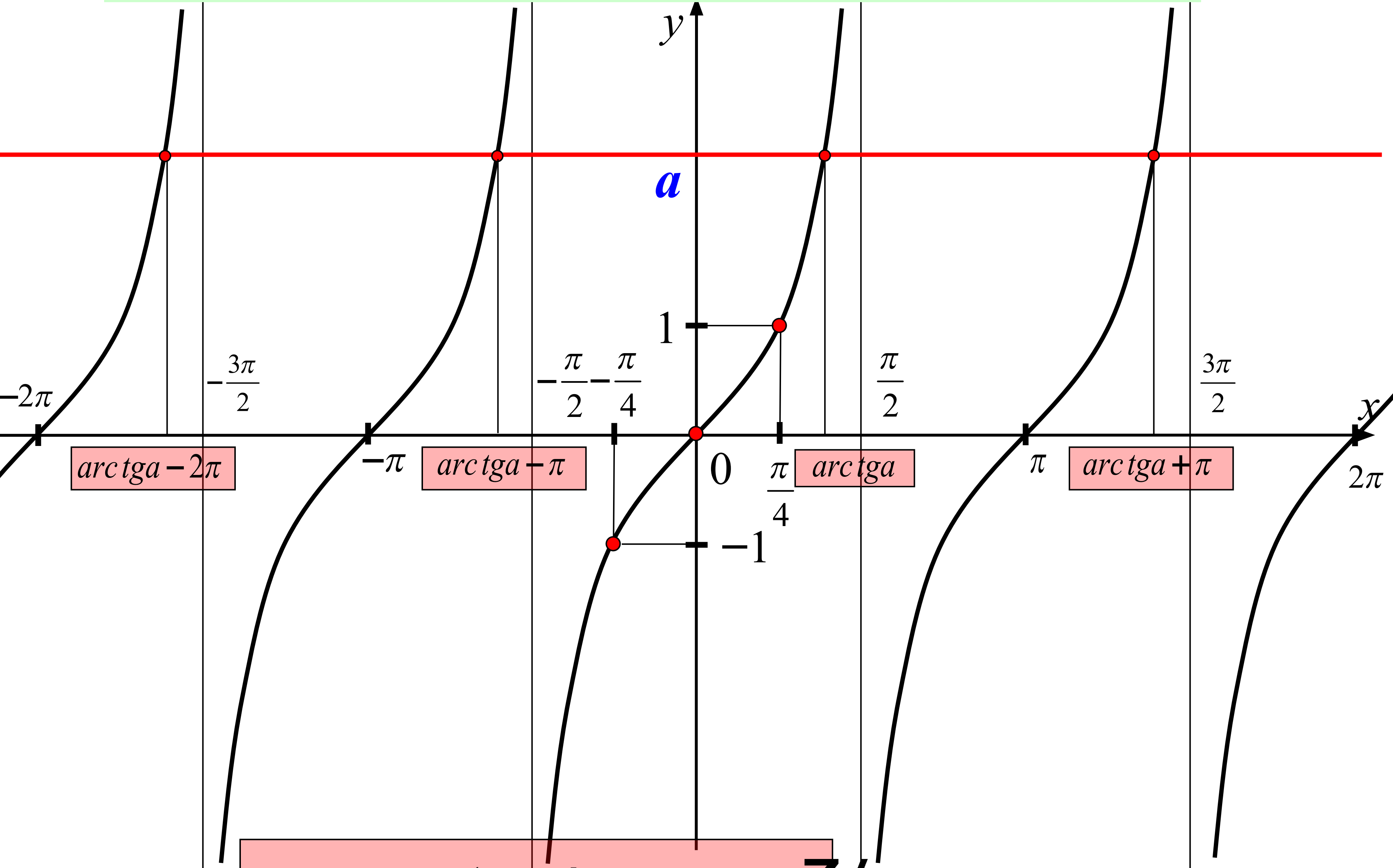
$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi t,\ t \in \mathbf{Z}.$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi r,\ r \in \mathbf{Z}.$$

