Тайны степени

Авторы: *Янькова Екатерина,*
Леонова Анастасия, ученицы 7 «А» класса
Руководители: Степанова Ольга Николаевна
Овчаренко Ирина Владимировна

МБОУ «СОШ №18 им. братьев Могилевцевых» г. Брянска

2017 год

Кроха сын к отцу пришел

И спросила кроха:

Степень это хорошо

Или это плохо?

Дорогой друг!

Сегодня мы приоткроем тебе не одну тайну.

Ты узнаешь что такое степень, где применяется, когда она появилась.

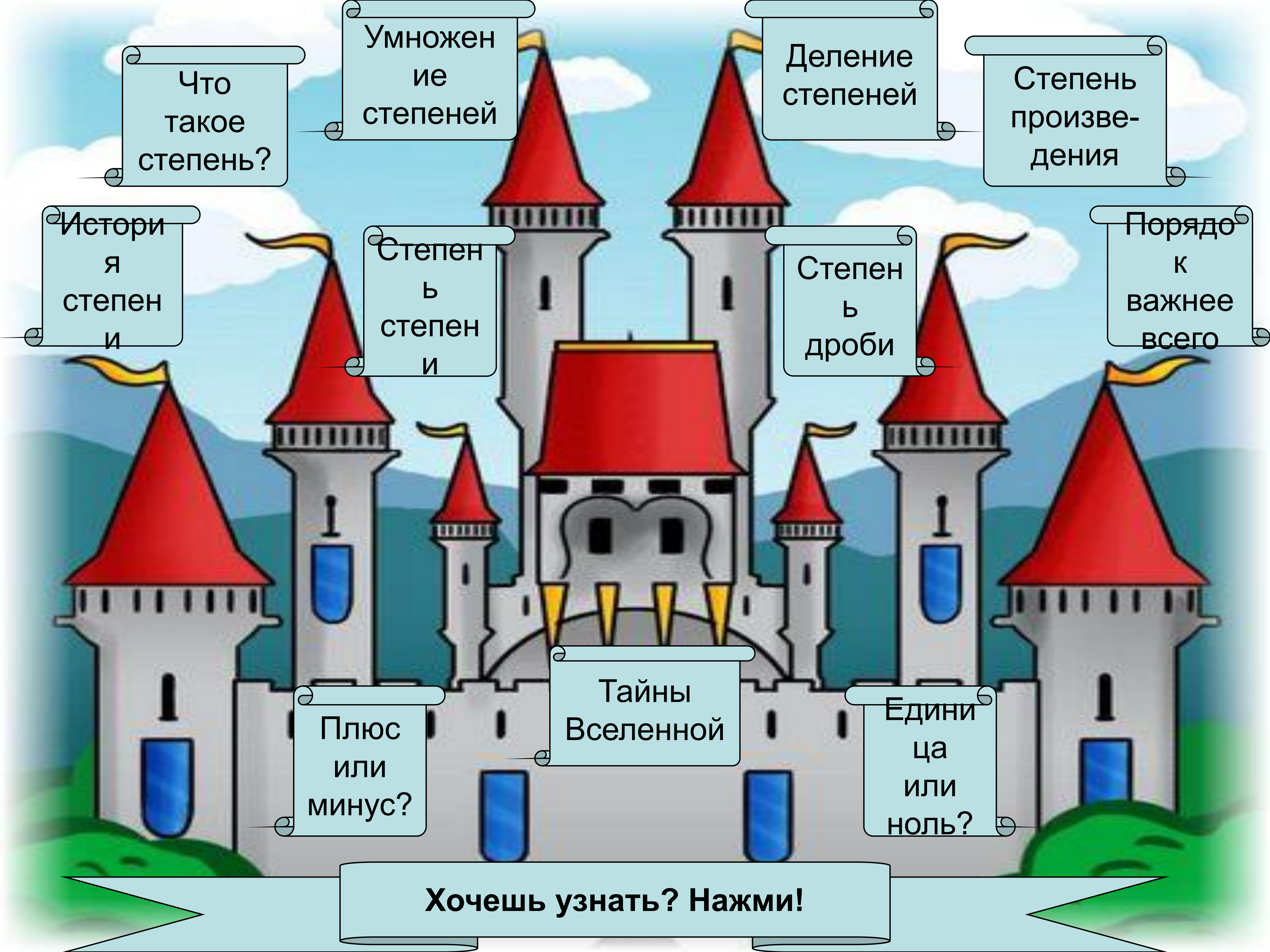
Сможешь самостоятельно повторить уже известное и проверить свои знания.

Только будь внимателен, выполняй все задания и рекомендации.

Если будет трудно, то мы придем на помощь!

Вперёд!

Желаю успехов и радости познания!

