

Урок 15. Точечная оценка числовой характеристики случайной величины, ее свойства.

Определение.

- Выборочная оценка, используемая в качестве приближенного значения неизвестной генеральной характеристики, называется ее точечной статистической оценкой.

| | |
|---|---------------------------------|
| Генеральная совокупность, Γ | Выборка, V_n |
| Генеральная характеристика, Θ | Точечная оценка, $\bar{\Theta}$ |
| Математическое ожидание, MX | Выборочная средняя, \bar{X} |
| Генеральная дисперсия, DX | Выборочная дисперсия, S^2 |
| Среднеквадратическое отклонение, σ_x | Выборочное отклонение, S |
| Вероятность, P | Относительная частота, ω |

$$\Theta \approx \bar{\Theta}$$

- **Вопрос: Как хорошо выбрано приближение?**
- **Свойства точечных оценок:**
- 1. **Точечная оценка называется состоятельной, если для любого значения $\varepsilon > 0$ выполняется условие**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\bar{\Theta} - \Theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Чем больше объем информации, тем оценка более состоятельна, $V_n > 30\%$ от генеральной совокупности (Γ).

2. Оценка $\bar{\Theta}$ называется несмещенной, если для любого фиксированного числа наблюдений n выполняется условие:

$$M(\bar{\Theta}_n) = \Theta$$

т.е. среднее значение оценки совпадает с точным значением генеральной характеристики.

3. Несмещенная оценка генеральной характеристики называется эффективной, если она среди всех несмещенных оценок той же характеристики обладает наименьшей дисперсией.

| Закон распределения | $\min \bar{X}$ | $\min D\bar{X}$ | | | | | | |
|--|----------------------|----------------------|---|---|---|-----|---|--------------------|
| Нормальный закон распределения | $\frac{\sigma^2}{n}$ | $\frac{\sigma^4}{n}$ | | | | | | |
| <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>X</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>p</td> <td>1-p</td> </tr> </table> | X | 1 | 0 | P | p | 1-p | - | $\frac{p(1-p)}{n}$ |
| X | 1 | 0 | | | | | | |
| P | p | 1-p | | | | | | |

Задача.

- Пусть генеральную совокупность образуют 5 чисел: -2;-1;0;2;6.
- 1. Вычислить генеральное среднее и генеральную дисперсию;
- 2. Составить все возможные выборки с возвратом объема $n=2$;
- 3. Для каждой выборки определить выборочную среднюю и выборочную дисперсию;
- 4. Установить, какими свойствами обладают выборочные характеристики.

Решение:

1. Составить ряд распределения и вычислить генеральные характеристики:

| | | | | | |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| X | -2 | -1 | 0 | 2 | 6 |
| P | 1/5 | 1/5 | 1/5 | 1/5 | 1/5 |

$$MX=1/5(-2-1+0+2+6)=1$$

$$DX=1/5((-2-1)^2+(-1-1)^2+(0-1)^2+(2-1)^2+(6-1)^2)=8$$

2. Составить все возможные выборки с возвратом объема $n=2$ и вычислить для каждой выборочную среднюю и выборочную дисперсию, заполнив таблицу:

| Выборка X_1 X_2 | $P(x_1; x_2)$ | $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ | $(\bar{X})^2$ | $\bar{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ | $DX = \bar{X}^2 - (\bar{X})^2$ |
|------------------------|---------------|---------------------------------|---------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| -2 -2 | 1/25 | -2 | 4 | 4 | 0 |

3. Построить ряд распределения выборочной средней и найти ее математическое ожидание:4.

| | | | | | | | | | | | | |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| \bar{X} | -2 | -3/2 | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 2 | 5/2 | 3 | 4 | 6 |
| P | 1/25 | 2/25 | 3/25 | 2/25 | 3/25 | 2/25 | 2/25 | 3/25 | 2/25 | 2/25 | 2/25 | 1/25 |

$$M \bar{X} = \frac{1}{25} \left(-2 \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot 2 - 1 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \frac{5}{2} \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \right) = 1$$

Аналогично, построить ряд распределения выборочных дисперсий и найти их математическое ожидание.

5. Определить, какими свойствами обладают выборочные характеристики.
- Состоятельность: $V(\Gamma)=5$; $V_{n=2} (2/5)*100\%=40\%>30\%$, следовательно оценки состоятельны.

- Несмещенность: $M(\bar{X}) = MX = 1$

$$M(D\bar{X}) \neq DX$$

Выборочная средняя несмещенная.

Выборочная дисперсия смещенная.

■ **Эффективность.** $\min \bar{X} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{8}{5} = 1,6$

Среди всех выборочных дисперсий нет значения, равного 1,6, следовательно выборочная средняя не эффективна.

| Точечная оценка | состоятель ность | несмещенн ость | эффектив ность |
|----------------------------|-----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| \bar{X} | + | + | - |
| DX | + | - | - |