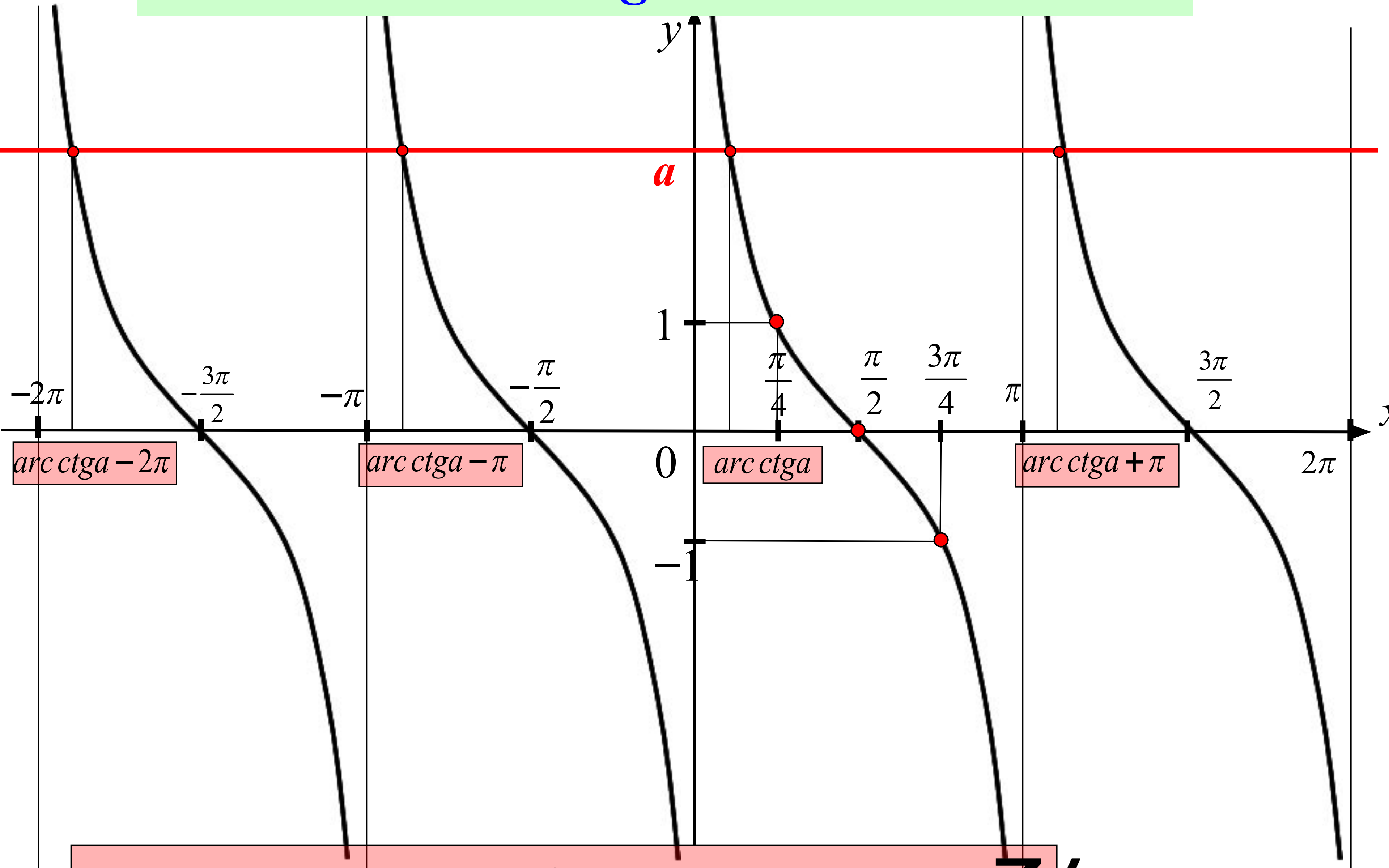
Запам'ятайте ці частинні випадки розв 'язків рівняння $cosx = a$

Розв 'язки рівняння $tgx = a$ дослідіть самостійно :



$$x = arc\,tga + \pi n,\ n \in Z$$

Розв 'язки рівняння $ctgx = a$ дослідіть самостійно :



$$x = arc\,ctga + \pi n,\ n \in Z$$

Розв'язання будь-яких тригонометричних рівнянь зводиться до розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь, які ми розглянули вище. Для цього застосовуються відомі Вам тотожні перетворення, різні тригонометричні формули, різні способи розв'язування алгебраїчних рівнянь, формули скороченого множення и т.п.