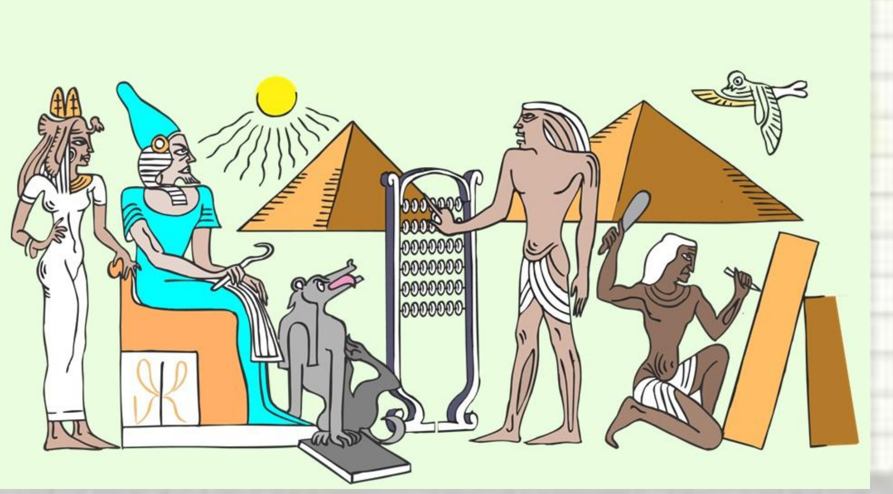

Что такое степень?
Умножение степеней
Деление степеней
Степень произве-дения
История степени
Степень степени
Степень дроби
Порядок важнее всего
Тайны Вселенной
Плюс или минус?
Единица или ноль?
Хочешь узнать? Нажми!

Древняя тайна

(История возникновения степени числа)

Простейшие математические выражения были известны людям еще в глубокой древности.

В то же время постоянно шло совершенствование как самих операций, так и их записи на том или ином носителе. В частности, в Древнем Египте обратили внимание на то, что когда происходит умножение какого-либо числа на одно и то же число много раз, то на это тратится огромное количество ненужных усилий.



История возникновения степени числа

Более того, такая операция вела к значительным финансовым затратам: согласно действовавшим тогда установкам на оформление любых записей, каждой действие с числом должно было подробно описываться. Если вспомнить, что даже самый простейший папирус стоил весьма внушительную сумму денег, то не стоит удивляться тем усилиям, которые египтяне приложили, чтобы найти выход из этой ситуации.

Решение нашел знаменитый **Диофант Александрийский.**

Он придумал специальный математический знак, который стал показывать, сколько раз необходимо умножить то или иное число на само себя.

Диофант описывает первые натуральные степени чисел так:

«**квадрато-квадраты** — от умножения квадратов самих на себя, далее **квадрато-кубы**, получающиеся от умножения квадрата на куб его стороны, далее **кубо-кубы** — от умножения кубов самих на себя».

Неизвестную Диофант называет «числом» (ἀριθμός) и обозначает буквой ς, **квадрат** неизвестной — символом $\mathbf{\Delta^{Y}}$ (сокращение от δύναμις — «степень»), **куб** неизвестной — символом $\mathbf{K^{Y}}$ (сокращение от κύβος — «куб»).

Предусмотрены специальные знаки для следующих степеней неизвестного, вплоть до шестой, называемой кубо-кубом, и для противоположных им степеней, вплоть до минус шестой.

В конце XVI-начале XVII века нидерландский математик **Симон Стевин** обозначал неизвестную величину кружком ○, а внутри его указывал показатель степени.

Например:

①,②,③ обозначали x, x^2, x^3.

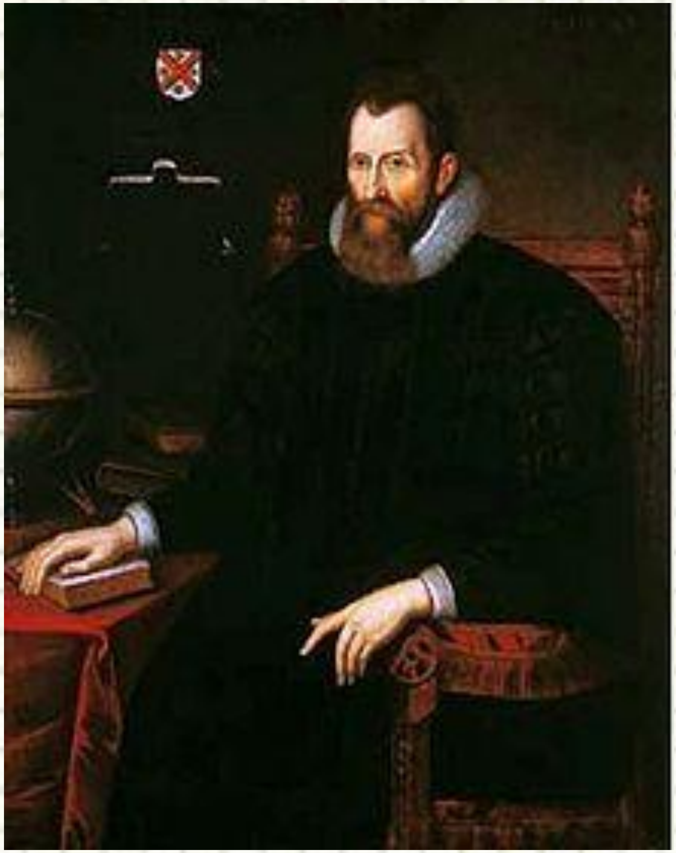
Впоследствии известный французский математик **Рене Декарт** усовершенствовал написание этого выражения, предложив при обозначении степени чисел просто приписывать ее в правом верхнем углу над основным числом.

