Производная и ее применение в алгебре

Понятие производной

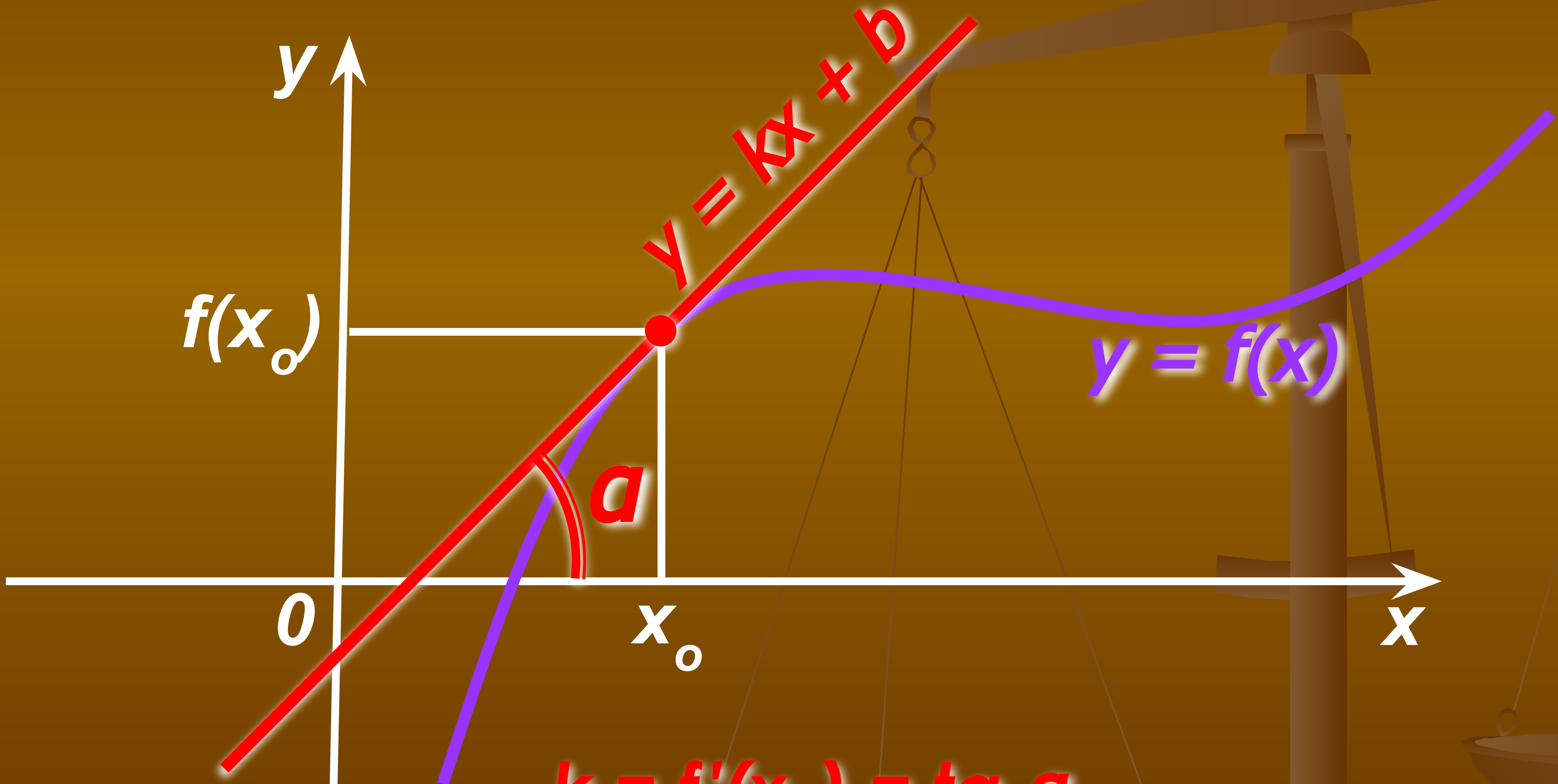
Пусть y = f(x) есть непрерывная функция аргумента x, определенная в промежутке (a; b), и пусть x0 - произвольная точка этого промежутка

Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функция y = f(x) получит приращение Δy = f(x + Δx) - f(x). Предел, к которому стремится отношение Δy / Δx при Δx → 0, называется производной от функции f(x).

$$\mathbf{y'(x)=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Касательная

к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f – это прямая, проходящая через точку $(x_o; f(x_o))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_o)$.