Отже, ***запам'ятайте :***

$$\boxed{\sin x = a \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z}$$

$$\boxed{\cos x = a \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$$

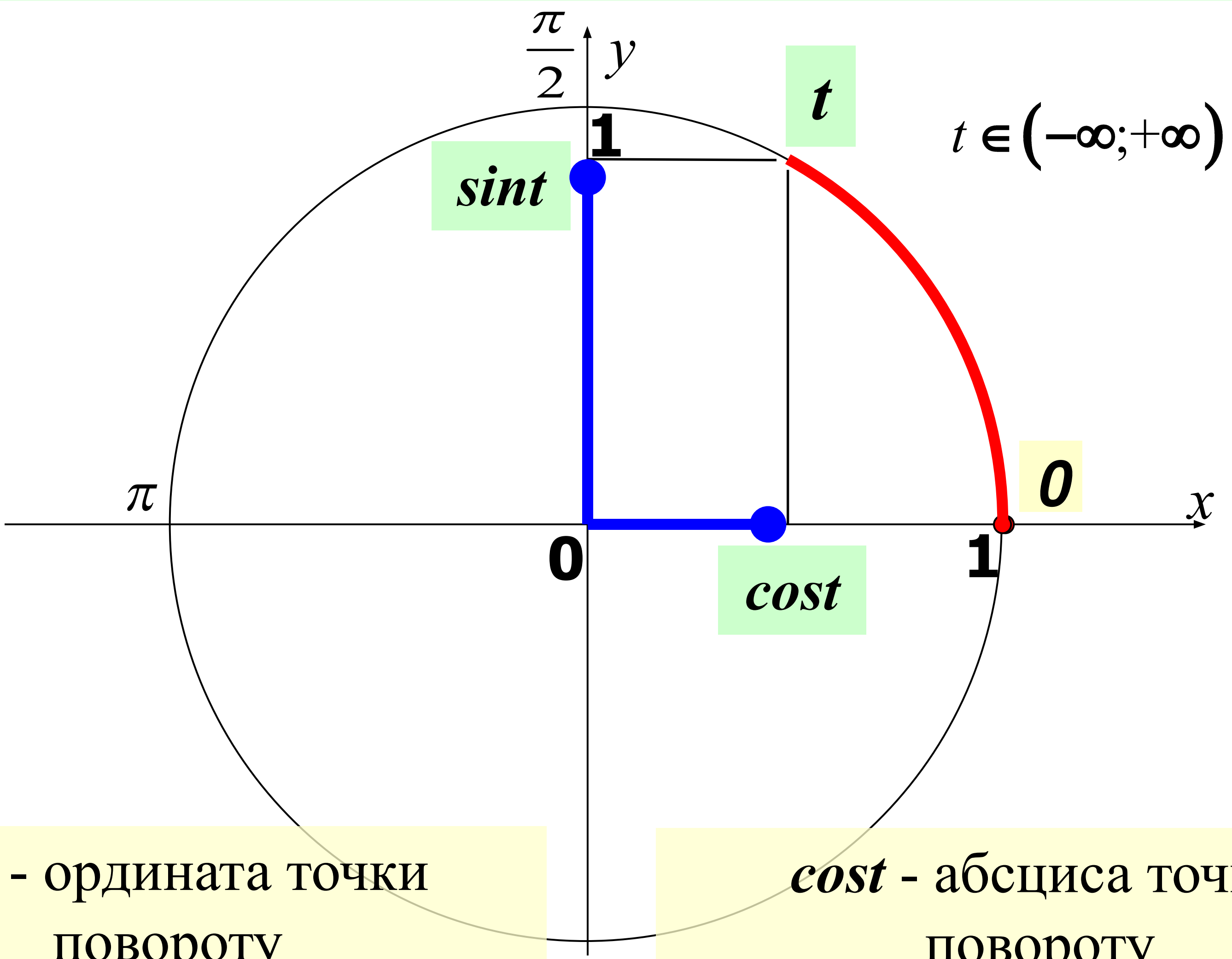
***a*∈ [–1;1]**

$$\boxed{tgx = a \Rightarrow x = arctga + \pi p,\ p \in Z}$$

$$\boxed{ctgx = a \Rightarrow x = arcctga + \pi l,\ l \in Z}$$

$a \in R$

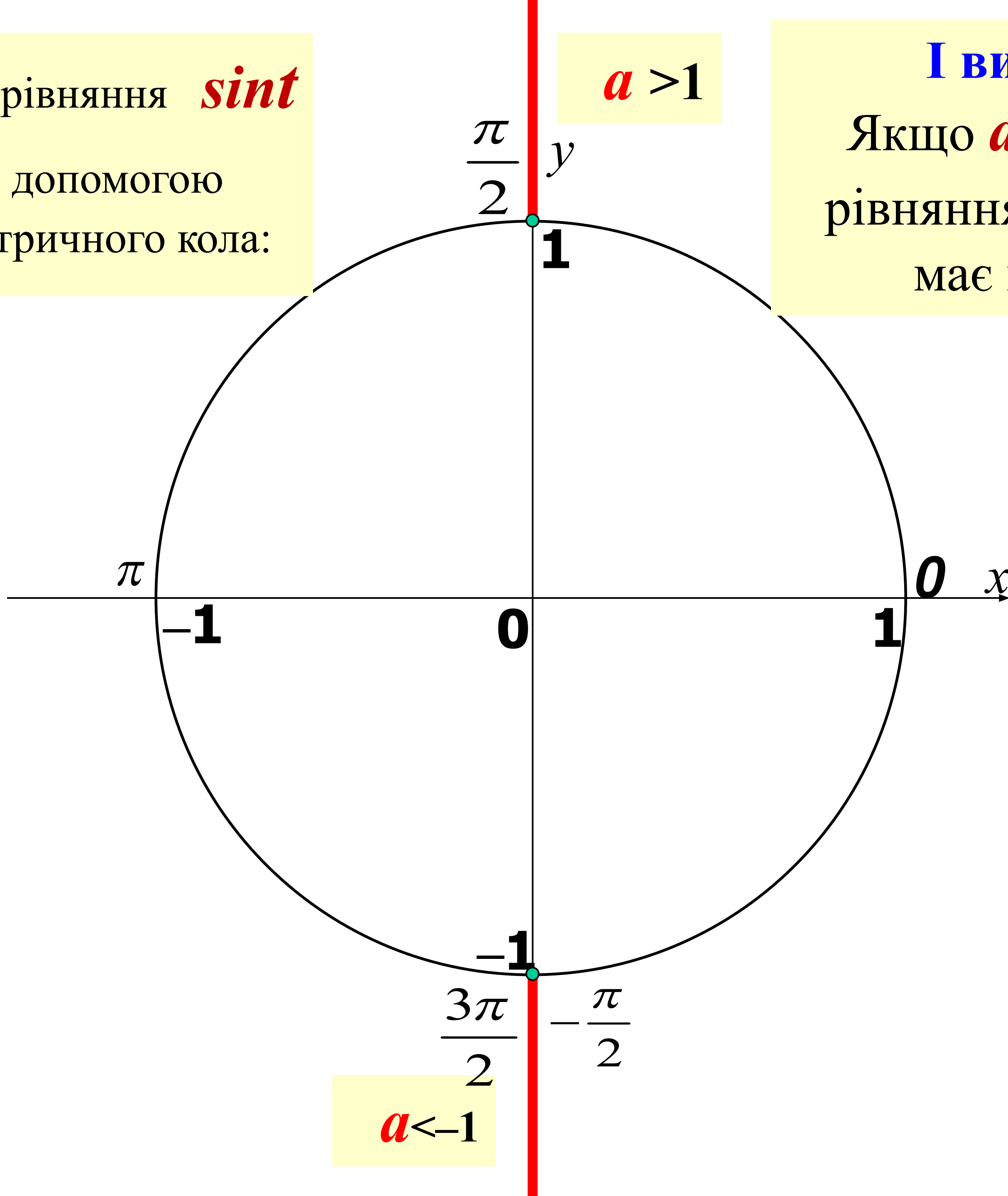
Пригадаємо означення синуса і косинуса кута повороту:



sint - ордината точки повороту

cost - абсциса точки повороту

Розв’яжемо рівняння ***sint* = *a*** за допомогою тригонометричного кола:



I випадок:

Якщо ***a*∉[–1;1]**, то рівняння ***sint* = *a*** не має коренів.

II випадок: Якщо $a \in (-1;1)$, то рівняння $\sin t = a$ має два корені на проміжку $[0; 2\pi]$, який дорівнює періоду функції синус.

Отримані точки симетричні відносно осі Oy. Значення однієї з них відповідає числу **arcsin*a***, а друга точка має значення…? (визначте по малюнку).