Например: a^2, a^5.

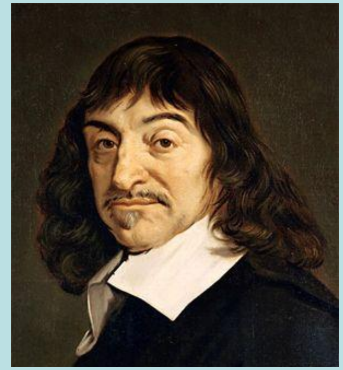
Этим обозначением мы пользуемся и до сих пор.

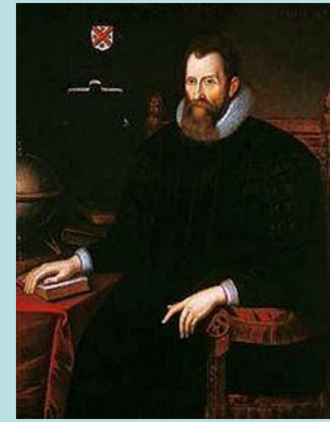
Завершающим аккордом в письменном оформлении степени чисел стала деятельность небезызвестного **Никола Шюке**, который смело ввел в научный оборот сначала отрицательную, а затем и нулевую степень.

Он писал его мелким шрифтом сверху и справа от коэффициента.



Он сделал также проницательное замечание, что если к верхней строке добавить отрицательное число $-n$ (Шюке обозначал его: $0\text{-}n$), то в нижней ему будет соответствовать дробь $1/a^n$.





Диофант Александрийский

Симон Стевин

Никола Шюке

Рене Декарт

Придумал специальный математический знак, обозначающий степень

Ввел современное обозначение степени

Ввел нулевую и отрицательную степень

Обозначал неизвестную величину кружком, а внутри его указывал показатель степени

Так что же такое «степень»?

Степенью числа "а" с натуральным показателем "n", бóльшим 1, называется **произведение** "n" одинаковых множителей, каждый из которых равен числу "а".

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\textbf{n раз}}$$

Степень числа

Показатель степени

$$a^n$$

Основание степени

$$a^n$$

Видишь букву, иль число,
А вверху ещё одно,
Это степень, помни,
Всё о ней запомни!
То, что сверху - показатель,
Он покажет сколько раз
Нам умножить основание,
Получить ответ, чтоб враз.

Степень числа

3 • 3 • 3 • 3 • 3 =

$$3^5$$

Показатель степени
(Сколько раз?)

Основание степени
(Что умножаем?)

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$$

- **Пример.** $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

- **Пример.**

А.С. Пушкин

К.И. Росси

А.А. Иванов

К.Ф. Рылеев

Художники

Композиторы

Писатели

Архитекторы

А.А. Алябьев

В.А. Тропинин

М.И. Глинка

К.А.Тон

Тайна первая
(умножение степеней с одинаковыми основаниями)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.

Для любого числа а и произвольных натуральных чисел m и n

$$a^2\,a^3 = \underbrace{a\cdot a}_{\text{2 раза}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot a}_{\text{3 раза}} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}_{\text{5 раз}} = a^{2+3} = a^5$$

Мы рассмотрели произведение двух степеней.
На самом же деле данное свойство верно для любого числа степеней с одинаковыми основаниями.

$$a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{(m+n)} \cdot a^k = a^{m+n+k}$$

- **Пример.** 54 = 5·5·5·5 = 625

- **Пример.**

$x^3 \cdot x^5 \cdot x$

$x^2 \cdot x^5 \cdot x^4 \cdot x$

$x^2 \cdot x^7 \cdot x^6 \cdot x^2$

$x^5 \cdot x^8 \cdot x \cdot x^9$

x^9

x^{17}

x^{12}

x^{23}

$x^{11} \cdot x^5 \cdot x^7$

$x^3 \cdot x^5 \cdot x^9$

$x \cdot x^2 \cdot x^6$

$x^4 \cdot x^8$

Тайна вторая
(деление степеней с одинаковыми основаниями)

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

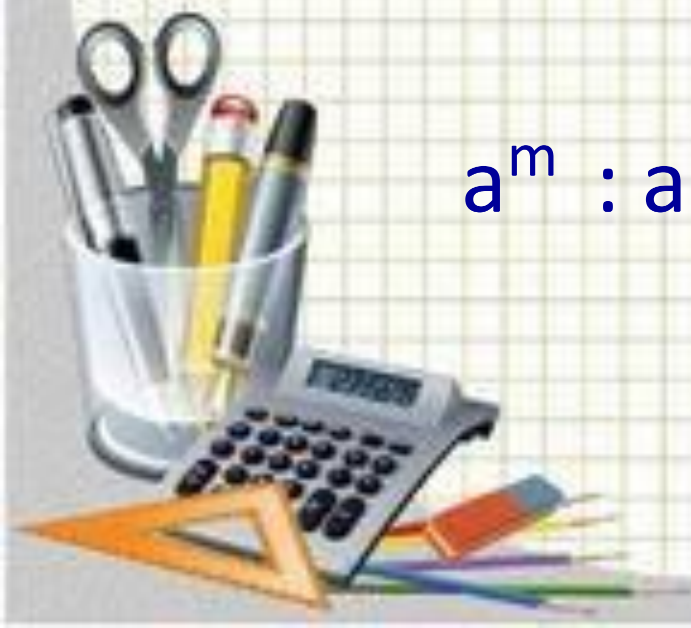
При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним,

