ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Проблема:

найти объем мороженицы

Вычисление объемов тел вращения с помощью определенного интеграла

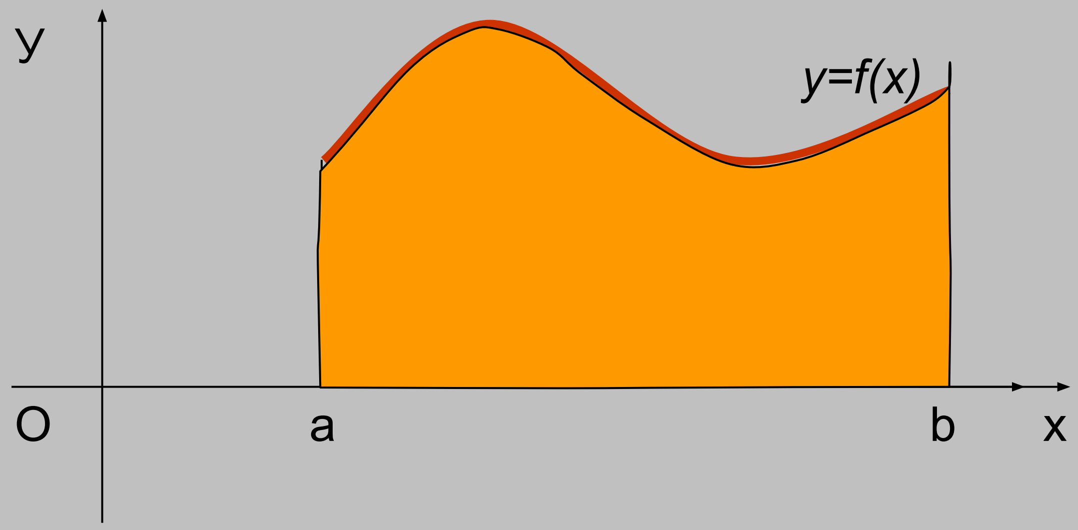
Алгебра

Определенный интеграл

- Если функция f(x) непрерывна на промежутке числовой оси, содержащей точки x=a и x=b, то разность значений F(b)-F(a) (где F(x) - первообразная f(x) на данном промежутке называется ***определенным интегралом*** от функции f(x) от a до b.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Алгебра



Определение криволинейной трапеции

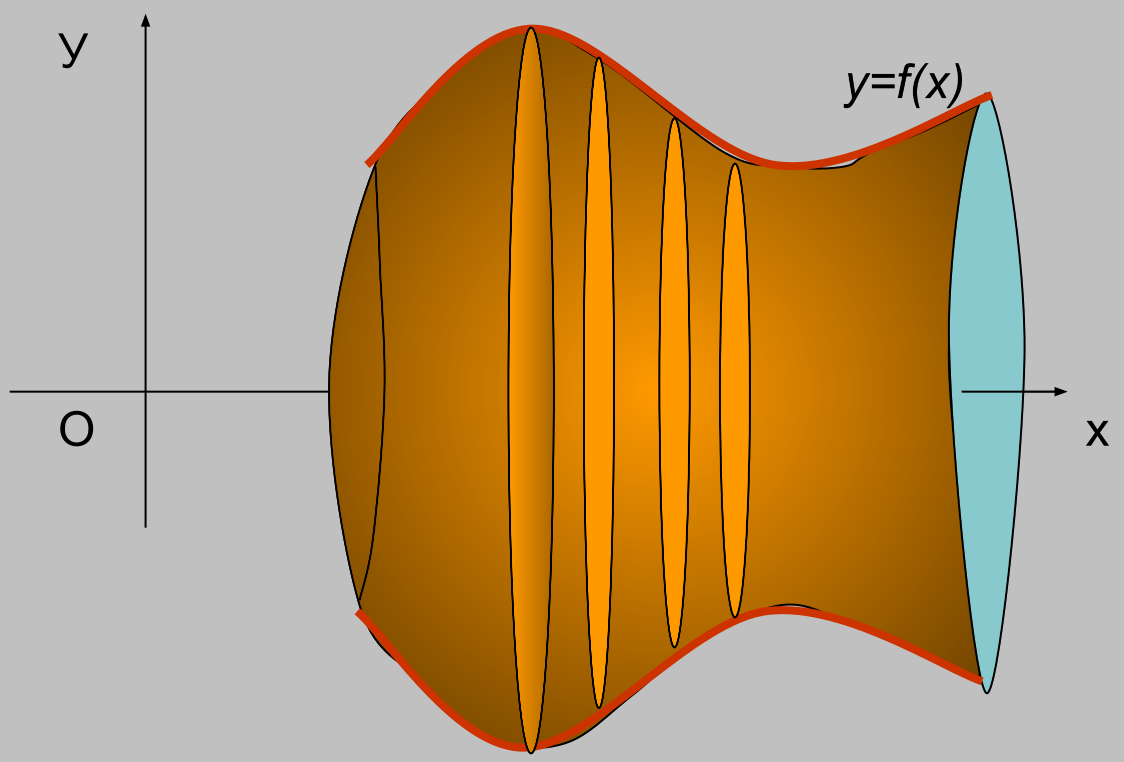
Если функция y = f(x) определена, неотрицательна и непрерывна на отрезке [a; b],тогда график кривой y=*f(x)* на [a; b], ось ОХ, прямые x = a, x = b образуют *криволинейную трапецию*.