Отже, для $t \in [0; 2\pi]$ ми отримали два кореня: $t = \left[\begin{array}{l} \arcsin a; \\ \pi - \arcsin a. \end{array}\right.$

Враховуючи періодичність функції **$y = \sin x$ ($T=2\pi n$, де $n \in Z$)**, кожну з цих точок можна отримати при додаванні цілого числа повних обертів, тобто:

$$\sin t = a$$

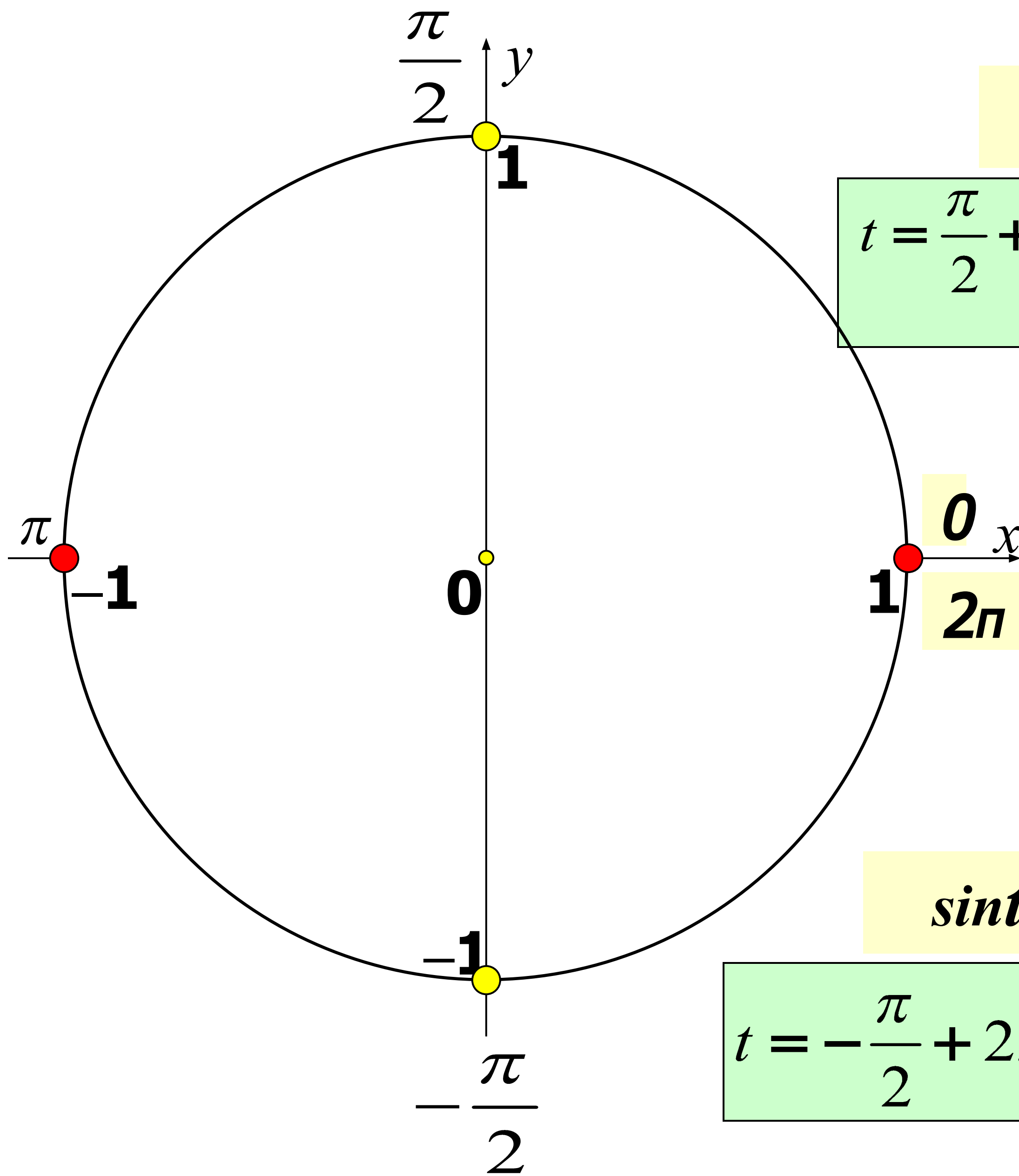
$$t = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi k; \\ \pi - \arcsin a + 2\pi m; \end{array}\right. \quad k, m \in \mathbf{Z},$$

Можна помітити, що у випадку, коли перед ***arcsin a*** стоїть знак «+» до нього додається парне(2k) число **π**, а коли стоїть знак «–» додається непарне(2m+1) число **π**. Тому ці дві рівності можна об'єднати в одну формулу :

$$t = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Ця формула дозволяє знайти корені найпростішого тригонометричного рівняння ***$\sin t = a$*** у випадках, коли ***$a \in (-1;1)$***.

Частинні випадки. Якщо $a = -1$; $a = 0$ або $a = 1$.