$k = f'(x_o) = tg\ a$ –

это угловой коэффициент касательной.

Приближенные вычислени

$$f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)\Delta x \qquad (1)$$

$$\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x \qquad (2)$$

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x \qquad (3)$$

Общий вид уравнения касател

$$y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$$

Алгоритм составления уравнения касате

1° Находим значение функции в точке x_o: $f(x_o)$.

2° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

3° Находим значение производной в точке x_o: $f'(x_o)$.

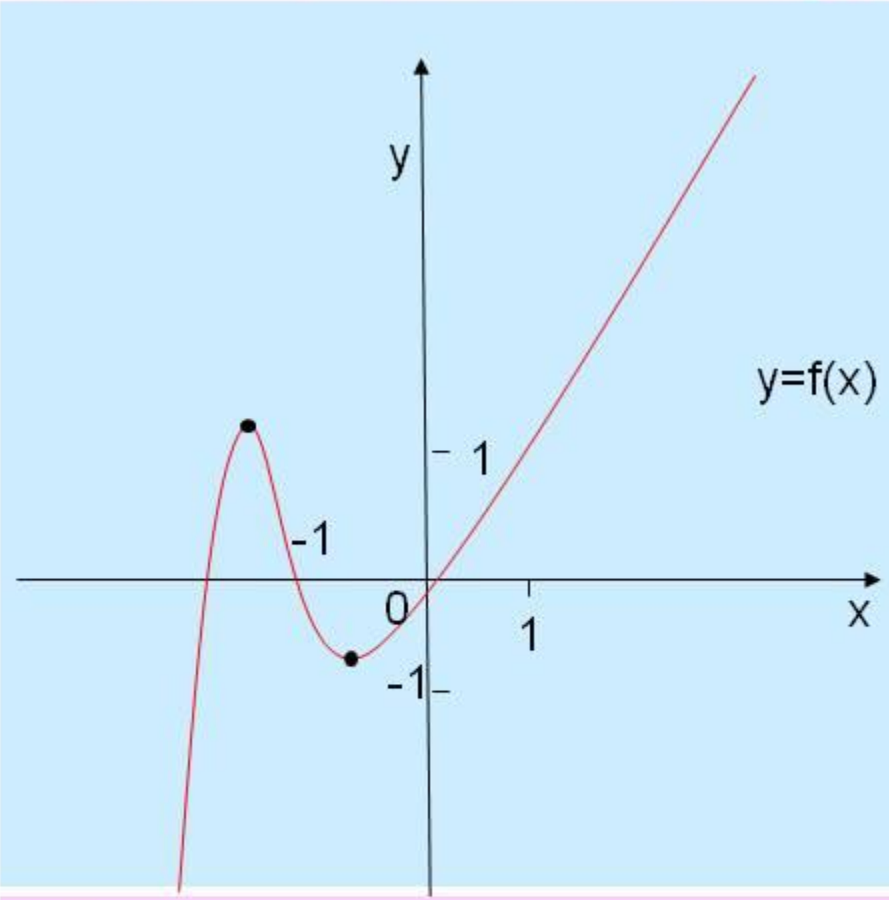
4° Подставляем эти данные в общее уравнения касательной: $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$.