а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Для любого числа а ≠ 0 и произвольных натуральных чисел m и n, таких, что m > n

$$\frac{a^7}{a^3} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot \cancel{a\cdot a\cdot a}}^{7\ \text{раз}}}{\underbrace{\cancel{a\cdot a\cdot a}}_{3\ \text{раза}}} = a^{7-3} = a^4 \qquad a \neq 0$$

Мы рассмотрели деление двух степеней.
На самом же деле данное свойство верно для любого числа степеней с одинаковыми основаниями.



$$a^m : a^n : a^k = a^{(m-n)} : a^k = a^{m-n-k}$$

В.В.Петров

И.Ф. Крузенштерн

Н.И. Лобачевский

Н.Н.Зинин

география

физика

химия

математика

М.П.Лазарев

Н.И. Лобачевский

Б.С.Якоби

П.П.Аносов

Тайна третья
(возведение в степень произведения)

$$(ab)^n = a^n b^n$$

При возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают

Для любых чисел а и *b* и произвольного натурального числа n

$$(ab)^3 = \underbrace{a\cdot b \cdot a\cdot b\; a\cdot b}_{3\text{ раза}} = \underbrace{a\cdot a\cdot a}_{3\text{ раза}}\cdot \underbrace{b\cdot b\cdot b}_{3\text{ раза}} = a^3\cdot b^3$$

Мы рассмотрели произведение двух чисел.
На самом же деле данное свойство верно для любого количества.

$$(abcd)^n = a^n b^n c^n d^n$$

Примеры:

Выполните возведение в степень.

а) $(xyz)^4 = x^4y^4z^4$

б) $(-0{,}2xy)^3=(-0{,}2)^3x^3y^3=-0{,}008x^3y^3$

Выполни возведение в степень

$(abc)^9$ | $a^3b^3c^3$ | $a^9b^9c^9$ | abc^9

$(-0{,}3xz)^4$ | $0{,}0081x^4z^4$ | $-0{,}0081x^4z^4$ | $0{,}81x^4z^4$

Представь в виде степени произведение

$0{,}16x^2y^2$ | $0{,}16(xy)^4$ | $(0{,}4xy)^2$ | $(0{,}8xy)^2$

-27a3x6 | $(-3ax)^9$ | $-(9ax^2)^3$ | $(-3ax^2)^3$

Тайна четвертая
(возведение степени в степень)

$$\left(a^{m}\right)^{n} = a^{m \cdot n}$$

При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают

Для любого числа а и произвольных натуральных чисел m и n

$$(a^2)^3 = \underbrace{a\cdot a \cdot a\cdot a\; a\cdot a}_{3\text{ раза}} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}_{6\text{ раз}} = a^{2\cdot 3} = a^6$$

Пример. $(a^4)^6 = a^{4\cdot 6} = a^{24}$

Пример. Представить 3^{20} в виде степени с основанием 3^2.

По свойству возведения степени в степень известно, что при возведении в степень показатели перемножаются, значит:

показатель степени основания

$$2\cdot x = 20$$

показатель степени заданного числа

$$x = 20 : 2$$

$$x = 10$$

$$3^{20} = (3^2)^{10}$$

Самое большое число, записанное тремя числами

Чтобы написать это число понадобится 150 томов по 100 страниц каждый.

Если писать по 2 цифры в секунду, то сидя за столом и продолжая работу, понадобится 7 лет

Большое ли это число?

Во Вселенной нет столько электронов, сколько цифр в числе девять в степени девять в девятой степени.

Тайна пятая
(возведение в степень дроби)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

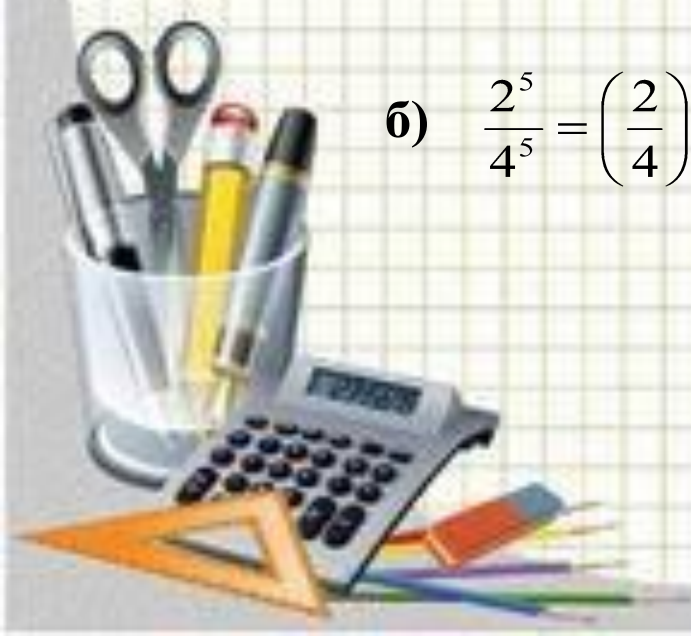
При возведении в степень дроби возводят в эту степень числитель и знаменатель дроби