sint $= 1$

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi r,\ r \in \mathbf{Z}$$

sint $= 0$

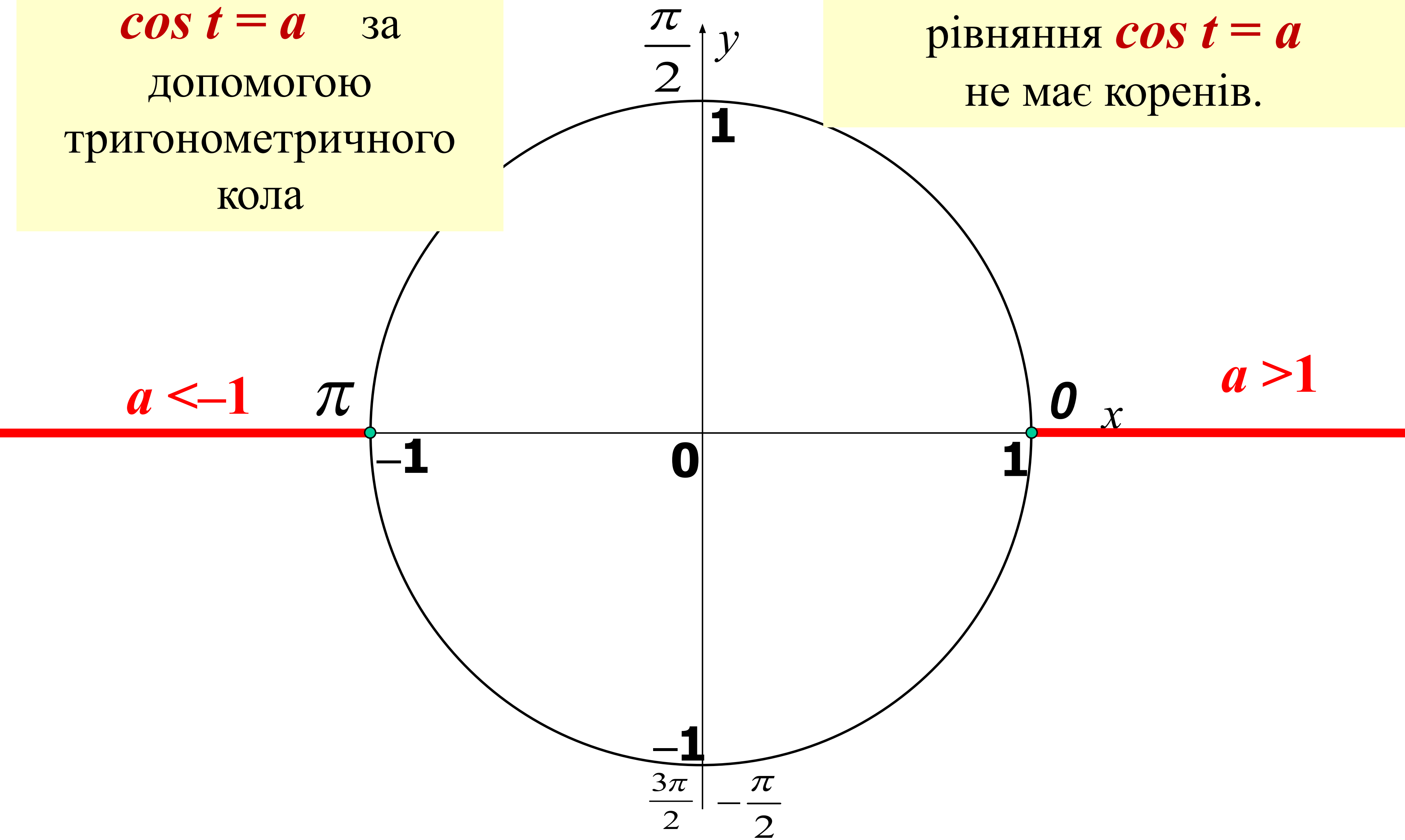
$$t = \pi h,\ h \in \mathbf{Z}$$

sint $= -1$

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi d,\ d \in \mathbf{Z}$$

Розв'яжемо рівняння ***cos t = a*** за допомогою тригонометричного кола

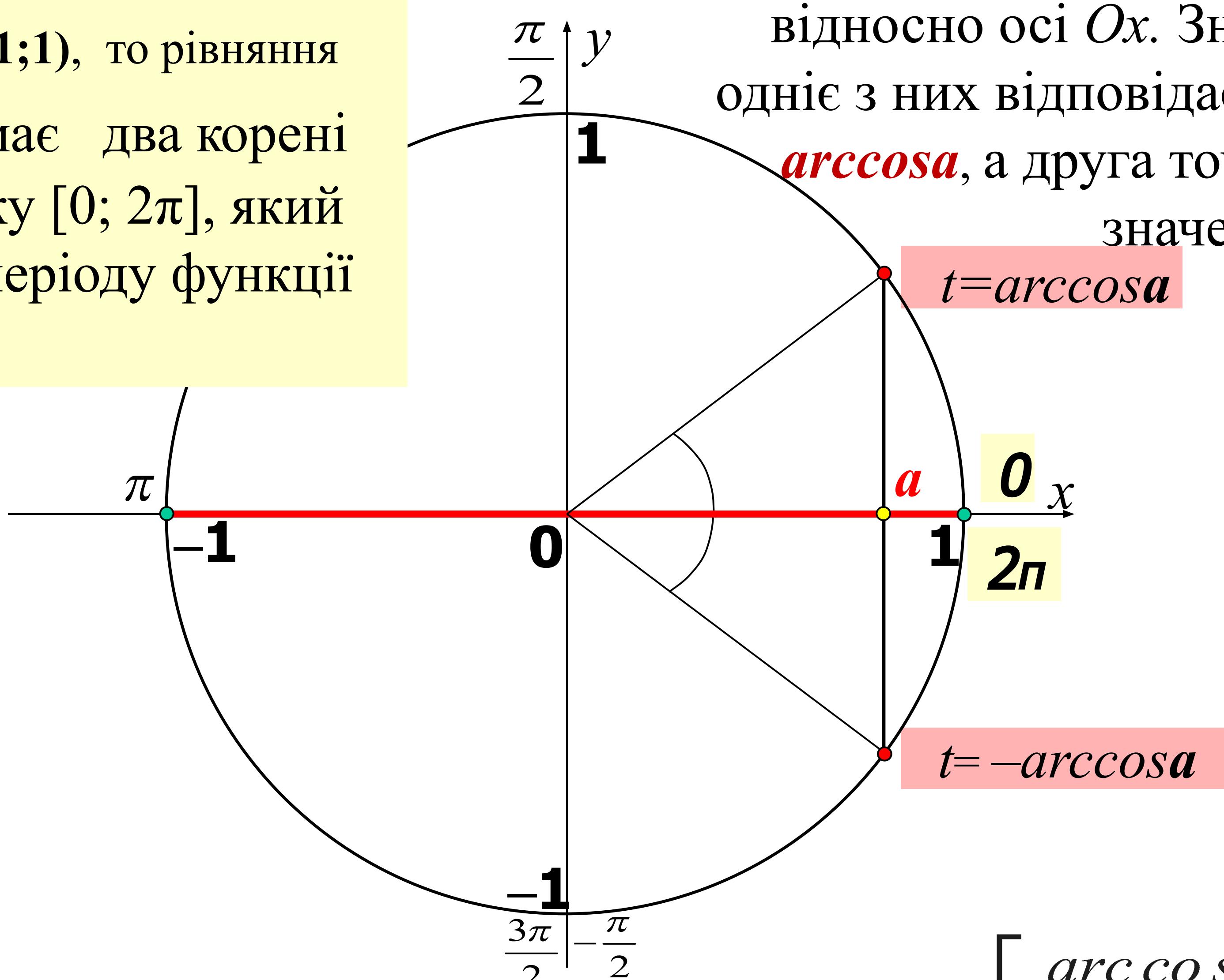
І випадок: Якщо $a \notin [-1;1]$, то рівняння ***cos t = a*** не має коренів.