Рассмотрим тело, образованное вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси ОХ и найдем его объем.

Определение тела вращения

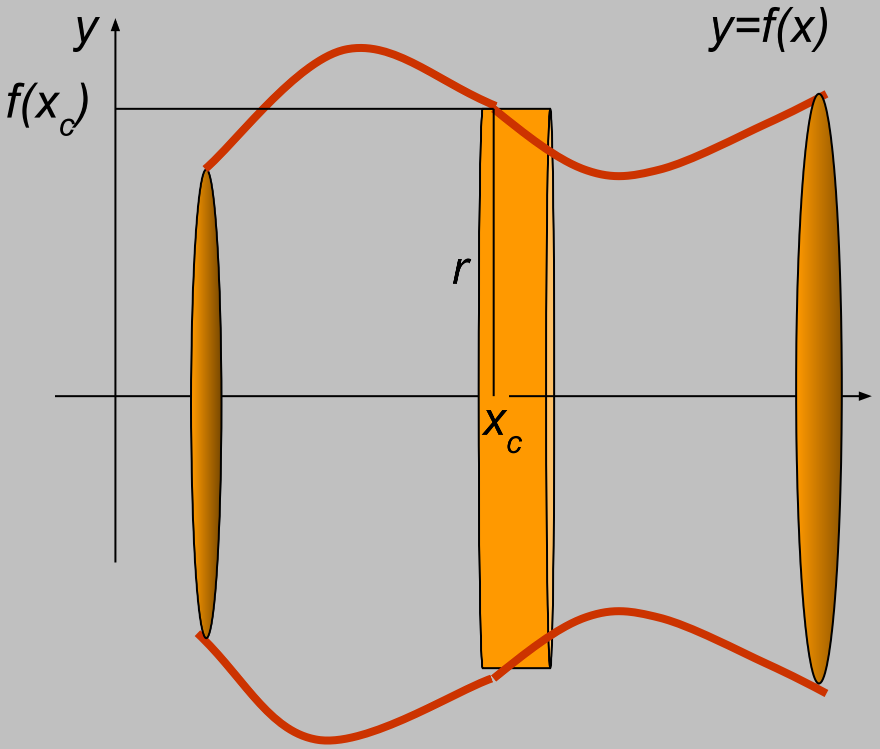
Тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг её основания, называется телом вращения

Разобьем отрезок [a;b] на n частей произвольным образом, через каждую точку деления проведем плоскость, перпендикулярную к оси OX и найдём площади полученных поперечных сечений.



Любое поперечное сечение тела вращения – круг.

Построим на каждом промежутке цилиндрическое тело, образующая которого параллельна оси ОХ,
а основанием является сечение - круг.