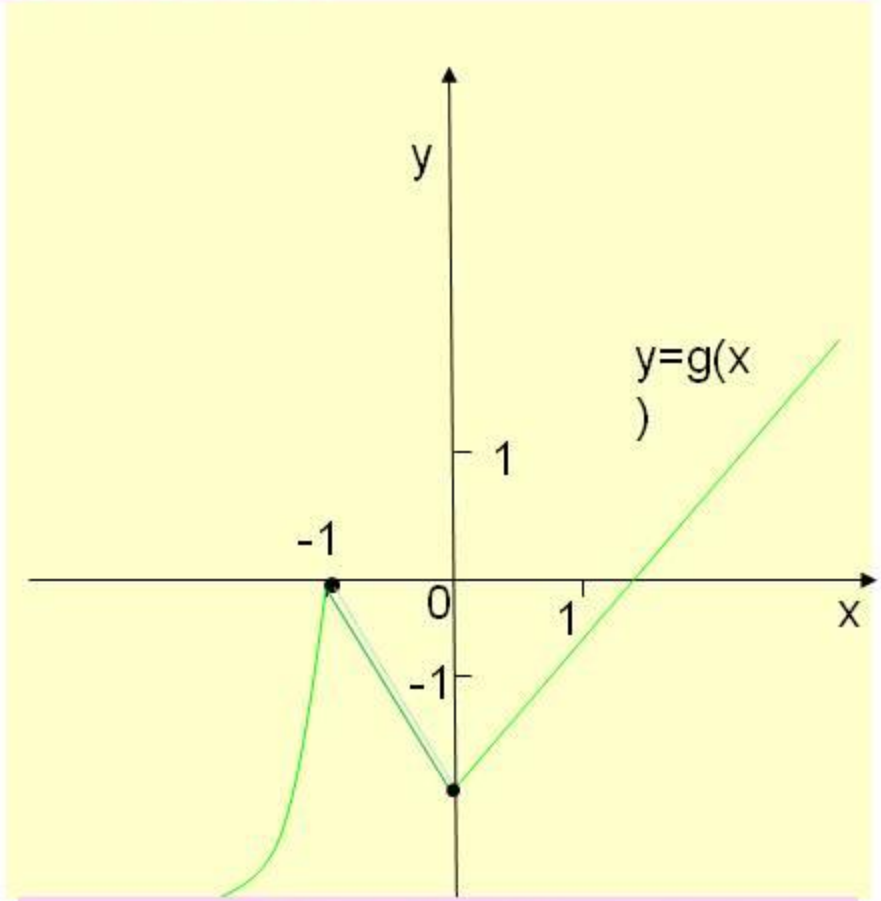
Правила дифференцирования и таблица производных

№	Функция	Производная	№	Функция	Производная
1	x^n	nx^{n-1}	8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
2	e^x	e^x	9	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
3	a^x	$a^x \ln a$	10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$\sin x$	$\cos x$	11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\cos x$	$-\sin x$	12	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
6	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	13	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
7	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$			

Исследование функций с помощью производной и построение графиков функций.

Внутренние точки области определения функции, в которых **производная равна нулю или производная не существует**, называются **критическими**.





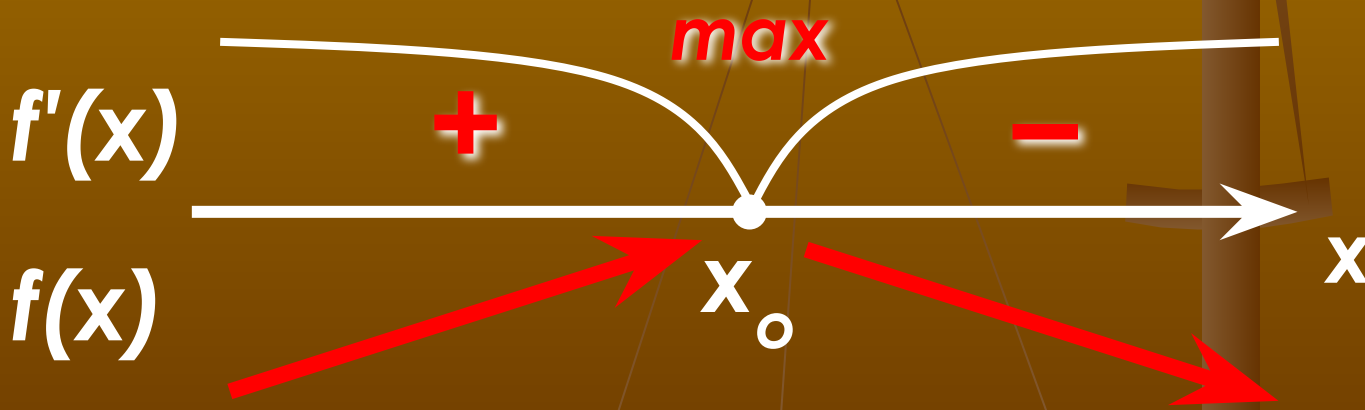
Касательная в таких точках графика **параллельна оси ОХ**, а поэтому **производная** в этих точках **равна 0**;