II випадок:

Якщо $a \in (-1;1)$, то рівняння $\cos t = a$ має два корені на проміжку [0; 2π], який дорівнює періоду функції косинус.

Отримані точки симетричні відносно осі Ox. Значення однієї з них відповідає числу ***arccosa***, а друга точка має значення…?



Отже, для $t \in [0; 2\pi]$ ми отримали два кореня:

$$t = \left[\begin{array}{l} \arccos a; \\ -\arccos a. \end{array}\right.$$

Враховуючи періодичність функції **$y = \cos x$ ($T=2\pi n$, де $n \in Z$)**, кожну з цих точок можна отримати при додаванні цілого числа повних обертів, тобто:

$$\cos t = a$$

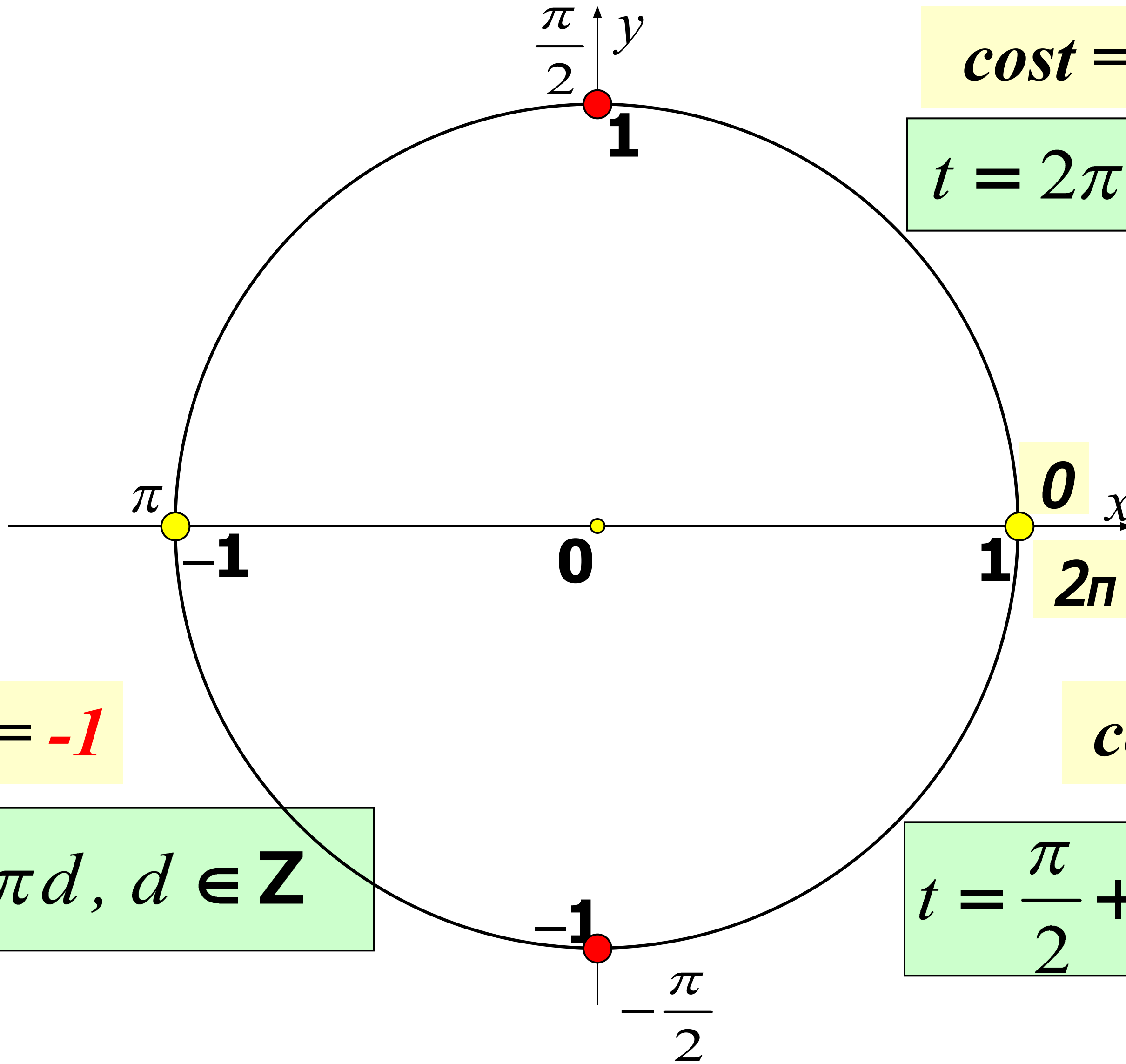
$$t = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi k; \\ -\arccos a + 2\pi m; \end{array}\right. \quad k, m \in \mathbf{Z},$$

Ці записи відрізняються тільки знаками перед ***arccosa***. Тому ці дві рівності можна об'єднати в одну формулу :

$$\boxed{t = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.}$$

Ця формула дозволяє знайти корені найпростішого тригонометричного рівняння $\cos t = a$ у випадках, коли $a \in (-1;1)$.

