

# Глава 5.

## Магазинные автоматы

## § 5.1. Неформальное описание

В этой главе мы рассмотрим простое устройство — магазинный автомат (pda — **pushdown automaton**), которое адекватно классу КС-языков в том смысле, что любой КС-язык распознаётся каким-нибудь магазинным автоматом, и любой магазинный автомат распознаёт некоторый КС-язык. Вместо этого термина часто используется сокращение МП-автомат.

Магазинный автомат подобен конечному автомату, но в отличие от последнего имеет рабочую память — *магазин*, в который записываются символы из ещё одного алфавита — *алфавита магазинных символов*. Каждое движение магазинного автомата определяется в зависимости от текущего *состояния управления, входного символа* или *независимо* от него — так называемые  *$\epsilon$ -движения* и от *верхнего символа магазина*.

Одно движение магазинного автомата состоит в замещении верхнего символа магазина некоторой магазинной цепочкой, в частности, пустой (стирание верхнего символа магазина), и переходе в новое состояние управления. При этом текущим входным символом становится следующий символ на входной ленте, если выполняется движение, зависящее от входного символа, либо текущий входной символ остаётся тем же самым, если выполняется  $\varepsilon$ -движение.

Поскольку движение зависит от верхнего символа магазина, то с самого начала в магазине находится один символ — *начальный символ магазина*.

Считается, что некоторая цепочка *принята*, если магазинный автомат из начального состояния управления, имея в магазине единственный — начальный символ магазина и прочитав данную цепочку на входе, переходит в одно из своих *конечных состояний* или *опустошает магазин*.

Каждый конкретный магазинный автомат использует только какой-нибудь один из этих двух признаков приёма входной цепочки.

Как и в случае конечных автоматов существуют две модели магазинных автоматов — *недетерминированная* и *детерминированная*.

В недетерминированной модели автомат каждый раз имеет возможность некоторого конечного выбора движений и совершает одно из них.

Входная цепочка считается принятой, если существует хотя бы одна последовательность выборов движений, которая приводит автомат к *конечной конфигурации* — входная цепочка прочитана, текущее состояние — конечное или (в другом варианте) магазин пуст. В противном случае она не принимается.

Множество всех цепочек, принимаемых данным магазинным автоматом, называется *языком, распознаваемым этим магазинным автоматом*.

В этой главе будет показано, что оба определения приёма эквивалентны в том смысле, что если язык распознаётся некоторым магазинным автоматом при пустом магазине, то он может быть распознан некоторым другим магазинным автоматом при конечном состоянии, и наоборот.

Кроме того, будет доказана основная теорема о том, что язык принимается недетерминированным МП-автоматом тогда и только тогда, когда он является КС-языком.

Известно, что класс языков, распознаваемых детерминированными МП-автоматами, является строгим подклассом языков, распознаваемых недетерминированными МП-автоматами.

Этим класс КС-языков отличается от класса регулярных языков, для которого недетерминированная и детерминированная модели распознавателей эквивалентны.

## § 5.2. Формальное определение

**Определение 5.1.** *Недетерминированный магазинный автомат* есть формальная система  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , где  $Q$  — конечное множество состояний;  $\Sigma$  — конечный входной алфавит;  $\Gamma$  — конечный магазинный алфавит;  $\delta$  — отображение типа  $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$ , представляющее конечное управление автомата;  $q_0 \in Q$  — начальное состояние;  $Z_0 \in \Gamma$  — начальный символ магазина;  $F \subseteq Q$  — множество конечных состояний.

Мы будем придерживаться следующей системы обозначений:

- строчные буквы из начала латинского алфавита — отдельные входные символы;
- строчные буквы из конца латинского алфавита служат для обозначения цепочек входных символов;
- строчные греческие буквы — цепочки магазинных символов;
- прописные латинские буквы — отдельные магазинные символы.

**Определение 5.2.** Для описания движений МП-автомата будем использовать понятие *конфигурации*, под которой будем подразумевать тройку  $(q, x, \alpha)$ , где  $q \in Q$  — *текущее состояние управления*;  $x \in \Sigma^*$  — *непросмотренная часть входной цепочки* (от текущего символа до её конца);  $\alpha \in \Gamma^*$  — *магазинная цепочка*, причём крайний левый её символ считается находящимся на вершине магазина.