Касательная в таких точках графика **не существует**, а поэтому **производная** в этих точках **не существует**.

Максимум функции

Точка x_o называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_o, что для всех $x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_o)$.

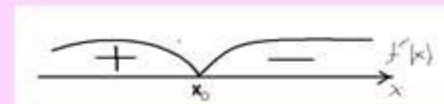
Если в точке x_o производная функции $f(x)$ меняет знак с «+» на «–», то x_o – **точка локального максимума** функции $f(x)$.



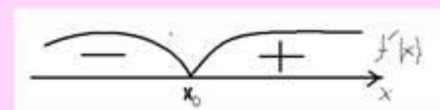
$f(x_o)$ – **максимум функции**

Достаточное условие существования экстремума функции:

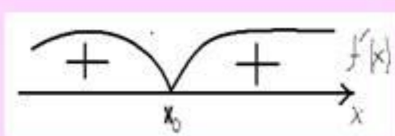
1) Если при переходе через критическую точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 – точка максимума функции f(x).

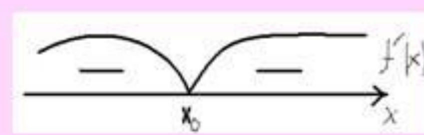


1) Если при переходе через критическую точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 – точка минимума функции f(x).



3) Если при переходе через критическую точку x_0 функции f(x) ее производная не меняет знака, то в точке x_0 экстремума нет.





Теорема Дарбу. Точки, в которых производная функции равна 0 или не существует, делят область определения функции на интервалы, внутри которых производная сохраняет знак.

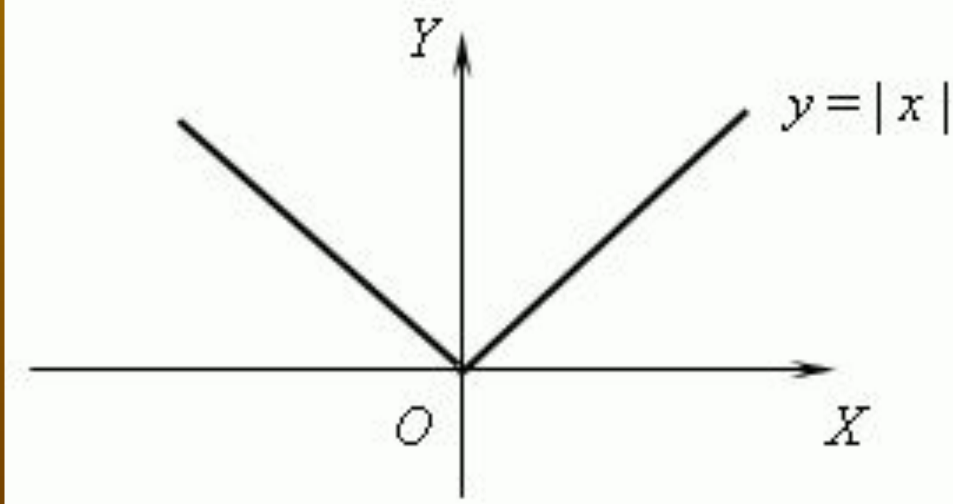


Рис. 3

Монотонность функци

1) Если $f'(x) > 0$ внутри промежутка I, то функция **f возрастает** на этом промежутке.

2) Если $f'(x) < 0$ внутри промежутка I, то функция **f убывает** на этом промежутке.

3) Если $f'(x) = 0$ внутри промежутка I, то функция **f постоянна** на этом промежутке.