Частинні випадки. Якщо $a = -1;\ a = 0$ **або** $a = 1.$



cost $= 1$

$t = 2\pi r,\ r \in \mathbf{Z}$

cost $= -1$

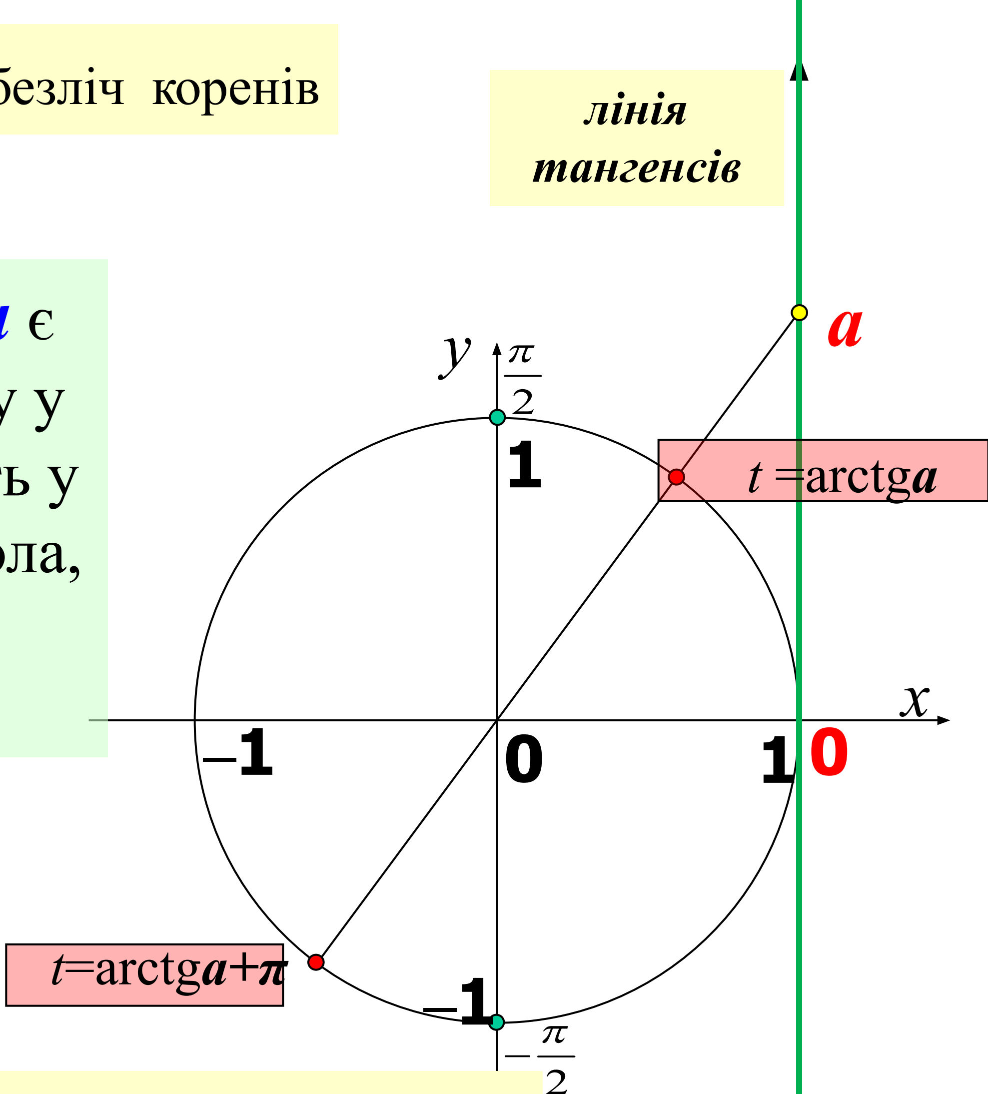
$t = \pi + 2\pi d,\ d \in \mathbf{Z}$

cost $= 0$

$t = \frac{\pi}{2} + \pi h,\ h \in \mathbf{Z}$

Рівняння ***tg t = a*** завжди має безліч коренів

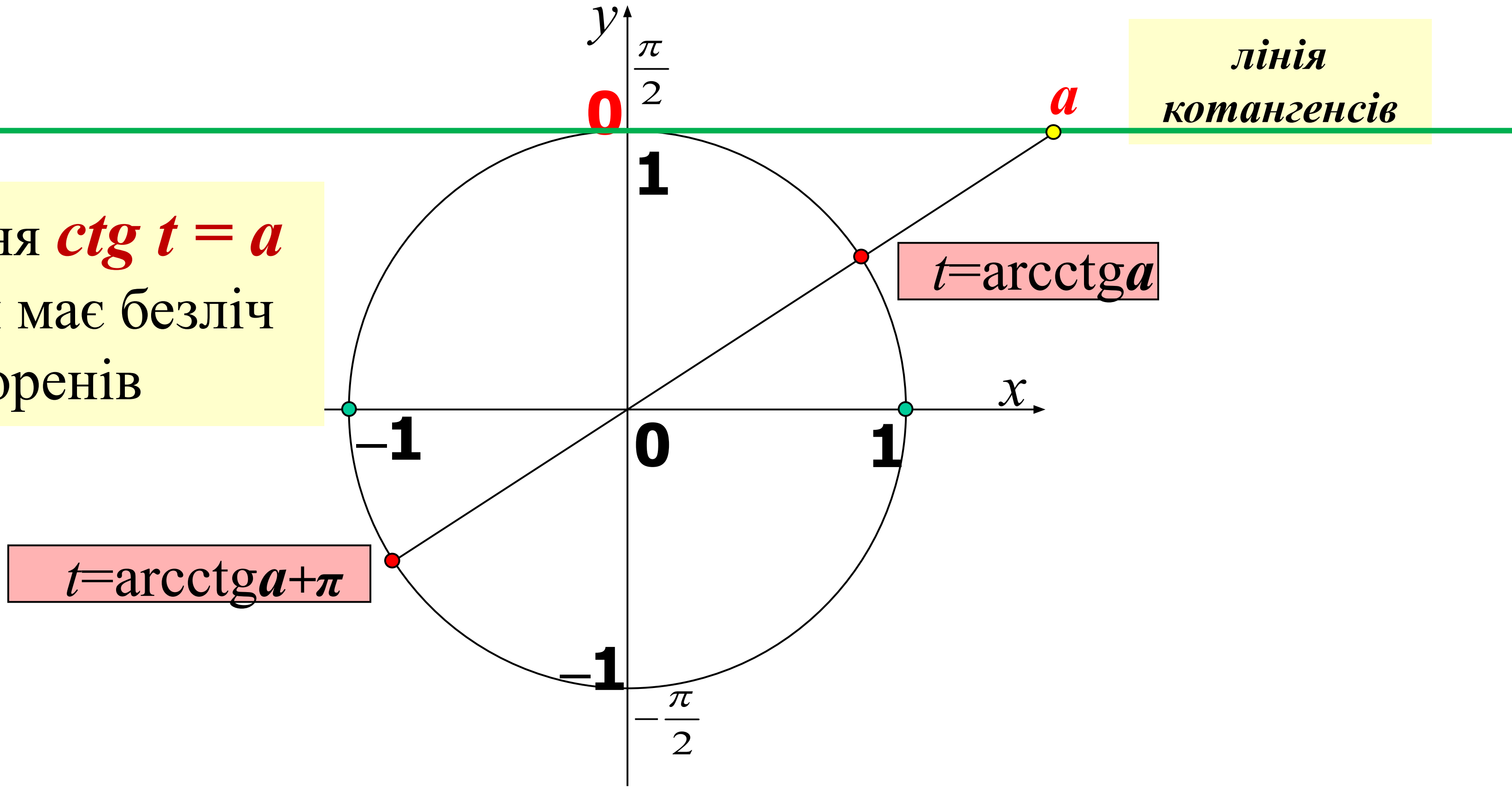
Коренями рівняння ***tg t = a*** є числа (величини кутів повороту у радіанній мірі), які потрапляють у дві точки тригонометричного кола, з відповідними значеннями (подумайте якими?):



Всі корені рівняння ***tg t = a*** записують у вигляді:

$$t = arc\,tg\,a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Рівняння ***ctg t = a*** завжди має безліч коренів



Всі корені рівняння ***ctg t = a*** записують у вигляді:

$$t = arc\,ctg\,a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Формули коренів найпростіших тригонометричних рівнянь

1. cost = *a*, де |*a*|≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

аб

$$t = \pm\arccos a + 2\pi k, k \in Z$$

Частинні випадки

1) <u>cost=0</u>
t = π/2+πn, nϵZ

2) <u>cost=1</u>
t = 0+2πn, nϵZ

3) <u>cost = -1</u>
t = π+2πn, nϵZ

2. sint = *a*, де |*a*| ≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

аб

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$$

Частинні випадки

1) <u>sint=0</u>
t = 0+πk, kЄZ

2) <u>sint=1</u>
t = π/2+2πk, kЄZ

3) <u>sint = - 1</u>
t = - π/2+2πk, kЄZ

3. tgt = *a*, *a*ϵR

t = arctg ***a*** + πk, kϵZ

4. ctgt = *a*, *a*ϵR

t = arcctg ***a*** + πk, kϵZ