*Начальная конфигурация* есть  $(q_0, x, Z_0)$ , где  $x$  — вся входная цепочка.

*Конечная конфигурация* определяется по-разному: в зависимости от того, какой признак приёма используется.

(а) Если приём определяется при *конечном состоянии*, то *конечная конфигурация* есть  $(q, \varepsilon, \alpha)$ , где  $q \in F$  — автомат достиг конечного состояния;  $\varepsilon$  означает, что вся входная цепочка прочитана;  $\alpha \in \Gamma^*$  — произвольная магазинная цепочка.

Достижение конечного состояния не означает завершения работы автомата, а сигнализирует лишь о том, что прочитанная к этому моменту часть входной цепочки принимается.

За время сканирования входной цепочки конечные состояния могут достигаться несколько раз.

(б) Если приём характеризуется *опустошением магазина*, то *конечная конфигурация* есть  $(q, \varepsilon, \varepsilon)$ , где  $q \in Q$  — любое состояние;  $\varepsilon$  во второй позиции означает, как и в предыдущем случае, что вся входная цепочка прочитана;  $\varepsilon$  в третьей позиции означает, что магазин пуст. При пустом магазине никакое дальнейшее движение не определено.

## Запись

$$\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \dots, (p_m, \gamma_m)\},$$

где  $q, p_i \in Q$ ,  $a \in \Sigma$ ,  $Z \in \Gamma$ ,  $\gamma_i \in \Gamma^*$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), означает, что магазинный автомат в состоянии  $q$  с символом  $a$  на входе и символом  $Z$  на вершине магазина может для любого  $i$  перейти в состояние  $p_i$ , заменить  $Z$  на  $\gamma_i$  и продвинуться на входе к следующей позиции.

Пусть текущая конфигурация имеет вид:  
 $(q, ax, Z\alpha)$ , где  $q \in Q$ ,  $a \in \Sigma$ ,  $x \in \Sigma^*$ ,  $Z \in \Gamma$ ,  
 $\alpha \in \Gamma^*$ .

В терминах конфигураций одно из  
возможных движений представляется  
следующим образом:  $\vdash$

$$(q, ax, Z\alpha) \quad (p_i, x, \gamma_i \alpha)$$

для любого  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

## Запись

$$\delta(q, \varepsilon, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \dots, (p_m, \gamma_m)\}$$

означает, что pda в состоянии  $q$  независимо от того, какой символ на входе, и с символом  $Z$  на вершине магазина может для любого  $i$  перейти в состояние  $p_i$ , заменить  $Z$  на  $\gamma_i$ , не изменяя текущей позиции на входе.

Пусть текущая конфигурация имеет вид  $(q, x, Z\alpha)$ , где  $q \in Q$ ,  $x \in \Sigma^*$ ,  $Z \in \Gamma$ ,  $\alpha \in \Gamma^*$ .

Тогда в терминах конфигураций одно из возможных движений в рассматриваемом случае представляется следующим образом:

$$(q, x, Z\alpha) \vdash (p_i, x, \gamma_i \alpha)$$

для любого  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

Если  $\gamma_i = \varepsilon$ , то происходит стирание  
верхнего символа магазина — вершина  
магазина опускается;  
если  $|\gamma_i| = 1$ , то происходит замена  
верхнего символа магазина;  
если  $|\gamma_i| > 1$ , то вершина магазина  
поднимается.

Таким образом, мы ввели на множестве конфигураций pda отношение непосредственного следования одной конфигурации за другой, используя для него символ  $\vdash$

Степень  $\vdash^n$ , транзитивное замыкание  $\vdash^+$  и рефлексивно-транзитивное замыкание  $\vdash^*$  этого отношения определяются обычным образом.

При необходимости явно показать, движения какого pda рассматриваются, под соответствующими значками указывается имя автомата, например:  $\frac{}{M}$ ,  $\frac{n}{M}$ ,  $\frac{+}{M}$  или  $\frac{*}{M}$ .