Для любых чисел а и *b* ≠0 и произвольного натурального n

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}}_{3\ \text{раза}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a}^{3\ \text{раза}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b}_{3\ \text{раза}}} = \frac{a^3}{b^3}$$

Пример. **а)** $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

б) $\frac{2^5}{4^5} = \left(\frac{2}{4}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$



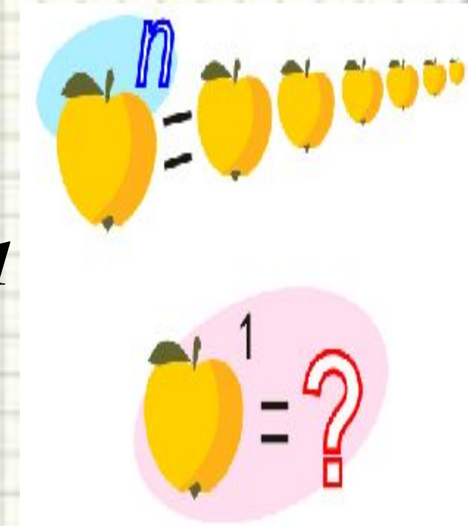
Тайна шестая
(про 0 и 1)

В показатель встанет ноль,
Важную сыграет роль,
Сразу степень превратится
В чудо-цифру - единицу!

Если ж единица станет
Показателем сама,
Основание оставляем,
Степень ведь ему равна.

Единица, единица,
Просто чудная девица,
В любой степени она
Единице лишь равна.

Тайна шестая
(про 0 и 1)



Степенью числа ***a*** с показателем ***n = 1***

само это число:

$$a^1 = a$$

Любое число в **нулевой** степени равно единице.

$$a^0 = 1$$

Ноль в любой натуральной степени равен **нулю.**

$$0^n = 0$$

Единица в любой степени равна **единице.**

$$1^n = 1$$

Тайна седьмая
(плюс или минус?)

При возведении в степень положительного числа получается положительное число.

$$4^3 = 64$$

Отрицательное число, возведённое в чётную степень, есть число положительное.

$$(-4)^4 = 256$$

Отрицательное число, возведённое в нечётную степень, — число отрицательное.

$$(-4)^3 = -64$$

Внимание!

$(-5)^4$ и -5^4 – ***разные*** **числа**

Тайна восьмая
(порядок важнее всего)

В выражениях со степенями, не содержащими скобки, сначала выполняют возведение в степень, затем умножение и деление, а в конце сложение и вычитание.

Если в выражении есть скобки, то сначала в указанном выше порядке выполняют действия в скобках, а потом оставшиеся действия в том же порядке слева направо.

$$((-2)^{\overset{1}{4}} \overset{4}{+} (-1)^{\overset{2}{3}} \overset{3}{\cdot} 7) \overset{6}{:} (-3)^{\overset{5}{2}} = 1$$

1) $(-2)^4 = 16$

2) $(-1)^3 = -1$

3) $(-1) \cdot 7 = -7$

4) $16 + (-7) = 16 - 7 = 9$

5) $(-3)^2 = 9$

6) $9 : 9 = 1$

Примеры:

Расставь порядок действий. Ответ запиши в виде последовательности, получившихся цифр.

