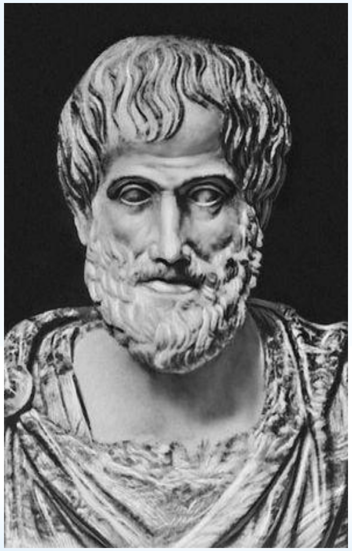
АЛГЕБРА ЛОГИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

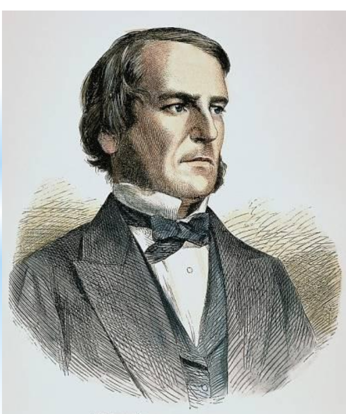
Логика – это наука о формах и законах человеческого мышления.



Ее основоположник – древнегреческий мыслитель
Аристотель (384-322 года до н. э.).

Логика

Вильгельм Лейбниц (1646-1716). Основоположник математической логики (пытался построить первые логические исчисления: арифметические и буквенно-алгебраические).



Джордж Буль (1815-1864). Создал новую область науки - Алгебру логики (Булеву алгебру или Алгебру высказываний).

Алгебра логики (булева алгебра) - это раздел математики, изучающий высказывания, и логические операции над ними.

Цель алгебры логики - описание поведения и структуры логических схем.

Объекты алгебры логики – **высказывания**.

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

- Сейчас идет дождь.
- Жирафы летят на север.
- История – интересный предмет.
- У квадрата – 10 сторон и все разные.
- Красиво!
- В городе N живут 2 миллиона человек.
- Который час?

Виды высказываний

Высказывания

Простые

Составные

Высказывание называется **простым**, если никакая его часть сама не является высказыванием.

Сложные (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических связок (и; или; не; если, то; и др).

Так, например, из элементарных высказываний "Петров — врач", "Петров — шахматист" при помощи связки "и" можно получить составное высказывание "Петров — врач и шахматист", понимаемое как "Петров — врач, хорошо играющий в шахматы".

При помощи связки "или" из этих же высказываний можно получить составное высказывание
"Петров — врач или шахматист",
понимаемое в алгебре логики как
"Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно".

В алгебре логики высказывания обозначают ЗАГЛАВНЫМИ буквами латинского алфавита и называют ***логическими переменными***.

Если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей (***A*** = **1**), а если ложно - нулём (***B*** = **0**).

0 и **1** называются ***логическими значениями***.

Так, например, предложение
" Трава зеленая" следует считать высказыванием, так как оно истинное.
Записывается: A=1

Предложение " Лев - птица" тоже высказывание, так как оно ложное.
Записывается: B=0

Пусть через A обозначено высказывание "Тимур поедет летом на море", а через B — высказывание "Тимур летом отправится в горы".

Тогда составное высказывание "Тимур летом побывает и на море, и в горах" можно кратко записать как

А и В

Здесь "и" — логическая связка, А, В — логические переменные, которые могут принимать только два значения - "истина" или "ложь", обозначаемые, соответственно, "1" и "0".

Составьте из простых высказываний составные при помощи связок:

А – Сейчас идет дождь.

В – Форточка открыта.

А и В	Сейчас идет дождь и открыта форточка.
А или не В	Сейчас идет дождь или форточка закрыта.
если А, то В	Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.
не А и В	Сейчас нет дождя и форточка открыта.
А тогда и только тогда, когда В	Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ

Операция, выражаемая словом "не", называется **инверсией** или отрицанием и обозначается чертой над высказыванием.

$\overline{A}$

Если высказывание **А** истинно, то "**не А**" ложно, и наоборот.

Высказывание $\overline{A}$ истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно.

Пример. "Луна — спутник Земли" (A);

"Луна — не спутник Земли" ($\overline{A}$).

Таблица истинности

логического выражения F – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения F для каждой комбинации.

A	не A
0	1
1	0

таблица истинности операции НЕ

Операция И

Операция, выражаемая связкой "и", называется ***конъюнкцией***

(лат. conjunctio — соединение)

или ***логическим умножением***

и обозначается точкой " · "

(может также обозначаться знаками ^ или &).