**Определение 5.3.** *Язык, распознаваемый магазинным автоматом*

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

*при конечном состоянии, определим как*  
**МНОЖЕСТВО**

$$T(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \stackrel{*}{\vdash}_M (q, \varepsilon, \alpha), q \in F\}.$$

**Определение 5.4.** *Язык, распознаваемый магазинным автоматом*

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

*при пустом магазине, определим как*  
**МНОЖЕСТВО**

$$N(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \stackrel{*}{\underset{M}{\mid}} (q, \varepsilon, \varepsilon), q \in Q\}.$$

В этом случае неважно, каким является множество конечных состояний, и часто оно просто считается пустым.

**Пример 5.1.** Пусть pda

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ , где

- 1)  $\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ ,
- 2)  $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$ ,
- 3)  $\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB), (q_2, \varepsilon)\}$ ,
- 4)  $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$ ,
- 5)  $\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$ ,
- 6)  $\delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG), (q_2, \varepsilon)\}$ ,
- 7)  $\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ ,
- 8)  $\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ ,
- 9)  $\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ ,
- 10)  $\delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ .

Пример 5.1. pda  $M : N(M) = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

---

$M$  — недетерминированный магазинный автомат, распознающий язык

$$N(M) = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\},$$

где  $w^R$  обозначает инвертированную цепочку  $w$ , при пустом магазине.

Правила 1 – 6 позволяют pda  $M$  запомнить входной символ в магазинной памяти. При этом входной символ 0 отображается в магазине посредством символа  $B$ , а символ 1 отображается в магазине посредством символа  $G$ .

Пример 5.1. pda  $M : N(M) = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

---

При этом правила 3 и 6 предоставляют автомату выбор движений между запоминанием очередного входного символа в магазине (в предположении, что середина входной цепочки не достигнута) и переходом в режим сопоставления текущего входного символа с символом на вершине магазина и стиранием последнего в случае их соответствия (в предположении, что достигнута середина входной цепочки).

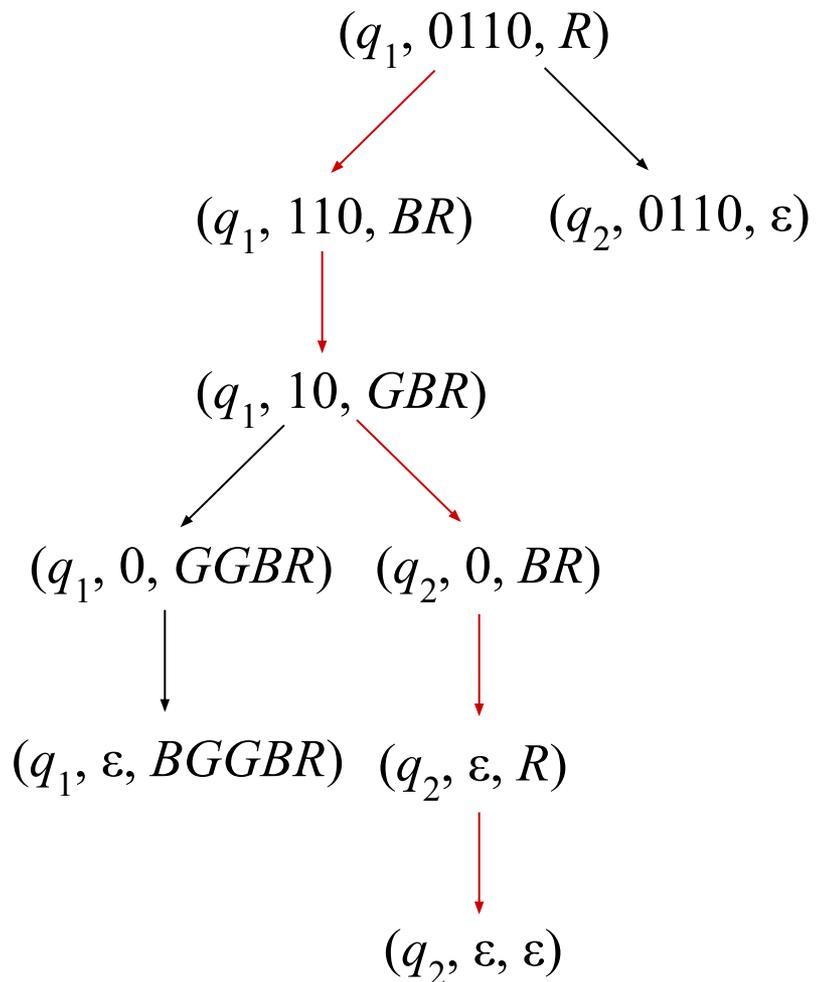
Пример 5.1. pda  $M : N(M) = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