1 4 2 3

а) $3^4 - 2^5 \cdot 0,5$

1) 3^4 2) 2^5 3) $2^5 \cdot 0,5$ 4) $3^4 - 2^5 \cdot 0,5$

Ответ: 1423

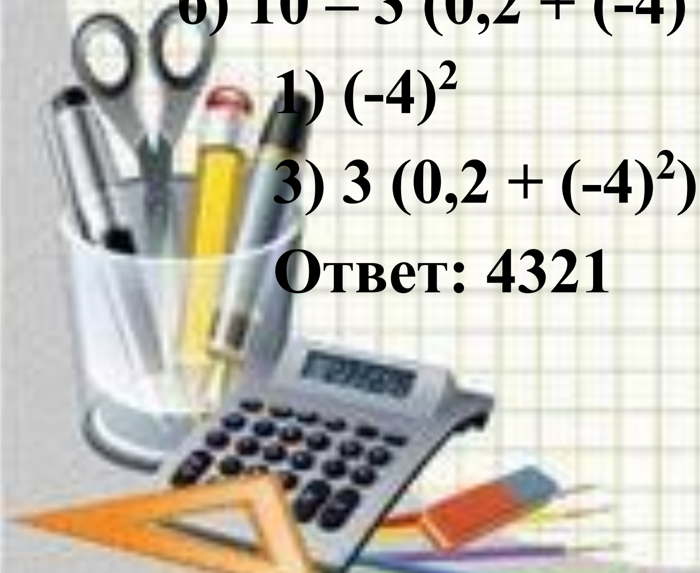
4 3 2 1

б) $10 – 3\,(0,2 + (-4)^2)$

1) $(-4)^2$ 2) $(0,2 + (-4)^2)$

3) $3\,(0,2 + (-4)^2)$ 4) $10 – 3\,(0,2 + (-4)^2)$

Ответ: 4321



Выбери правильный порядок действий

$2\cdot5^3 + 5\cdot2^3$	12534	21543	12345
$(18-5\cdot3)^2+0{,}3^4$	21354	12345	12354
$3{,}5\cdot4 - (-3{,}7 + 2^5)$	1432	3421	1423
$(16-0{,}2\cdot6^3)^2 - 7{,}5:3$	132465	123456	321465

Тайна чисел применяемых на уроках физики (плюс или минус?)

Физические величины при измерениях и вычислениях обычно выражают числами. Они могут значительно отличаться друг от друга и выражаться как чрезвычайно малыми, так и гигантскими числами.

Наиболее удобный способ записи малых и больших чисел заключается в использовании множителя 10 в некоторой степени.

Например, число 2000 можно записать как $2 \cdot 1000$ или $2 \cdot 10^3$.

Масса Земли
5 980 000 000 000 000 000 000 000 000 г
$= 5{,}98 \cdot 10^{27}$ г

Масса атома водорода
0,000 000 000 000 000 000 0017 г
$= 1{,}7 \cdot 10^{-21}$ г

Тайна чисел применяемых на уроках физики (плюс или минус?)

$2000 = 2 \cdot 1000 = 2 \cdot 10^3$.

Степень десяти (в данном случае «3») показывает, сколько нулей нужно приписать справа за первым множителем (в нашем примере «2»).

$21500 = 21500 \cdot 10^0 = 2150 \cdot 10^1 = 215 \cdot 10^2 = 21{,}5 \cdot 10^3 = 2{,}15 \cdot 10^4 =$
$= 0{,}215 \cdot 10^5 = 0{,}0215 \cdot 10^6$ и так далее.

Запомни: ***в стандартной форме числа до запятой всегда оставляют только одну цифру, отличную от нуля, а остальные цифры записывают после запятой*** **$21500 = 2{,}15 \cdot 10^4$.**

Тайна чисел применяемых на уроках физики (плюс или минус?)

**Когда ты будешь «разворачивать» (то есть записывать в обычном виде) число, представленное в стандартной форме,
например, $3{,}71 \cdot 10^5$, то начинай отсчитывать цифры в количестве пяти (таков в нашем примере показатель степени десяти) сразу после запятой, включая и значащие цифры «71», а недостающие цифры замени нулями:**

$$3{,}71 \cdot 10^5 = 371000.$$

Тайна чисел применяемых на уроках физики (плюс или минус?)

С большими числами мы выяснили, перейдём теперь к малым.

Например: $0{,}0375 = 3{,}75 \cdot 10^{-2}$

Первый множитель – первая значащая цифра,

затем запятая и остальные цифры (в нашем примере это «3», «запятая», «75»).

Показатель степени равен позиции после запятой, на которой стоит первая отличная от нуля цифра (в нашем примере это вторая позиция, поскольку именно там стоит первая ненулевая цифра «3»).

Тайна чисел применяемых на уроках физики (плюс или минус?)

Перед показателем ставится знак «минус», и это означает, что при «разворачивании» числа нули нужно будет ставить не справа, а слева.

Например: $1{,}05 \cdot 10^{-5} = 0{,}0000105.$

Тайна чисел применяемых на уроках физики (плюс или минус?)

Размеры некоторых малых тел

Остриё булавки	0,0001 м	$1 \cdot 10^{-4}$ м
Инфузория-туфелька	0,0002 м	$2 \cdot 10^{-4}$ м
Бактерия пневмонии	0,0000001 м	$1 \cdot 10^{-7}$ м
Клетка крови	0,00000075 м	$7{,}5 \cdot 10^{-7}$ м
Молекула белка	0,00000001 м	$1 \cdot 10^{-8}$ м
Атом водорода	0,0000000002 м	$2 \cdot 10^{-10}$ м

Тайна чисел применяемых на уроках физики (плюс или минус?)

Размеры некоторых больших тел

Диаметр Земли	12800000 м	$1{,}28\cdot10^{7}$ м
от Земли до Луны	384000000 м	$3{,}84\cdot10^{8}$ м
Диаметр Солнца	1390000000 м	$1{,}39\cdot10^{9}$ м
от Земли до Солнца	150000000000 м	$1{,}5\cdot10^{11}$ м
1 световой год	9500000000000000 м	$9{,}5\cdot10^{15}$ м
1 парсек	30800000000000000 м	$3{,}08\cdot10^{16}$ м

Тайна чисел применяемых на уроках физики (плюс или минус?)

