Дискретная случайная величина, закон ее распределения

Числовые характеристики дискретной случайной величины

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

- Величину, которая в результате опыта принимает только одно, зависящее от случая, числовое значение, назовем **случайной величиной.**
- *Случайные величины обозначаются большими латинскими буквами (**X, Y, Z**), а их возможные числовые значения – маленькими латинскими буквами (**x, y, z**).*
- *ПРИМЕРЫ:*
- *Число выпадения герба при подбрасывании монеты*
- *Число выпавших гербов при подбрасывании двух монет*
- *Количество очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости*
- *Число родившихся мальчиков (или девочек) среди ста новорожденных.*
- *Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия.*
- *Ошибка измерителя высоты.*
- *Температура воздуха на следующий день.*

Дискретная случайная величина

- Случайная величина называется **дискретной**, если в результате опыта она принимает числовые значения, которые можно <u>перечислить</u> или поставить им в соответствие элементы <u>счётного</u> множества
- Таким образом, дискретная случайная величина может быть как конечной, так и бесконечной.
- Для описания дискретной случайной величины (**ДСВ**) просто перечислить её значения недостаточно. Необходимо для каждого значения найти соответствующую вероятность.
- Вероятность того, что случайная величина **Х** примет то или иное значение **а** обозначают $P(X=a)$.

Какие из данных случайных величин будут дискретными?

- *Число выпадения герба при подбрасывании монеты*
- *Число выпавших гербов при подбрасывании двух монет*
- *Количество очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости*
- *Число родившихся мальчиков (или девочек) среди ста новорожденных.*
- *Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия.*
- *Ошибка измерителя высоты.*
- *Температура воздуха на следующий день.*

Рассмотрим ДСВ на примере

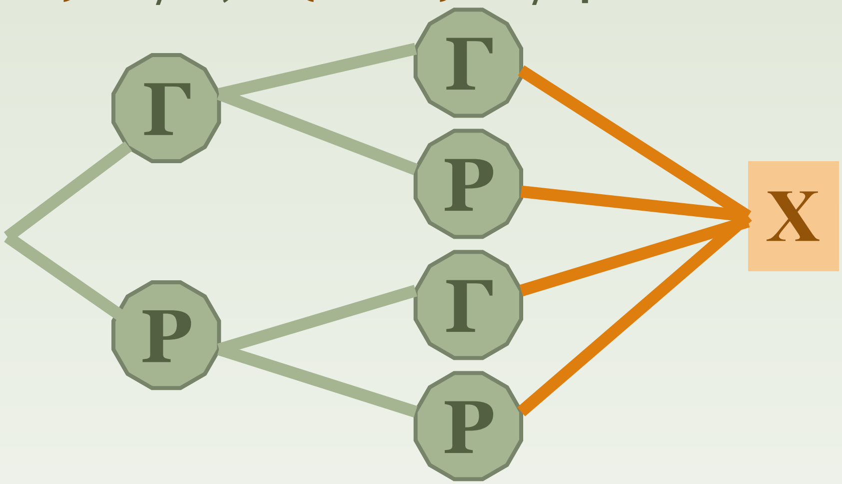
ДСВ X: число выпавших гербов при подбрасывании двух монет

Значения, которые принимает ДСВ X:

$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$.

Вероятности того, что ДСВ X примет то или иное значение (рассмотрим на графе**):**

$P(X=0)=1/4$, $P(X=1)=1/2$, $P(X=2)=1/4$.



Закон распределения ДСВ

Соответствие между возможными значениями случайной величины и ее вероятностями называют **законом распределения** случайной величины и записывают в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

где в верхней строчке написаны значения случайной величины, а в нижней – под каждым x_i – вероятности p_i. Заметим, что события x_1, x_2,… x_n образуют полную систему событий, поэтому сумма вероятностей в нижней строке всегда равна 1.

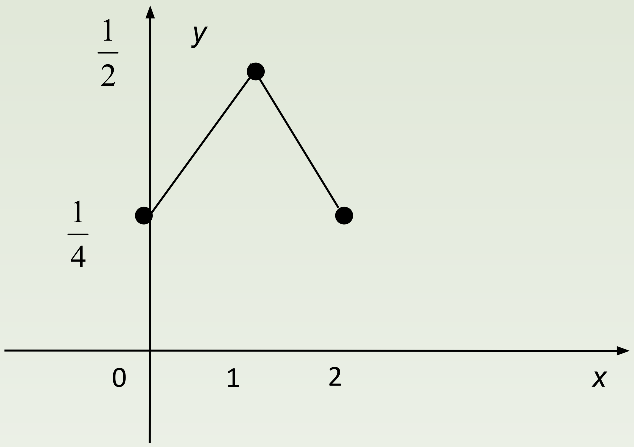
Для нашего примера:

X	*0*	*1*	*2*
P	1/4	1/2	1/4

Многоугольник распределения

- Графическим изображением закона распределения ДСВ является **многоугольник распределения** - множество точек с координатами $(x_1; p_1)$, $(x_2; p_2)$… $(x_n; p_n)$…, последовательно соединенных отрезками.

Для нашего примера:



Задача 1.

- В стопке лежат 10 тетрадей с одинаковой обложкой, 4 из которых в линейку, остальные – в клетку. Саша наугад вынимает 2 тетради. Составьте закон распределения числа выбранных тетрадей в клетку

(*используйте граф для нахождения вероятностей*) и постройте многоугольник распределения.

Числовые характеристики ДСВ:

- **Математическое ожидание.**
- **Дисперсия.**
- **Среднеквадратическое отклонение.**

Математическое ожидание

- **Математическим ожиданием M(X)** называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины (x_i) на соответствующие вероятности (p_i):
- $$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$$
- *Математическое ожидание – это число, которое указывает, какое **среднее значение** случайной величины следует ожидать в результате проведения опыта или испытания.*

Свойства математического ожидания

- $\underline{M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n}$

- **1).** $M(C) = C$, где C – *const;*
- **2).** $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;
- **3).** $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$;
- **4).** $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$,

  где X и Y - независимые случайные величины.

Задание:

- Закон распределения случайной величины **X** задан таблицей:

X	-5	0	2	6
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдите математическое ожидание случайной величины **X**.

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$$

Дисперсия

- **Дисперсией** случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонений от среднего значения: $$D(X) = M[(X-\overline{x})^2] = \sum_i (x_i - \overline{x})^2 p_i.$$
- ***Для вычисления:***
- $$D(X) = M(X^2) - M^2(X),$$
- где $M(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \ldots + x_n^2 \cdot p_n$
- Дисперсия характеризует **степень отклонения** значений случайной величины от ее среднего значения. На практике дисперсия служит для **оценки меры риска**.
- *(Дисперсия всегда положительное число)*

Свойства дисперсии

- $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$,
- где $M(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \ldots + x_n^2 \cdot p_n$

- **1).** $D(C) = 0$, где C – $const$;
- **2).** $D(CX) = CD(X)$;
- **3).** $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, если X, Y – независимые случайные величины.

Среднеквадратическое отклонение

- *Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины: если ДСВ имеет размерность метры, то дисперсия измеряется в м². Для того, чтобы оценка рассеяния значений случайной величины имела размерность самой величины, вычисляют среднеквадратичное отклонение.*
-
- Положительное значение квадратного корня из дисперсии называют **среднеквадратическим отклонением** (или стандартным отклонением): $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Задание:

- Закон распределения случайной величины **X** задан таблицей:

X	-5	0	2	6
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдите *среднеквадратичное отклонение* случайной величины **X**.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Домашнее задание:

- В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули
- **а).** 2 шара, **б).** 3 шара.

Случайная величина –число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.