

Физический смысл производной

Содержание:

1. Введение понятия производной;
2. Физический смысл производной;
3. Примеры решения задач;
4. Физический смысл второй производной;
5. Примеры решения задач.

Производная

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению её аргумента, при стремлении последнего к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Правила вычисления производной

Производная линейной функции равна её угловому коэффициенту;

Если у функций f и g существуют производные, то

→ $(f^n)' = n f^{n-1} f'$, где n – натуральное число

→ $(Cf)' = C f'$, где C – число

→ $(f + g)' = f' + g'$

→ $(fg)' = f'g + fg'$

→ $\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Производная сложной функции

Пусть функции $h(x)$, $g(x)$, $f(x)$ имеют производные.

$h(x) = g(f(x))$ – сложная функция

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x)$$

Физический смысл производной

Мгновенная скорость в момент времени t_0 прямолинейного движения, совершаемого по закону $x = f(t)$, равна значению производной функции f при $t = t_0$.

$$v = f'(t)$$

Таким же образом определяют мгновенную скорость других физических процессов: углового вращения, радиоактивность распада и т. д.

Задачи

Материальная точка движется по прямой согласно уравнению

$$S(t) = 3t^4 - 3t^2 + 6t - 5 \text{ (м/с)}$$

- а) Найдите ее скорость в момент времени $t = 4$ с.
- б) В какой момент времени ее скорость равна 6 м/с?

Решение

а) 1. Так как производная уравнения движения есть скорость движения материальной точки, то $v = (S(t))'$

$$2. (S(t))' = 4 \cdot 3t^3 - 3 \cdot 2t + 6$$

$$(S(t))' = 12t^3 - 6t + 6$$

$$v = 12t^3 - 6t + 6$$

3. Находим скорость при $t = 4$:

$$v = 12 \cdot 64 - 6 \cdot 4 + 6$$

$$v = 750 \text{ м/с}$$

Решение

$$б) v = 12t^3 - 6t + 6$$

Подставляем значение $v = 6$ м/с и решаем полученное уравнение:

$$12t^3 - 6t + 6 = 6$$

$$12t^3 - 6t = 0$$

$$6t(2t^2 - 1) = 0$$

$$t = 0 \text{ или } 12t^2 - 6 = 0$$

$t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ - не подходит по условию задачи.

Ответ: а) 750 м/с б) при $t = 0$ с или $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ с.

Вторая производная. Ее физический смысл.

Пусть функция f имеет производную f' во всех точках промежутка X . Эта производная в свою очередь является функцией от x . Если функция f' дифференцируема, то ее производную называют второй производной от f и обозначают f'' . Таким образом, $f'' = (f')'$.

Вторая производная выражает скорость изменения первой производной, или, как говорят, ускорение изменения данной функции. Если $x = f(t)$ – координата прямолинейно движущейся точки в момент времени t , то $x'' = f''(t)$ равно ускорению этой точки в этот же момент времени:

$$a = v' = (x')' = x''.$$

Задача

Материальная точка движется по прямой согласно уравнению

$$s(t) = t^3 - 2t^2 + 3.5t - 15 \text{ (м/с)}$$

- а) В какой момент времени ускорение будет равно 8 м/с^2 .
- б) Какое ускорение будет в момент времени $t = 2 \text{ с}$?

Решение

а) 1. Находим ускорение:

$$a = (s'(t))' = ((t^3 - 2t^2 + 3.5t - 15)')' \\ = (3t^2 - 4t + 3.5)' = 6t - 4$$

2. Приравниваем полученное выражение к 8 - ми :

$$6t - 4 = 8$$

$$t = 2 \text{ (с)}$$

Решение

$$\text{б) } a = 6t - 4$$

При $t = 2$ (с) ускорение равно:

$$a = 6 \cdot 2 - 4$$

$$a = 8 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Ответ: а) 2с б) 8 м/с²