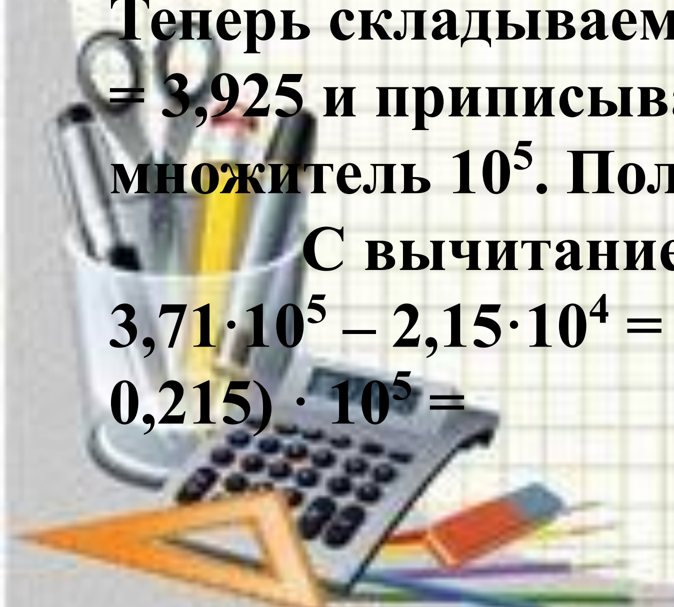
Все числа, записанные в стандартной форме, можно складывать и вычитать. Для сложения двух чисел, записанных в такой форме, сначала нужно преобразовать их так, чтобы степень десяти была одинаковой.

Например, $2{,}15 \cdot 10^4 + 3{,}71 \cdot 10^5 = 0{,}215 \cdot 10^5 + 3{,}71 \cdot 10^5$.

Теперь складываем первые множители: $0{,}215 + 3{,}71 = 3{,}925$ и приписываем справа общий второй множитель 10^5. Получим результат: $3{,}925 \cdot 10^5$.

С вычитанием поступаем по аналогии:

$3{,}71 \cdot 10^5 - 2{,}15 \cdot 10^4 = 3{,}71 \cdot 10^5 - 0{,}215 \cdot 10^5 = (3{,}71 - 0{,}215) \cdot 10^5 = 3{,}495 \cdot 10^5$.



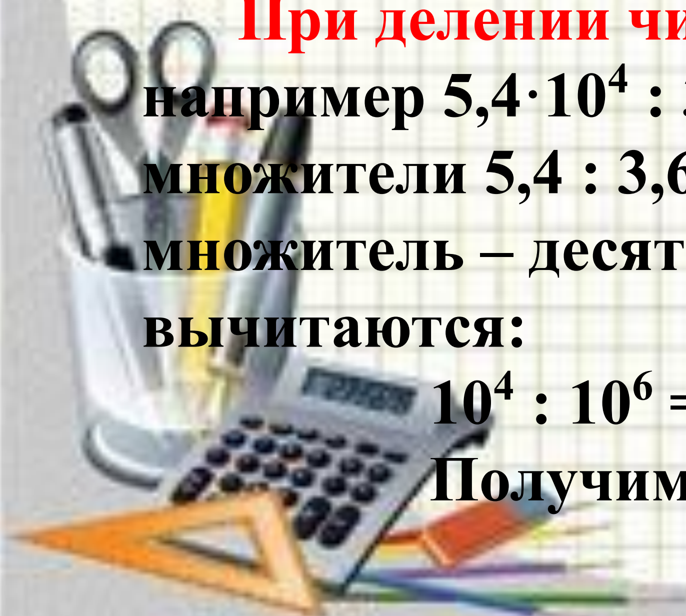
Тайна чисел применяемых на уроках физики (плюс или минус?)

Для умножения чисел в стандартной форме например, $5{,}2\cdot10^4\cdot3{,}7\cdot10^5$, нужно перемножить первые сомножители: $5{,}2\cdot3{,}7=19{,}24$, а затем сложить показатели степеней: $10^4\cdot10^5=10^{4+5}=10^9$. Получим результат: $19{,}24\cdot10^9$, в котором перенесём запятую на один знак влево: $1{,}924\cdot10^{10}$.

При делении чисел в стандартной форме записи, например $5{,}4\cdot10^4:3{,}6\cdot10^6$ следует разделить первые множители $5{,}4:3{,}6=1{,}5$ и приписать второй множитель – десять в степени, где показатели вычитаются:

$$10^4:10^6=10^{4-6}=10^{-2}.$$

Получим ответ: $1{,}5\cdot10^{-2}$.



Тайны вселенной
(их смысл познаешь в старших классах)

Здесь мы приведём примеры, где люди сталкиваются со степенью в повседневной жизни

Рост древесины происходит по закону:

$$A = A_0 a^{k \cdot t},$$ где

A - изменение количества древесины во времени;

A_0 - начальное количество древесины;

t – время;

k, a – некоторые постоянные.

Рост количества бактерий происходит по закону:

$N=5^t$ где

N – число колоний бактерий в момент времени t;

t – время размножения.