Примеры:

1° $f(x) = 3x^3 + 4x$

$f'(x) = 9x^2 + 4 > 0 \Rightarrow f(x)$ **возрастает** при $x \in R$

2° $f(x) = -2x^5 - 6x$

$f'(x) = -10x^4 - 6 < 0 \Rightarrow f(x)$ **убывает** при $x \in R$

3° $f(x) = 12\pi$

$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ **постоянна** при $x \in R$

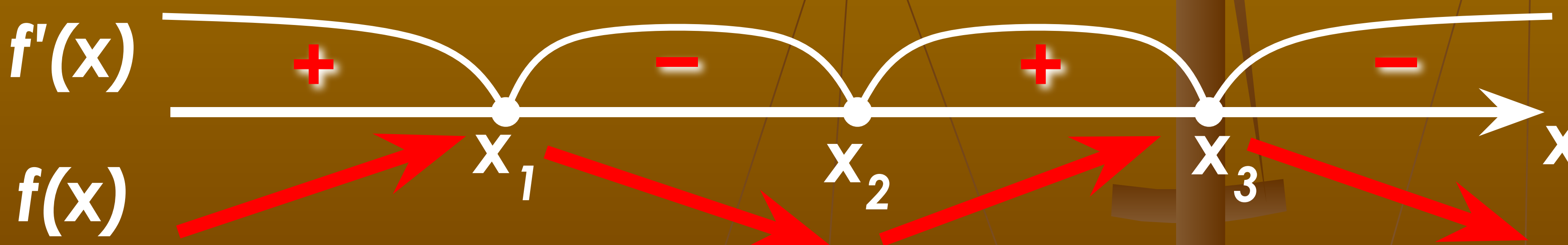
Алгоритм исследования функции на монотоннос

1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

4° Полученные данные изображаем на схеме:



5° а) Промежутки возрастания: $(-\infty; x_1]$; $[x_2; x_3]$.

б) Промежутки убывания: $[x_1; x_2]$; $[x_3; +\infty)$.

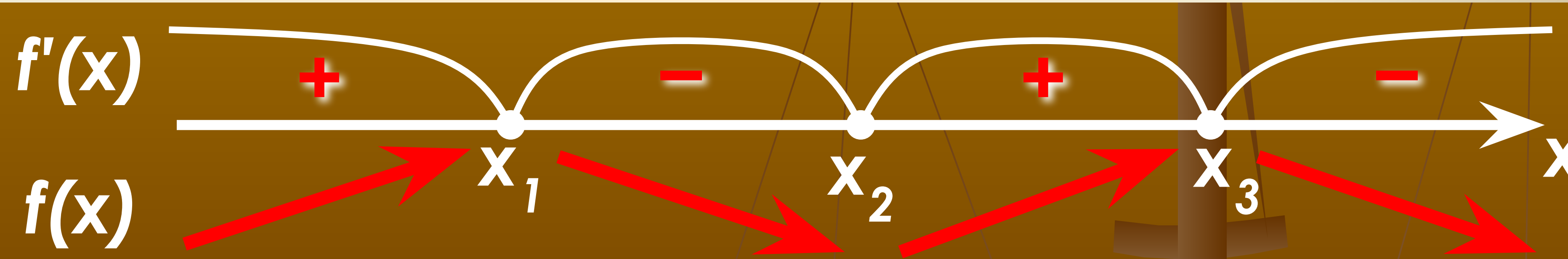
Алгоритм исследования функции на экстрему

1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

4° Полученные данные изображаем на схеме:



5° а) x_1; x_3 – точки максимума; x_2 – точка минимума.

б) $f(x_1)$; $f(x_3)$ – максимумы функции;

$f(x_2)$ – минимум функции.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на задан

1° Выясняем существование функции на данном отрезке [a; b].

2° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

3° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

4° Отбираем те точки, которые принадлежат заданному промежутку [a; b].

5° Находим значение функции в этих точках и на концах промежутка: $f(a)$; $f(b)$; $f(x_1)$; $f(x_2)$; и т. д.

6° Выбираем среди полученных значений **наибольшее** или **наименьшее**.