Радиус круга равен значению функции в x_c.
Площадь этого круга –

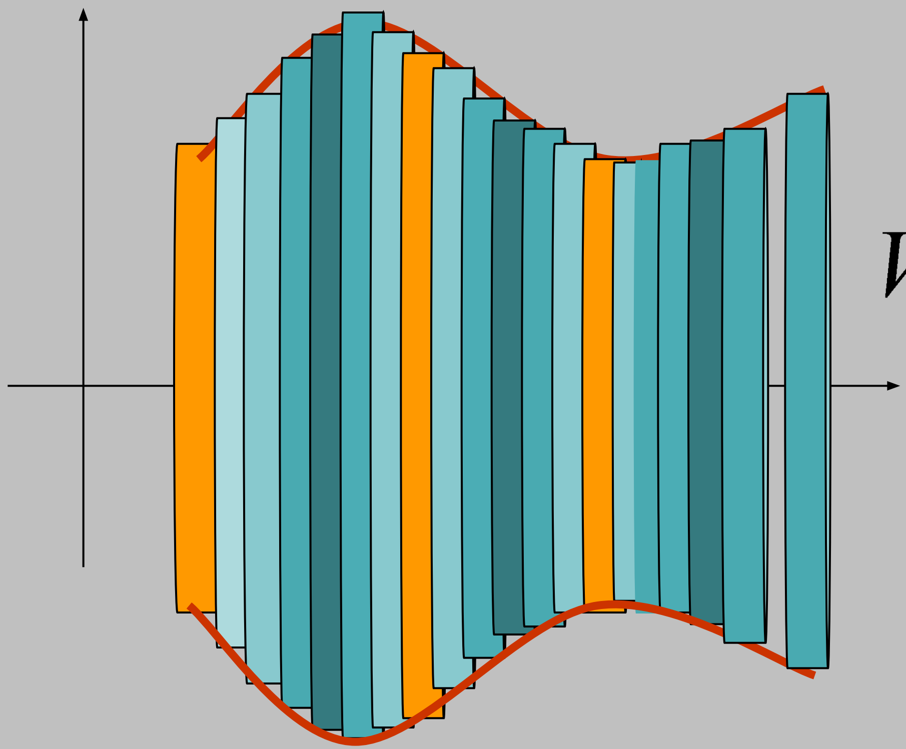
$$S(x) = \pi f^2 (x_c)$$

Объём цилиндра –

$$V = S(x) \cdot \Delta x$$

Объем каждого цилиндра с основанием S(x) и высотой Δx равен S(x)· Δx , а объем всего ступенчатого тела равен сумме объёмов всех цилиндров.

$$V_{CT} = \sum_{k=1}^{n} S(x_k) \cdot \Delta x_k$$



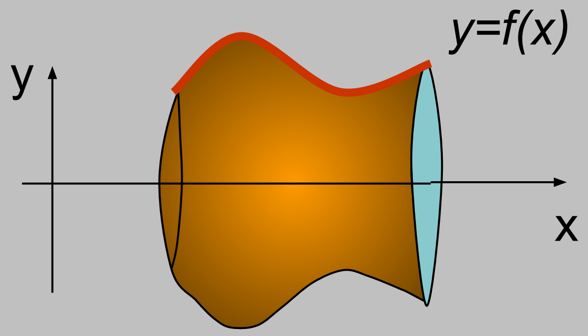
$$V = \lim_{n \to \infty} V_{CT} = \int_a^b S(x) \partial x$$

Предел полученной интегральной суммы, при n → ∞ равен определенному интегралу.

Тогда объем тела вращения вокруг оси OX:

$$V = \int_a^b S(x)\partial x = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)\partial x = \pi \int_a^b f^2(x)\partial x$$

- Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, образованной функцией y=*f(x)* на отрезке [a;b], вокруг оси OX, то его объём можно найти по формуле:



$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\partial x}$$

Замечание!