Давление воздуха убывает с высотой по закону:

$$P = P_0 \cdot a^{-k \cdot h}$$, где

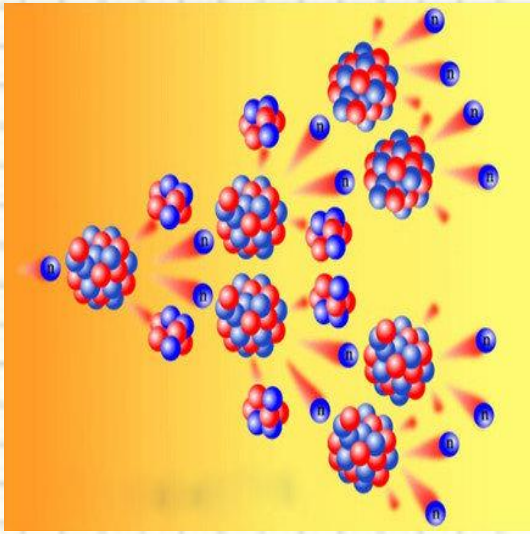
P – давление на высоте h;
P0 - давление на уровне моря;
a – некоторые постоянные.

Количество радиоактивного вещества, оставшегося к моменту t, описывается формулой:

$$N = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{T_{1/2}}}$$

N_0 - первоначальное количество вещества;

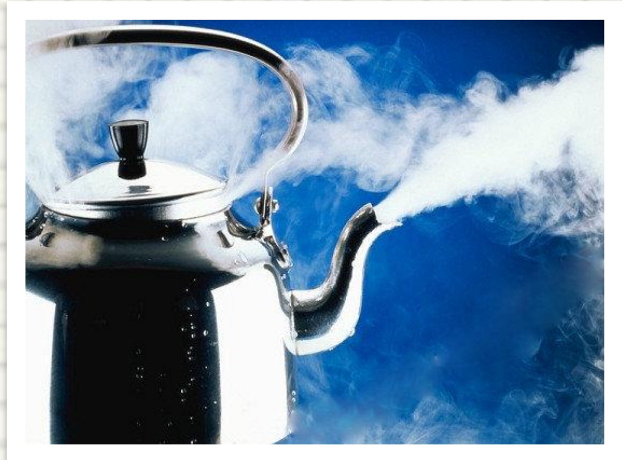
$T_{1/2}$ - период полураспада.



Процесс изменения температуры чайника при кипении выражается формулой:

$$T=T_0 + (100-T_0)e^{-kt} .$$

Это также пример процесса выравнивания, который в физике можно наблюдать при включении и выключении электрических цепей, и при падении тела с парашютом.



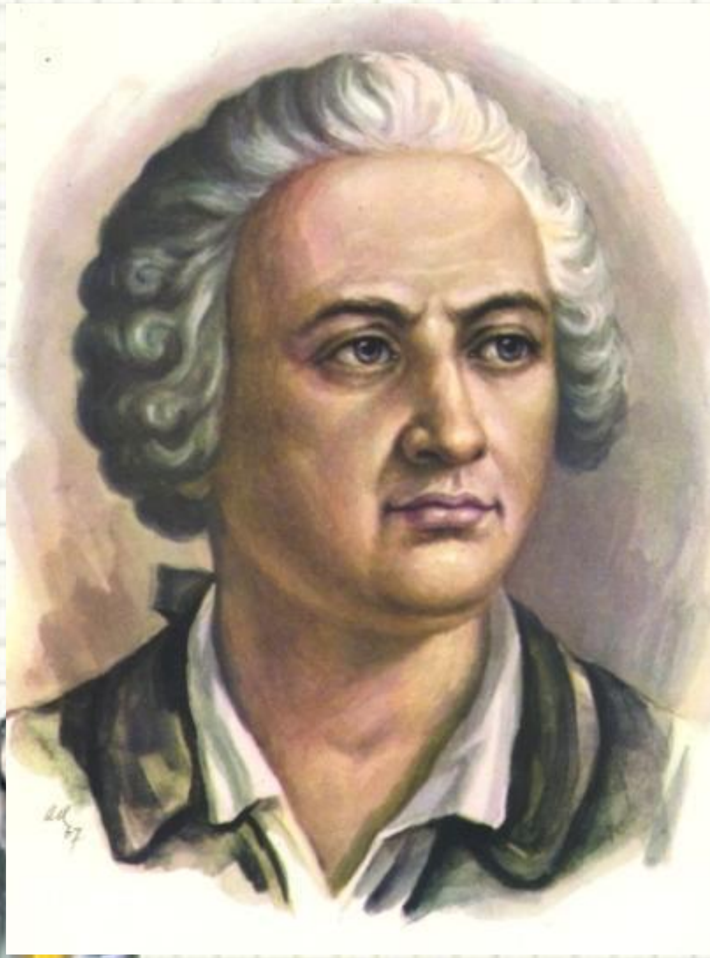
При прохождении света через мутную среду каждый слой этой среды поглощает строго определенную часть падающего на него света.

Сила света I определяется по формуле:

$$I = I_0 e^{-ks}$$ **, где**

S – толщина слоя;

K – коэффициент, характеризующий мутную среду.



«Пусть кто-нибудь попробует вычеркнуть из математики степени, и он увидит, что без них далеко не уедешь»

М.В. Ломоносов.