Эйлеровы круги (круги Эйлера).

Задачи урока

Образовательная: дать обучающимся представление о методе кругов Эйлера;

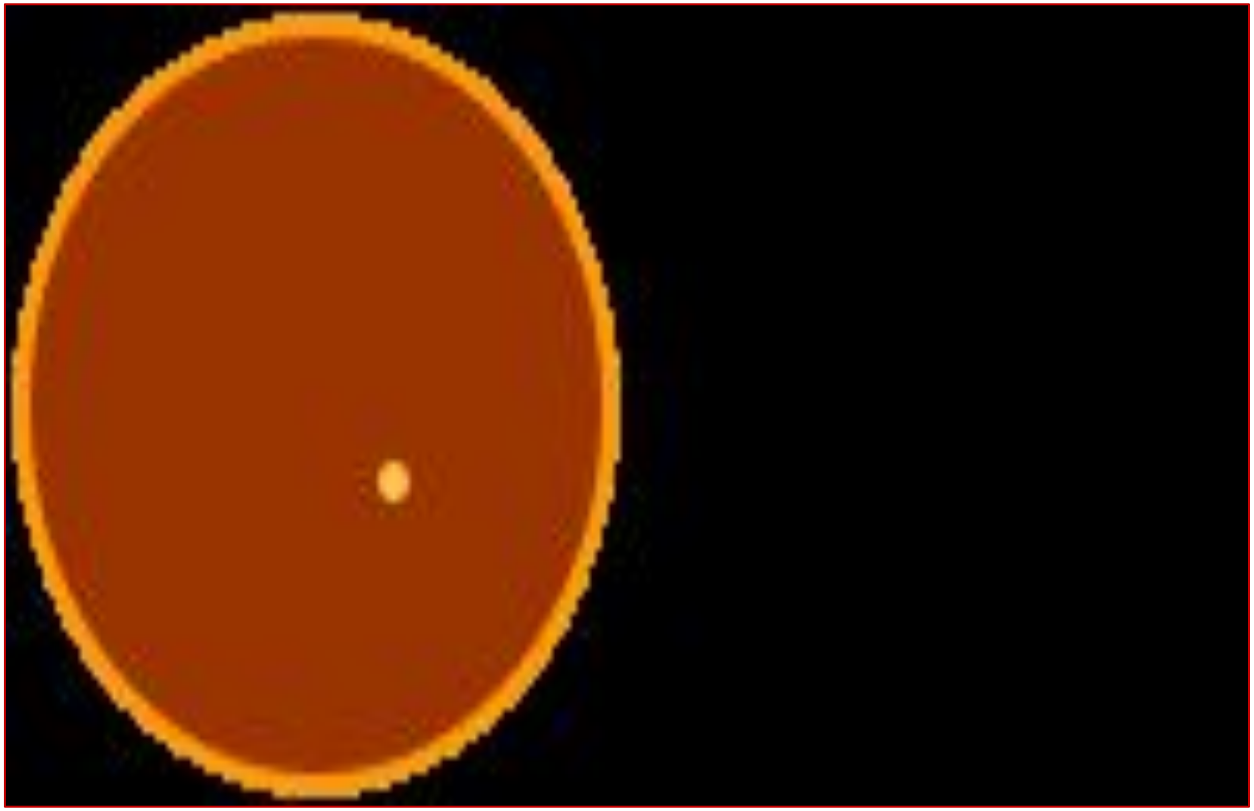
Развивающая: развитие логического и аналитического мышления;

Воспитательная: воспитание умения выслушивать мнение других обучающихся и отстаивать свою точку зрения.

Эйлеровы круги (круги Эйлера) — принятый в логике способ моделирования, наглядного изображения отношений между объемами понятий с помощью кругов, предложенный знаменитым математиком Л. Эйлером (1707–1783).

Обозначение отношений между объемами понятий посредством кругов было применено еще представителем афинской неоплатоновской школы — Филопоном (VI в.), написавшим комментарии на «Первую Аналитику» Аристотеля.

1.Условно принято, что круг наглядно изображает объем одного какого-нибудь понятия. Объем же понятия отображает совокупность предметов того или иного класса предметов. Поэтому каждый предмет класса предметов можно изобразить посредством точки, помещенной внутри круга:



2.*Группа предметов, составляющая вид данного класса предметов, изображается в виде меньшего круга, нарисованного внутри большего круга.*

Такое именно отношение существует между объемами понятий «небесное тело» (А) и «комета» (В). Объему понятия «небесное тело» соответствует больший круг, а объему понятия «комета» — меньший круг. Это означает, что все кометы являются небесными телами. Весь объем понятия «комета» входит в объем понятия «небесное тело».

3.Когда же ни один предмет, отображенный в объеме понятия А, не может одновременно отображаться в объеме понятия В, то в таком случае отношение между объемами понятий изображается посредством двух кругов, нарисованных один вне другого. Ни одна точка, лежащая на поверхности одного круга, не может оказаться на поверхности другого круга.

Такое именно отношение существует, например, между понятиями «тупоугольный треугольник» и «остроугольный треугольник». В объеме понятия «тупоугольный треугольник» не отображается ни один остроугольный треугольник, а в объеме понятия «остроугольный треугольник» не отображается ни один тупоугольный треугольник.

4.*Иначе выглядит схема отношения между объемами субъекта и предиката в общеутвердительном суждении, не являющемся определением понятия. В таком суждении объем предиката больше объема субъекта, объем субъекта целиком входит в объем предиката. Поэтому отношение между ними изображается посредством большого и малого кругов, как показано на рисунке:*

5.Отношения между равнозначащими понятиями, объемы которых совпадают, отображаются наглядно посредством одного круга, на поверхности которого написаны две буквы, обозначающие два понятия, имеющие один и тот же объем:

Такое отношение существует, например, между понятиями «родоначальник английского материализма» и «автор „Нового Органона“». Объемы этих понятий одинаковы, в них отобразилось одно и то же историческое лицо — английский философ Ф. Бэкон.

6. Нередко бывает и так: одному понятию (родовому) подчиняется сразу несколько видовых понятий, которые в таком случае называются соподчиненными. Отношение между такими понятиями изображается наглядно посредством одного большого круга и нескольких кругов меньшего размера, которые нарисованы на поверхности большего круга:

Такое именно отношение существует между понятиями «скрипка», «флейта», «пианино», «рояль», «барабан». Эти понятия в равной мере подчинены одному общему родовому понятию «музыкальные инструменты».

7.В тех случаях, когда между понятиями имеется отношение противоположности, отношение между объемами таких понятий отображается посредством одного круга, обозначающего общее для обоих противоположных понятий родовое понятие, а отношение между противоположными понятиями обозначается так: А — родовое понятие, В и С — противоположные понятия. Противоположные понятия исключают друг друга, но входят в один и тот же род, что можно выразить такой схемой:

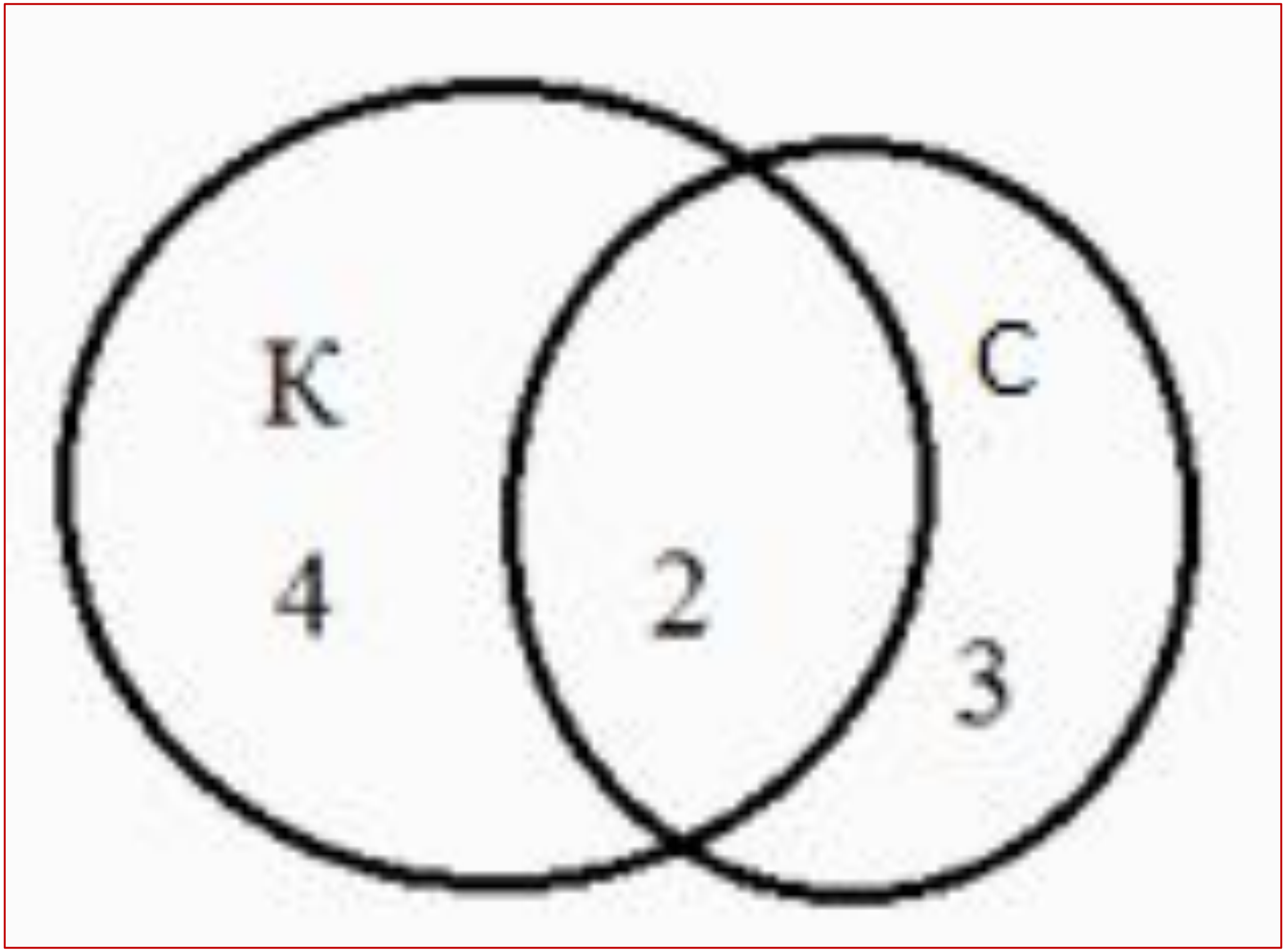
При этом видно, что между противоположными понятиями возможно третье, среднее, так как они не исчерпывают полностью объема родового понятия. Такое именно отношение существует между понятиями «легкий» и «тяжелый». Они исключают друг друга. Нельзя об одном и том же предмете, взятом в одно и то же время и в одном и том же отношении, сказать, что он и легкий, и тяжелый. Но между данными понятиями есть среднее, третье: предметы бывают не только легкого и тяжелого веса, но также и среднего веса.

*8.Когда же между понятиями существует противоречащее отношение, тогда отношение между объемами понятий изображается иначе: круг делится на две части так: А — родовое понятие, В и не-В (обозначается как В) — противоречащие понятия. Противоречащие понятия, исключают друг друга и входят в один и тот же род, что можно выразить такой схем*ой:

При этом видно, что между противоречащими понятиями третье, среднее, невозможно, так как они полностью исчерпывают объем родового понятия. Такое отношение существует, например, между понятиями «белый» и «небелый». Они исключают друг друга. Нельзя об одном и том же предмете, взятом в одно и то же время и в одном и том же отношении, сказать, что он и белый и небелый.

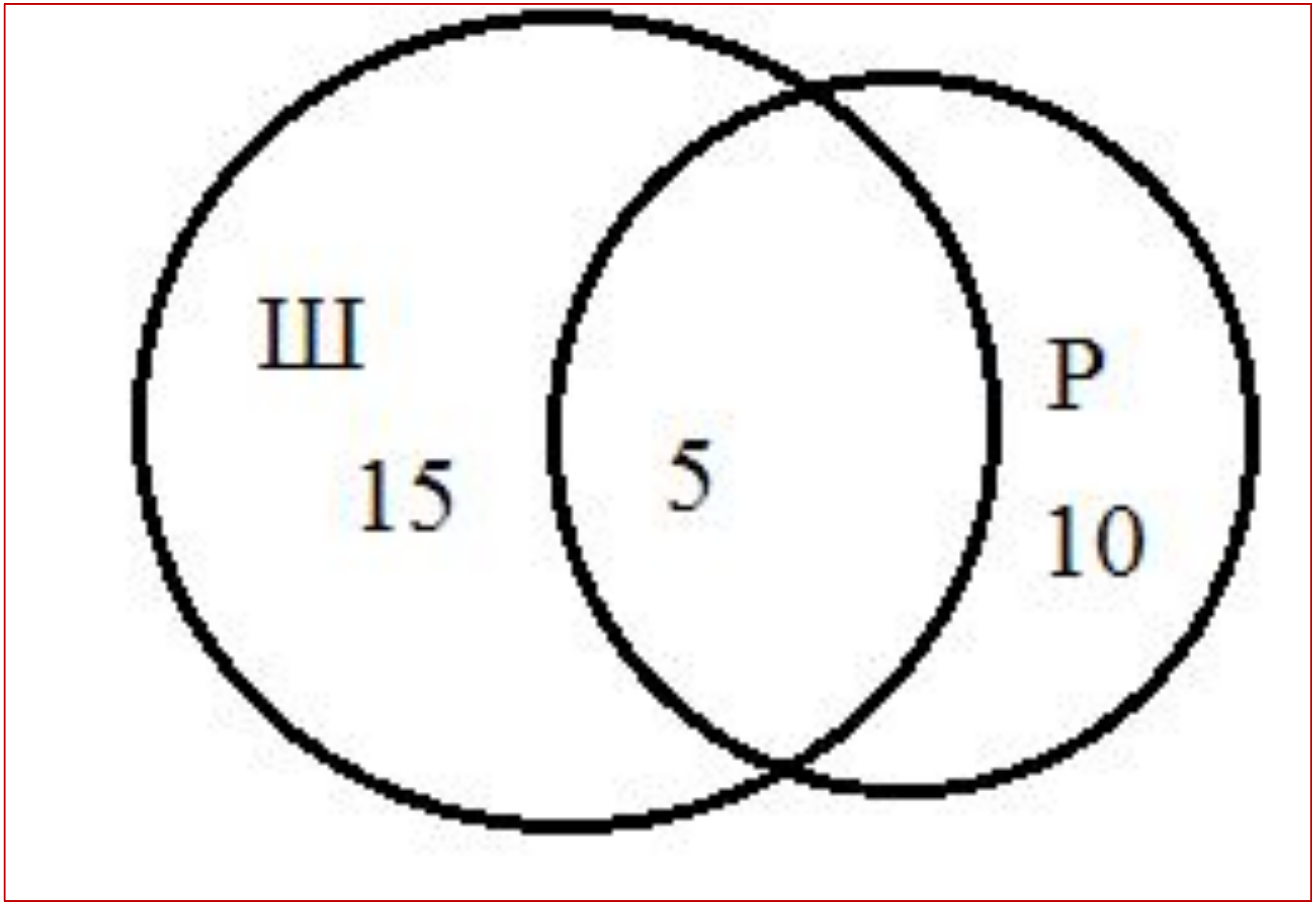
9.Посредством Эйлеровых кругов изображаются также отношения между объемами субъекта и предиката в суждениях. Так, в общеутвердительном суждении, выражающем определение какого-либо понятия, объемы субъекта и предиката, как известно, равны. Наглядно такое отношение между объемами субъекта и предиката изображается посредством одного круга, подобно изображению отношений между объемами равнозначащих понятий. Разница только в том, что в данном случае всегда на поверхности круга надписываются две определенные буквы: S (субъект) и P (предикат), как это показано на рисунке:

Задача 1. Домашние любимцы. *У всех моих подруг есть домашние питомцы. Шестеро из них любят и держат кошек, а пятеро - собак. И только у двоих есть и те и другте. Угадайте, сколько у меня подруг?*
Решение: Изобразим два круга, так как у нас два вида питомцев. В одном будем фиксировать владелиц кошек, в другом - собак. Поскольку у некоторых подруг есть и те, и другие животные, то круги нарисуем так, чтобы у них была общая часть. В этой общей части ставим цифру 2 так как кошки и собаки есть у двоих. В оставшейся части "кошачьего" круга ставим цифру 4 (6 - 2 = 4). В свободной части "собачьего" круга ставим цифру 3 (5 - 2 = 3). А теперь рисунок сам подсказывает, что всего у меня 4 + 2 + 3 = 9 подруг.



Ответ. 9 подруг.

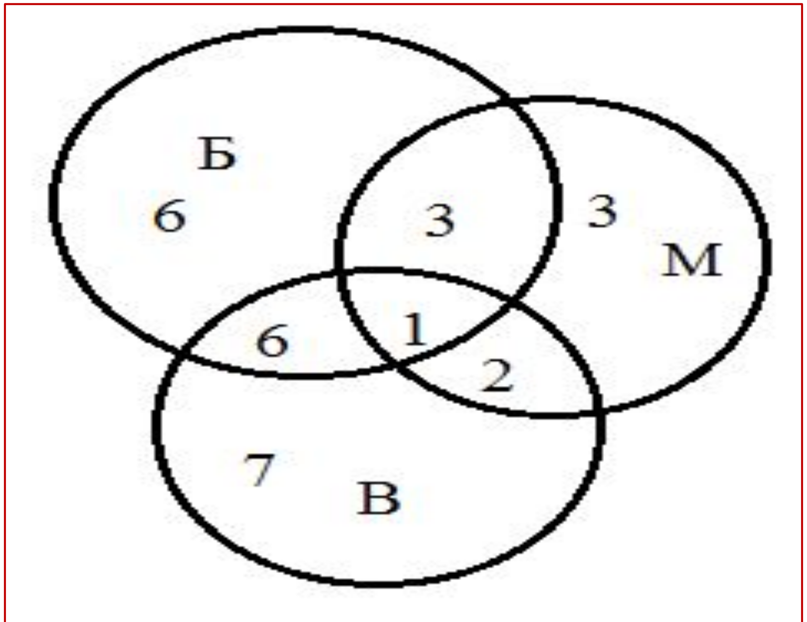
Задача 2. Библиотеки. *В классе 30 учеников. Все они являются читателями школьной и районной библиотек. Из них 20 ребят берут книги в школьной библиотеке, 15 - в районной. Сколько учеников не являются читателями школьной библиотеки?*
Решение: Пусть круг Ш изображает читателей только школьной библиотеки, круг Р - только районной. Тогда ШР - изображение читателей и районной, и школьной библиотек одновременно. Из рисунка следует, что число учеников, не являющихся читателями школьной библиотеки, равно:
(не Ш) = Р - ШР. Всего 30 учеников, Ш = 20 человек, Р = 15 человек. Тогда значение ШР может быть найдено так (см. рисунок):
ШР = (Ш + Р) - 30 = (20 + 15) - 30 = = 5, т.е. 5 учеников являются читателями школьной и районной библиотек одновременно. Тогда (не Ш) = = Р - ШР= 15 - 5= 10.



Ответ: 10 учеников не являются читателями школьной библиотеки.

Задача 3. Любимые мультфильмы. *Среди школьников пятого класса проводилось анкетирование по любимым мультфильмам. Самыми популярными оказались три мультфильма: "Белоснежка и семь гномов", "Винни Пух", "Микки Маус". Всего в классе 28 человек. "Белоснежку и семь гномов" выбрали 16 учеников, среди которых трое назвали еще "Микки Маус", шестеро - "Винни Пух", а один написал все три мультфильма. Мультфильм "Микки Маус" назвали 9 ребят, среди которых пятеро выбрали по два мультфильма. Сколько человек выбрали мультфильм "Винни Пух"?*

Решение: В этой задаче 3 множества, из условий задачи видно, что все они пересекаются между собой. Только "Белоснежку" выбрали 16-6-3-1=6 человек. Только "Микки-Маус" выбрали 9-3-2-1=3 человека.
Только "Винни-Пух" выбрали 28-(6+3+3+2+6+1)=7 человек. Тогда, учитывая, что некоторые выбрали по несколько мультфильмов, получаем, что "Винни-Пух" выбрали 7+6+1+2=16 человек.



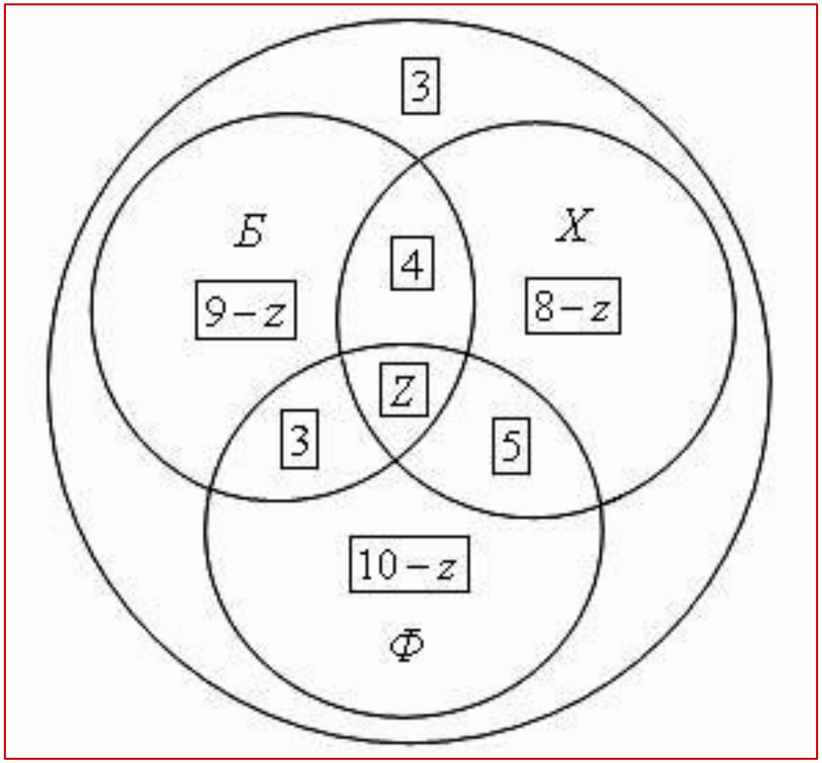
Задача 7. Спорт для всех. *В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 - в хоккей, 18 - в футбол. Увлекаются двумя видами спорта - баскетболом и хоккеем - четверо, баскетболом и футболом - трое, футболом и хоккеем - пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни футболом. Сколько ребят увлекаются одновременно тремя видами спорта? Сколько ребят увлекается лишь одним из этих видов спорта?*

Решение. Воспользуемся кругами Эйлера.

Пусть большой круг изображает всех учащихся класса, а три меньших круга Б, Х и Ф изображают соответственно баскетболистов, хоккеистов и футболистов. Тогда фигура Z, общая часть кругов Б, Х и Ф, изображает ребят, увлекающихся тремя видами спорта. Из рассмотрения кругов Эйлера видно, что одним лишь видом спорта - баскетболом занимаются $16 - (4 + z + 3) = 9 - z$; одним лишь хоккеем $17 - (4 + z + 5) = 8 - z$; одним лишь футболом

18 - (3 + z + 5) = 10 - z. Составляем уравнение, пользуясь тем, что класс разбился на отдельные группы ребят; количества ребят в каждой группе обведены на рисунке рамочкам: 3 + (9 - z) + (8 - z) + (10 - z) + 4 + 3 + 5 + z = 38,z = 2. Таким образом, двое ребят увлекаются всеми тремя видами спорта. Складывая числа 9 - z, 8 - z и 10 - z, где z = 2, найдем количество ребят, увлекающихся лишь одним видом спорта: 21 человек.

Ответ: Двое ребят увлекаются всеми тремя видами спорта человека. Увлекающихся лишь одним видом спорта: 21 человек.



Домашнее задание

Задача «Спортивный класс». В классе 30 учеников. 24 из них играют в футбол, 18 - в волейбол, 12 - в баскетбол. 10 учеников одновременно играют в футбол и волейбол, 8 - в футбол и баскетбол, а 5 - в волейбол и баскетбол. Сколько учеников играют и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол одновременно?