Объем тела вращения вычисляется по одной из формул:

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

,если вращение криволинейной трапеции **вокруг оси ОХ.**

$$V=\pi\int_a^b [\phi(y)]^2\,dy$$

, если вращение криволинейной трапеции **вокруг оси ОУ.**

Алгоритм решения задач:

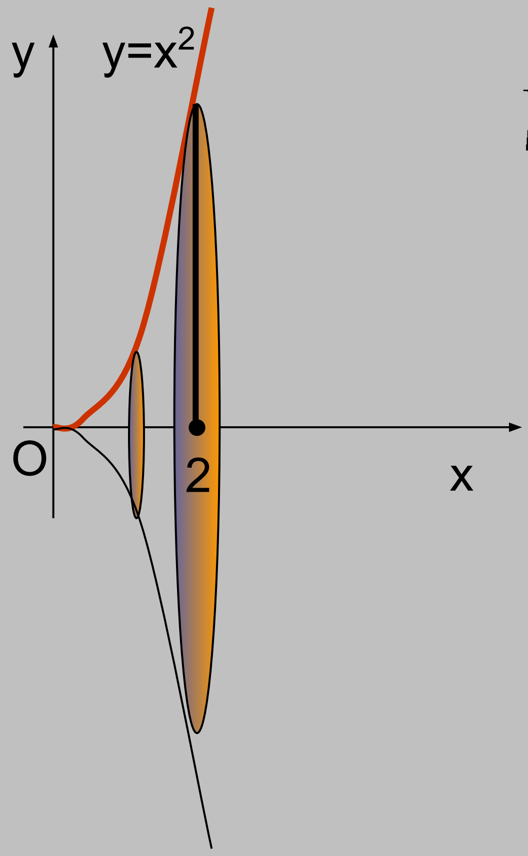
- Сделать приблизительный график заданных функций, ограничивающих плоскую фигуру, при вращении которой образуется тело вращения;
- Найти пределы интегрирования;
- Выяснить какой формулой удобно пользоваться в данном случае;
- Вычислить объем тела вращения.

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\partial x$$

Задача.

Пусть тело образовано вращением параболы $y=x^2$ на отрезке [0;2] вокруг оси OX.

Найдите объём тела вращения.



$$V=\int_0^2 S(x)\partial x=\int_0^2 \pi\cdot(x^2)^2\partial x=$$

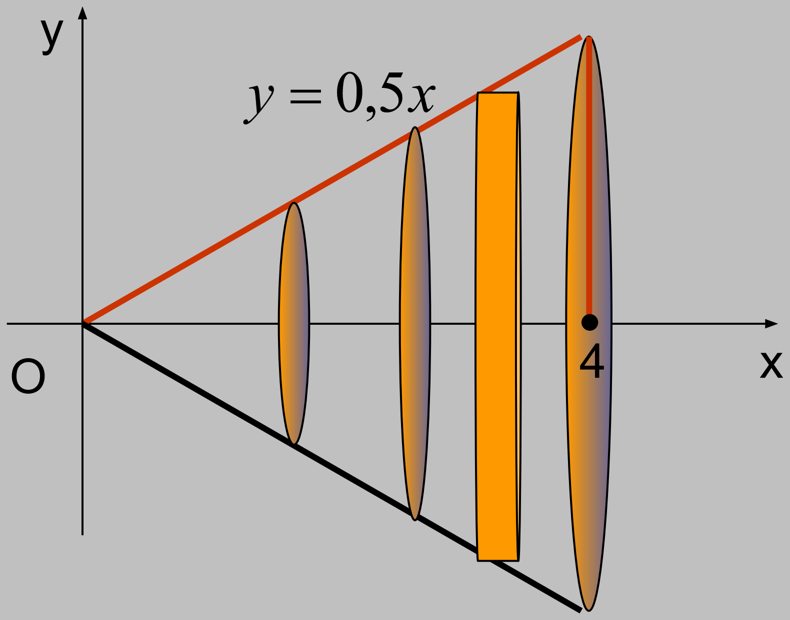
$$=\pi\int_0^2 x^4\partial x=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^2=\frac{32\pi}{5}(куб.ед.)$$

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\partial x$$

Задача.

Пусть тело образовано вращением функции y=0,5x на отрезке [0;4] вокруг оси OX.