$$\cos x = a$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$$

$$\sin x = a$$

$$x = (-1)^m \cdot \arcsin a + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}.$$

1) $\cos(-x) = \frac{1}{2}$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k \in Z$$

$$x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k, k \in Z$$

$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$3)\quad ctg x = -\sqrt{3}$$

$$x = arcctg(-\sqrt{3}) + \pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

$$ctg\ t = a$$

$$t = arc\,ctg\,a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

$$4)\quad 5 \sin x + 8 = 13$$

$$5 \sin x = 13 - 8$$

$$5 \sin x = 5$$

$$\sin x = 1$$

Частинний випадок

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

$$5)\ \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

$$6)\ \sqrt{3} ctg x - 1 = 0$$

$$\sqrt{3} ctg x = 1$$

$$ctg x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$tg x = \sqrt{3}$$

$$x = arctg \sqrt{3} + \pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$

$$7)\ tg(-x) = -2,5$$

$$-\ tg x = -2,5$$

$$tg x = 2,5$$

$$x = arctg 2,5 + \pi n, n \in Z$$

$$8)\ \sin x = -1,3$$

$$x \in \emptyset$$

$$9)\quad cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x = \pm arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z$$

Твій настрій:

Дякую за урок!

<u>**Домашнє завдання:**</u>

Підручник Є.П. Нелін

Алгебра і початки аналізу

10 клас

<u>**Сторінка 334**</u>

№ 1, 2, 3, 4.

САМООЦІНКА:

ОЦІНКА ВЧИТЕЛЯ: