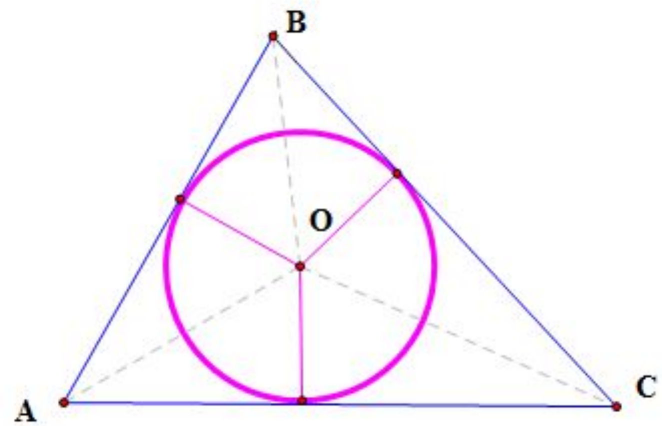
Вписанная окружность.

Если на слайдах
что-то осталось неясным
посмотрите пункт 77 учебника
(стр.178)

Теорема

В любой треугольник можно вписать окружность.

Центр окружности, вписанной в треугольник находится на равном расстоянии
от сторон треугольника.
Значит центр окружности, вписанной в треугольник, – точка пересечения
биссектрис углов т

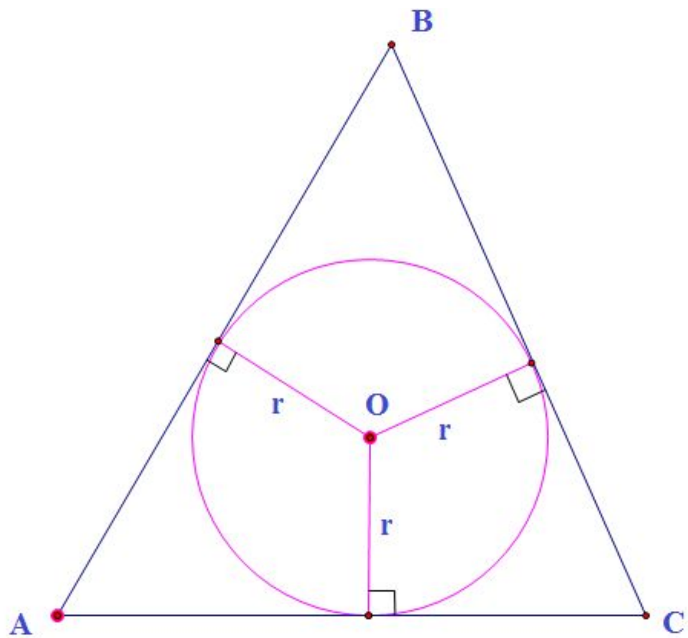


Можно найти площадь треугольника через радиус вписанной окружности.

Запоминаем: *площадь треугольника равна произведению половины периметра треугольника на радиус вписанной окружности.*

$$S_\Delta = \frac{1}{2}P \cdot r,$$

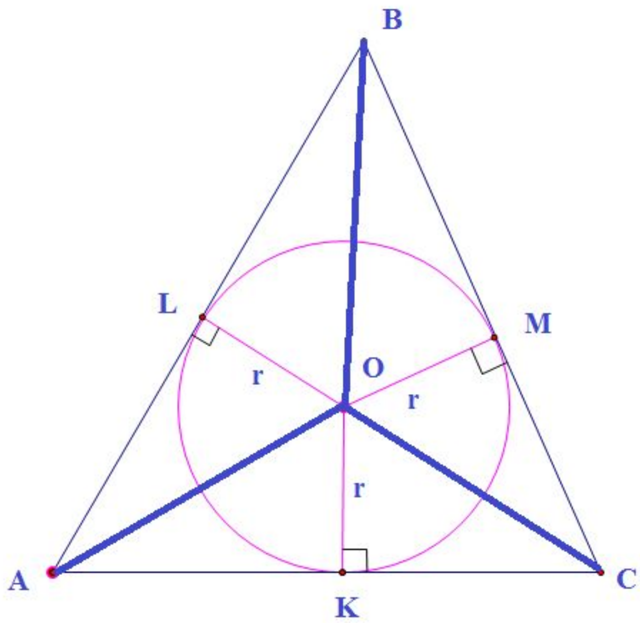
где $\frac{1}{2}P$ - это половина периметра треугольника, а r - радиус вписанной окружности.



Эта формула становится понятной через вывод, а он очень простой.

$$S_\Delta = \frac{1}{2} P \cdot r,$$

где $\frac{1}{2} P$ - это половина периметра треугольника, а r - радиус вписанной окружности.



Проведём отрезки АО, ВО, СО, которые разделят треугольник АВС на три треугольника: АОС, ВОС и АОВ. Площадь всего треугольника равна сумме площадей маленьких треугольников.

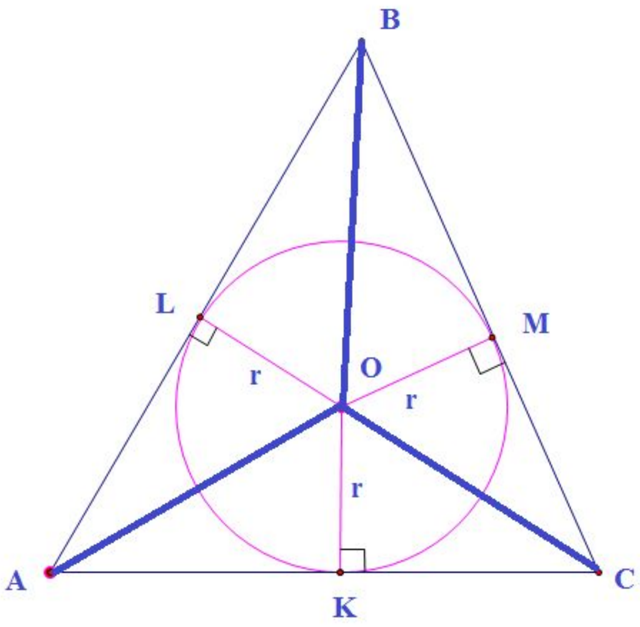
$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC}$$

Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

А высоты в маленьких треугольниках – это радиус окружности, вписанной в треугольник .(Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания).

$$S\Delta = \frac{1}{2} P \cdot r,$$

где $\frac{1}{2} P$ - это половина периметра треугольника, а r - радиус вписанной окружности.



$$S\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OL + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OM + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OK$$

$$S\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot r + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot r$$

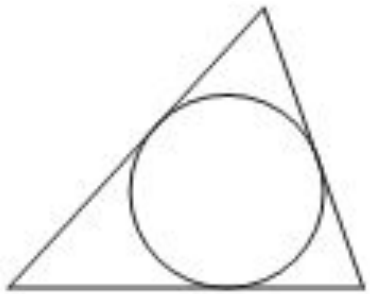
$$S\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (\underline{AB + BC + AC})$$

$$S\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot r \cdot P\Delta$$

$$S = \frac{1}{2} P \cdot r$$

Запоминаем: *площадь треугольника равна произведению половины периметра треугольника на радиус вписанной окружности.*

Задача
1.



Периметр треугольника равен 48, одна из сторон равна 18, а радиус вписанной в него окружности равен 3. Найдите площадь этого треугольника.

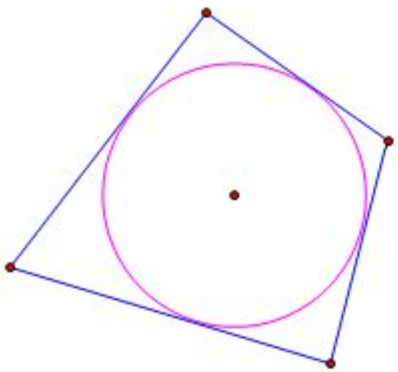
Воспользуйтесь формулой для вычисления площади треугольника,
через радиус вписанной окружности.

$$S\Delta = \frac{1}{2} P \cdot r,$$

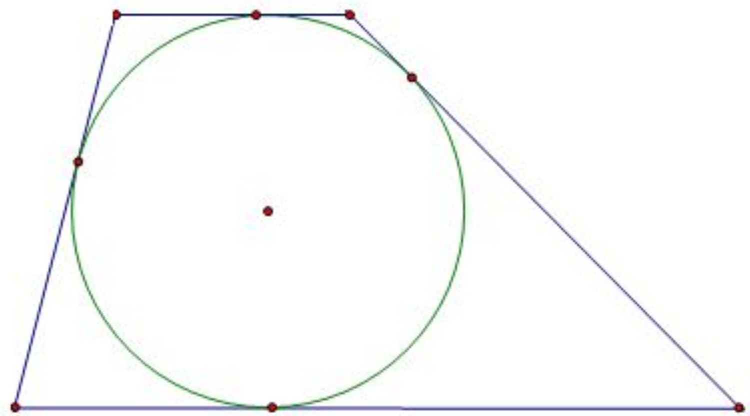
$$S = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 3 = 24 \cdot 3 = 72$$

Ответ:
72

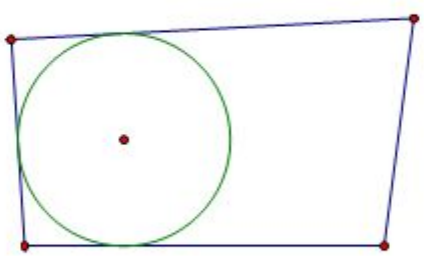
Окружность, вписанная в четырёхугольник.



Если стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется ***вписанной в многоугольник****, а многоугольник –* ***описанным около этой окружности****.*

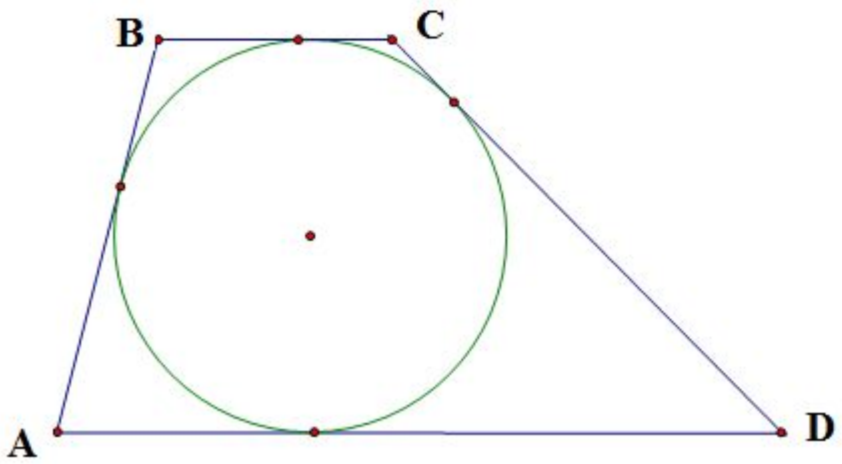


Не во всякий четырёхугольник можно вписать окружность.



Свойства четырёхугольника, описанного около окружности.

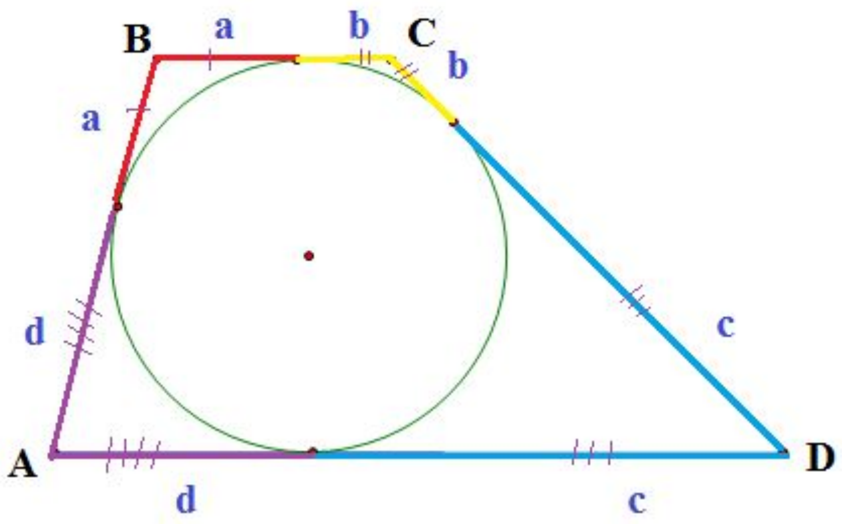
В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.



AB + CD = BC +AD

Запомнить это свойство легко через доказательство.

Вспоминаем свойство отрезков касательных, проведённых из одной точки: *отрезки касательных, проведённых из одной точки, равны.*



Из точки A проведены две касательные к окружности, отрезки касательных равны (отрезки фиолетового цвета).
Из точки B проведены две касательные к окружности, отрезки касательных равны (отрезки красного цвета).
Из точки C проведены две касательные к окружности, отрезки касательных равны (отрезки жёлтого цвета).
Из точки D проведены две касательные к окружности, отрезки касательных равны (отрезки голубого цвета).

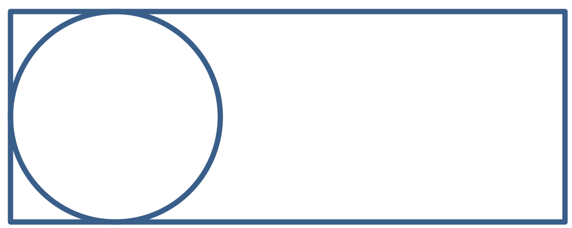
AB + CD = a + d + c + b
BC + AD = a + b + c + d

В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

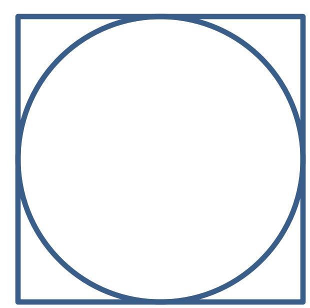
Оказывается, верно и обратное утверждение:

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность

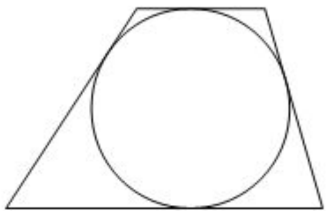
Например, в прямоугольнике суммы противоположных сторон не равны. Значит в него нельзя вписать окружность.



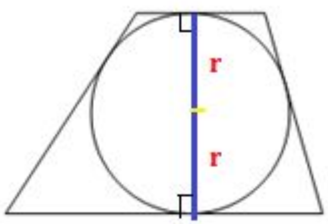
А в квадрате - *суммы противоположных сторон равны. Значит в него можно вписать окружность.*



Задача
2.



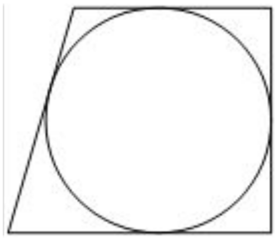
Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 20.
Найдите высоту этой трапеции.



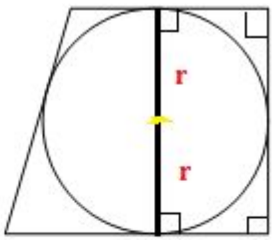
Из центра окружности проведём радиусы к основаниям трапеции в точки касания с окружностью.
Видим, что высота трапеции состоит из двух радиусов.
$h = 2 \cdot r$; $h = 2 \cdot 20 = 40$.

Ответ: 40

Задача 3.



Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 10. Найдите высоту этой трапеции.



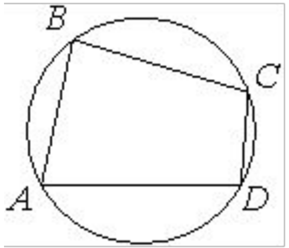
Два радиуса, проведённые к основаниям трапеции, равны высоте.

Но трапеция прямоугольная, значит высота равна боковой стороне, перпендикулярной к основаниям.

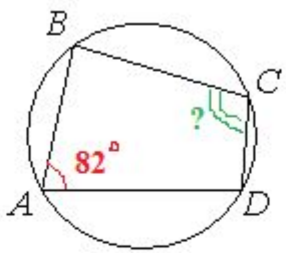
h = 2 · 10 = 20

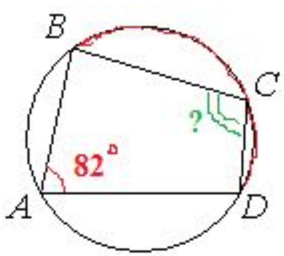
Ответ: 20

Задача 4.



Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного
в окружность, равен 82°. Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

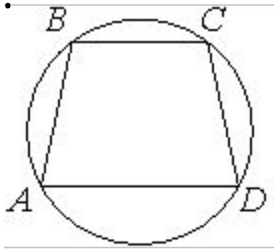




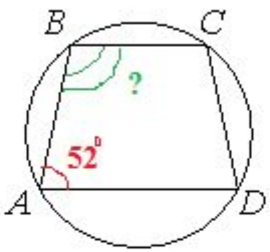
Угол А – вписанный в окружность и равен половине дуги, на которую опирается.
Значит градусная мера дуги ВСD равна 82° · 2 ° =164°.
Угол С – тоже вписан в окружность и равен половине дуги, на которую опирается.
Значит угол С равен половине дуги ВАD, которая равна 360 ° – 164 ° =196 °
Угол С равен 196 ° : 2 = 98 °

Ответ: 98

Задача 5.



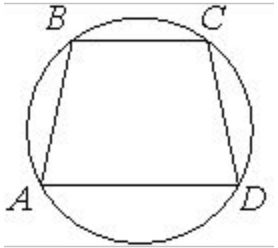
Угол A трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 52°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



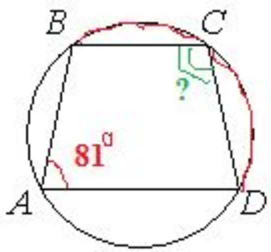
Вспомним односторонние углы при параллельных прямых,
и не будем колдовать с вписанными углами.
Угол А и угол В – односторонние при параллельных AD и BC
и секущей AB. Их сумма 180°.
Угол В равен 180° - 52 ° = 128°

Ответ: 128

Задача 6.

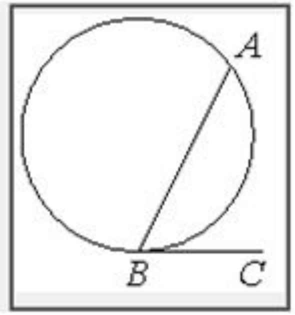


Угол A трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 81°. Найдите угол C этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

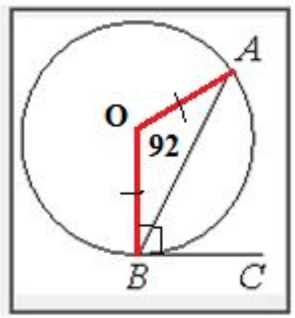


Такую задачу уже решили с четырёхугольником (задача 4).
Дуга BCD = 81° · 2 = 162 °
Дуга BAD = 360 ° – 162 ° = 198 °
Угол C = 198 ° : 2 = 99 °.

Ответ:
99



На окружности отмечены точки A и B так, что меньшая дуга AB равна 92°. Прямая BC касается окружности
в точке B так, что угол ABC острый. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Градусная мера дуги равна градусной мере соответствующего центрального угла. Значит угол АОВ = 92°.
Есть касательная ВС к окружности, значит есть прямой угол между прямой ВС и радиусом, проведённым в точку касания – точку В.
Чтобы найти угол АВС надо из 90° вычесть угол АВО, а это угол при основании равнобедренного треугольника АОВ.
Угол АВО = (180 ° – 92 °) : 2 = 44°
Угол АВС = 90 ° - 44 ° = 46 °

Ответ:
46