---

Если на входе находится цепочка вида  $ww^R$ , то существует такая последовательность движений, которая опустошает магазин к моменту достижения конца цепочки.

Например, если на вход поступает цепочка 0110, то автомат имеет выбор движений, представленный на рис. 5.1, где приведено дерево возможных переходов между конфигурациями.

Пример 5.1. pda  $M : N(M) = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$



Существующая среди них следующая последовательность движений:

$(q_1, 0110, R)$	
$(\underline{\quad}, 110, BR)$	
$(\underline{\quad}, 10, GBR)$	
$(\underline{\quad}, 0, BR)$	
$(\underline{\quad}, \varepsilon, R)$	
$(\underline{\quad}, \varepsilon, \varepsilon)$	

дает основание заключить, что входная цепочка 0110 принимается.

Рис. 5.1.

Пример 5.2. pda  $M : N(M) = \{w c w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

---

**Пример 5.2.** Пусть pda

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ , где

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ , | 7) $\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\}$ ,                      |
| 2) $\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ , | 8) $\delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$ ,                      |
| 3) $\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$ , | 9) $\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\}$ ,                      |
| 4) $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$ , | 10) $\delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ , |
| 5) $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$ , | 11) $\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ ,           |
| 6) $\delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$ , | 12) $\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ .           |

Пример 5.2. pda  $M : N(M) = \{w c w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

---

Легко сообразить, что

$$N(M) = \{w c w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\},$$

где  $w^R$  обозначает инвертированную цепочку  $w$ .

Рассмотрим движения pda  $M$  при наличии цепочки  $01c10$  на его входе:

$$\begin{aligned} (q_1, 01c10, R) & \quad \vdash_{-1}, 1c10, BR) & \quad \vdash \\ (\vdash_{-1}, c10, GBR) & \quad \vdash_{-2}, 10, GBR) & \quad \vdash \\ (\vdash_{-2}, 0, BR) & \quad (\vdash_{-2}, \varepsilon, R) & \quad (\vdash_{-2}, \varepsilon, \varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно, цепочка  $01c10$  принимается при пустом магазине.

Заметим, что равенство

$$\delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

означает движение, не зависящее от входного символа, каким бы он ни был. В любом случае происходит стирание верхнего символа  $R$  магазина без продвижения по входной цепочке и переход в состояние  $q_2$ .

Магазинный автомат из примера 5.2 является детерминированным в том смысле, что из любой конфигурации возможно не более одного движения.

**Определение 5.5.** Магазинный автомат

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

является *детерминированным*, если

1) для любых  $q \in Q$ ,  $Z \in \Gamma$  и  $a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$  значение  $\#\delta(q, a, Z) \leq 1$ ;

2) для любых  $q \in Q$  и  $Z \in \Gamma$  всякий раз, как множество  $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset$ , множество  $\delta(q, a, Z) = \emptyset$  для всех  $a \in \Sigma$ .

Условие 1 означает, что если движение определено, то оно единственно.

Условие 2 предотвращает выбор между  $\epsilon$ -движением и движением, использующим входной символ.

Для конечных автоматов детерминированная и недетерминированная модели эквивалентны по отношению к распознаваемым языкам (см. теорему [3.4](#)).

Для МП-автоматов это не так.

Действительно, язык, состоящий из цепочек вида  $ww^R$ , принимается недетерминированным рда, но не существует никакого детерминированного рда, который принимал бы такой язык.