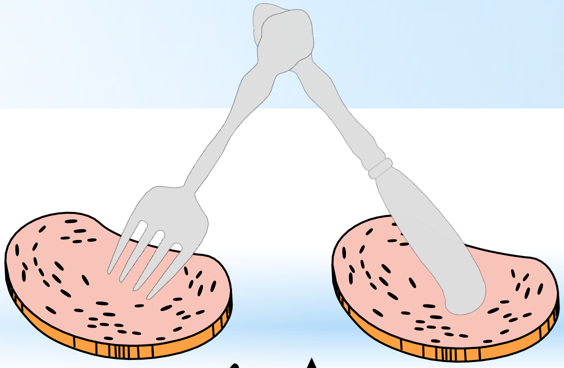
Высказывание $A \cdot B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны.

Например, высказывание
"10 делится на 2 и 5 больше 3" истинно,
а высказывания:
"10 делится на 2 и 5 не больше 3",
"10 не делится на 2 и 5 больше 3",
"10 не делится на 2 и 5 не больше 3"
— ложны.

Таблица истинности конъюнкции

A	B	A и B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

также: **A·B**, **A ∧ B**, **A & B**



A ∧ B

Операция ИЛИ

Операция, выражаемая связкой "*или*" называется <u>*дизъюнкцией*</u>

(лат. disjunctio — разделение)

или *логическим сложением* и обозначается знаком **V** (или **+** «плюсом»).

Высказывание A v B <u>ложно</u> тогда и только тогда, когда <u>оба</u> высказывания A и B <u>ложны</u>.

Например, высказывание

"10 не делится на 2 или 5 не больше 3" ложно, а высказывания

"10 делится на 2 или 5 больше 3",

"10 делится на 2 или 5 не больше 3",

"10 не делится на 2 или 5 больше 3"— истинны.

Таблица истинности дизъюнкции

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также: **A+B**, **A ∨ B**

Базовый набор операций

С помощью операций **И**, **ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.

И	**ИЛИ**	**НЕ**

базовый набор операций

Сколько всего существует логических операции с двумя переменными?

Операция ЕСЛИ-ТО

Операция, выражаемая связками "*если ..., то*", "*из ... следует*", "*... влечет ...*",

называется <u>***импликацией***</u>

(лат. *implico* — тесно связаны) и обозначается знаком $\rightarrow$. Высказывание **A** $\rightarrow$ **B** ложно тогда и только тогда, когда **A** истинно, а **B** ложно.

Таблица истинности импликации

А – "Работник хорошо работает".

В – "У работника хорошая зарплата".

А	В	А → В
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Операция **РАВНОСИЛЬНО**

Операция, выражаемая связками "*тогда и только тогда*", "*необходимо и достаточно*", "... *равносильно* ...", называется ***эквиваленцией*** и обозначается знаком
или ~. $\leftrightarrow$

Высказывание **A** $\leftrightarrow$ **B** истинно тогда и только тогда, когда значения **A** и **B** совпадают.

Таблица истинности эквиваленции

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить **логической формулой.**

Определение **логической формулы**:

1. Всякая логическая переменная и символы "истина" ("1") и "ложь" ("0") - формулы.

2. Если A и B - формулы, то $\overline{A}$, $A \cdot B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ - формулы.

3. Никаких других формул в алгебре логики нет.

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении

1. Инверсия;
2. Конъюнкция;
3. Дизъюнкция;
4. Импликация;
5. Эквивалентность.

Определите истинность составного высказывания:

$(\overline{A} \& \overline{B}) \& (C \lor D)$, состоящего из простых высказываний:

A = {Принтер – устройство вывода информации},
B = {Процессор – устройство хранения информации},
C = {Монитор – устройство вывода информации},
D = {Клавиатура – устройство обработки информации}.

Сначала на основании знания устройства компьютера устанавливаем истинность простых высказываний:
$A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 0$.

Определим теперь истинность составного высказывания, используя таблицы истинности логических операций:

$$(\overline{1} \& \overline{0}) \& (1 \lor 0) = (0 \& 1) \& (1 \lor 0) = 0$$

Составное высказывание ложно.

Даны простые высказывания:

A = {Принтер – устройство ввода информации},
B = {Процессор – устройство обработки информации},
C = {Монитор – устройство хранения информации},
D = {Клавиатура – устройство ввода информации}.

Определите истинность составных высказываний:

а) $(A \,\&\, B) \,\&\, (C \vee D)$;

б) $(A \,\&\, B) \Rightarrow (C \vee D)$;

в) $(A \vee B) \Leftrightarrow (C \,\&\, D)$;

г) $\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B}$.