Найдите объём тела вращения.



$$V=\pi\int_0^4 (0,5x)^2\partial x=$$

$$=\pi\cdot\frac{0,25x^3}{3}\Bigg|_0^4=$$

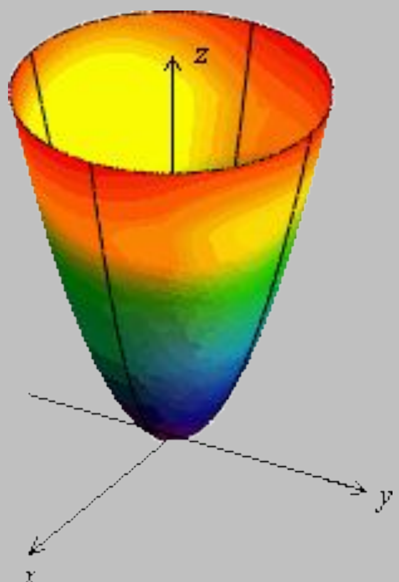
$$=\frac{16\pi}{3}(кв.ед.)$$

Теперь, давайте, рассмотрим башню для радиостанции в Москве на Шаболовке, построенной по проекту русского инженера, почётного академика В. Г. Шухова. Она состоит из частей – гиперболоидов вращения. А спутниковые антенны состоят из параболоидов вращения

Задача.

Пусть тело образовано вращением параболы $y=x^2$ на отрезке [0;4] вокруг оси ОУ.

Найдите объём тела вращения.(параболоид)

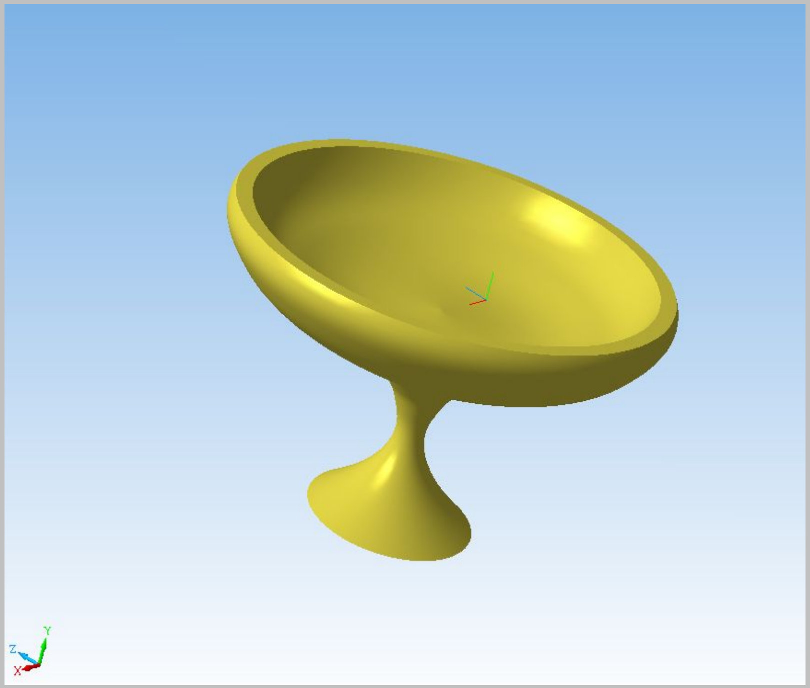


$$V=\pi\int_0^4(\sqrt{y})^2\partial y=$$

$$=\pi\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^4=$$

$$=8\pi(кв.ед.)$$

Решение проблемы:
Как найти объем мороженицы?



Поверхность тела получена вращением фигуры, образованной графиками функций:

$$y = 0{,}5x^2 + 1, \text{на} [-3; 2]$$

$$y = \sqrt{6x - 12} + 3, \ \text{на} [2; 8]$$

$$y = 4\sqrt{x - 4}, \ \text{на} [4; 8]$$

Решение:

$$y = 0{,}5x^2 + 1, на [-3; 2]$$

$$y = \sqrt{6x - 12} + 3,\ на [2; 8]$$

$$y = 4\sqrt{x - 4},\ на [4; 8]$$

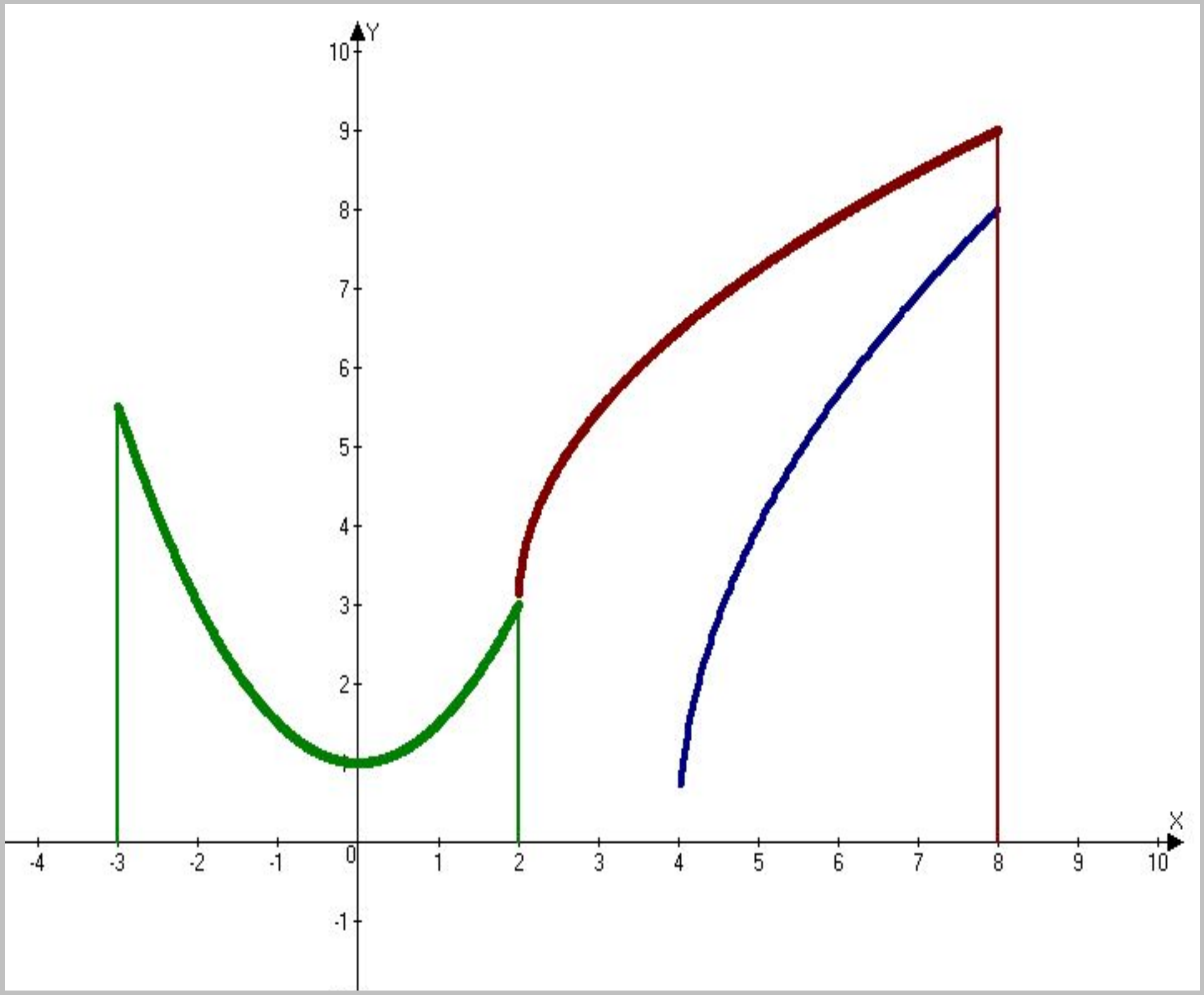
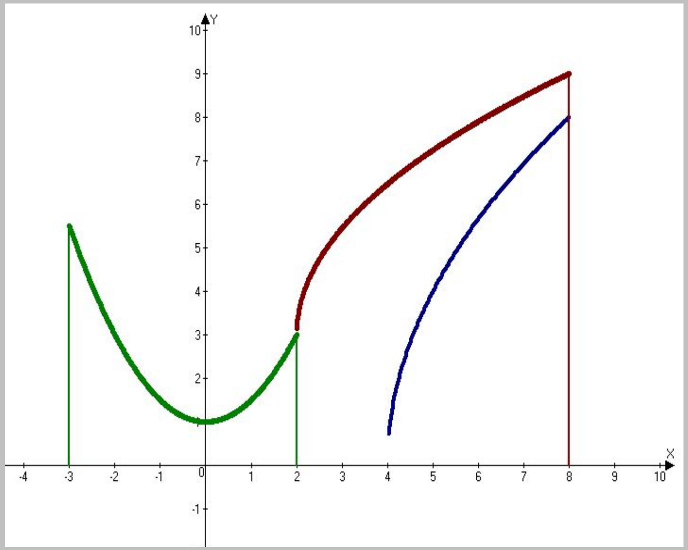


Схема решения

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\partial x}$$

$$V = V_{\text{îñíîâàíèÿ}} + V_{\text{÷àøè}} - V_{\text{âûåìêè}}$$

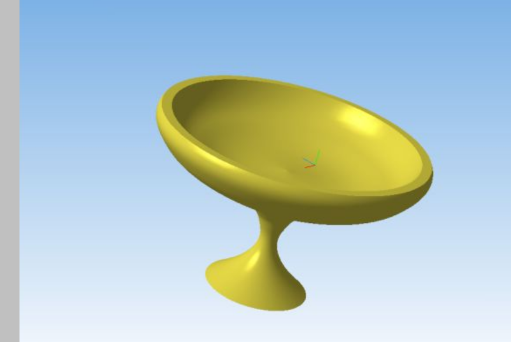


$$V_{основания} = \pi \int_{-3}^{2} \left(0{,}5x^2 + 1\right)^2 \partial x$$

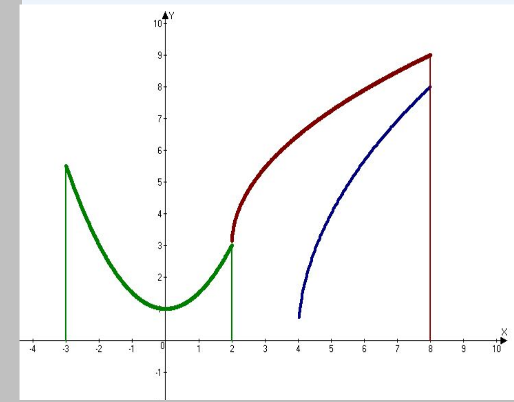
$$V_{чаши} = \pi \int_{2}^{8} \left(\sqrt{6x - 12} + 3\right)^2 \partial x$$

$$V_{выемки} = \pi \int_{4}^{8} \left(4\sqrt{4x - 4}\right)^2 \partial x$$

Вычисление определённых интегралов



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\partial x$$



$$V = V_{основания} + V_{чаши} - V_{выемки}$$

$$V_{основания} = \pi \int_{-3}^{2} \left(0{,}5x^2 + 1\right)^2 \partial x = \pi \int_{-3}^{2} (0{,}25x^4 + x^2 + 1)\partial x = \pi \cdot 30\tfrac{5}{12}\,куб.ед.$$

$$V_{чаши} = \pi \int_{2}^{8} \left(\sqrt{6x-12} + 3\right)^2 \partial x = \pi \int_{2}^{8} (6x - 12 + 6\sqrt{6x-12} + 9)\partial x = \pi \cdot 306\ куб.ед.$$

$$V_{выемки} = \pi \int_{4}^{8} \left(4\sqrt{4x-4}\right)^2 \partial x = \pi \int_{4}^{8} 16(4x-4)\partial x = \pi \cdot 128\,куб.ед.$$

$$V_{кубка} = 208\tfrac{5}{12}\pi \approx 654.4куб.ед$$

Самостоятельная работа

- 1 вариант
- 1)Вычислите:
- а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx$;
- б) $\int_1^2 x^4 \, dx$;
- 2)Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями
- у=x^2,у=0, x=2