Неопределённый интеграл.

Метод подстановки (замены переменной)

Найти $\int f(x)\,dx$

пусть $x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)\,dt$

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

Функцию $x = \varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределенный интеграл, стоящий в правой части равенства.

Замечание. Иногда целесообразнее подбирать замену переменного в виде $t=\psi(x)$

Пример. $$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx$$

пусть $\psi(x)=t$, тогда $\psi'(x)dx=dt$

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\psi(x)|+C$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int (2x+1)^{10}\,dx$

$$2x+1=t$$

$$d(2x+1)=dt$$

$$2\,dx=dt$$

$$dx=\frac{dt}{2}$$

$$\int (2x+1)^{10}\,dx=\frac{1}{2}\int t^{10}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{11}}{11}+C=\frac{(2x+1)^{11}}{22}+C$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \sqrt{4x-5}\,dx$

$$4x-5=t$$

$$d\left(4x-5\right)=dt$$

$$4\,dx=dt$$

$$dx=\frac{dt}{5}$$

$$\int \sqrt{4x-5}\,dx=\frac{1}{5}\int \sqrt{t}\,dt=\frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{5}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{t^3}}{15}+C=\frac{2t\cdot\sqrt{t}}{15}+C=\frac{2\cdot\left(4x-5\right)\cdot\sqrt{4x-5}}{15}+C$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \sin(2-3x)dx$

$$2-3x=t$$

$$d(2-3x)=dt$$

$$-3\,dx=dt$$

$$dx=-\frac{dt}{3}$$

$$\int \sin(2-3x)dx=-\frac{1}{3}\int \sin t\,dt=\frac{1}{3}\cos t+C=\frac{1}{3}\cos(2-3x)+C$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$

$$\ln x = t$$

$$d(\ln x) = dt$$

$$\frac{1}{x} dx = dt$$

$$\int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\ln^6 x}{6} + C$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{x-\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$

$$\int \frac{x-\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx =$$

$$= \ln|x| + \int \sin t\,dt = \ln|x| - \cos t + C = \ln|x| - \cos\frac{1}{x} + C$$

$$\frac{1}{x} = t$$

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = dt$$

$$-\frac{dx}{x^2} = dt$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

$$\sin x = t$$

$$d\left(\sin x\right) = dt$$

$$\cos x \, dx = dt$$

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{25+4x^2}$

$$\int \frac{dx}{25+4x^2} = \int \frac{dx}{5^2+(2x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{5^2+t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\arctan\frac{t}{5} + C = \frac{1}{10}\arctan\frac{2x}{5} + C$$

$2x = t$

$d(2x) = dt$

$2\,dx = dt$

$dx = \frac{dt}{2}$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \tan x \, dx$

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

$$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

$$\cos x = t$$

$$d(\cos x) = dt$$

$$-\sin x \, dx = dt$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx$

$$\int e^{\frac{x}{4}}\,dx = 4\int e^{t}\,dt = 4e^{t} + C = \underline{4e^{\frac{x}{4}} + C}$$

$$\frac{x}{4} = t$$

$$x = 4t$$

$$dx = d\left(4t\right)$$

$$dx = 4\,dt$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx =$$

$$= -\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \underline{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + C}$$

$$\cos x = t$$
$$d\left(\cos x\right) = dt$$
$$-\sin x\,dx = dt$$

Ещё некоторые формулы.

1) $\int a^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$ $\qquad$ $\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}e^{kx+b} + C$

2) $\int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx+b) + C$

3) $\int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b) + C$

4) $\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\ln|kx+b| + C$

5) $$\int \frac{dx}{\cos^2(kx+b)} = \frac{1}{k}\tan(kx+b)+C$$

6) $$\int \frac{dx}{\sin^2(kx+b)} = -\frac{1}{k}\cot(kx+b)+C$$

7) $$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-n^2x^2}} = \frac{1}{n}\arcsin\frac{n}{k}x+C$$

8) $$\int \frac{dx}{k^2+n^2x^2} = \frac{1}{kn}\arctan\frac{n}{k}x+C$$

9) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

$$x = a\sin t \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$dx = a\cos t\, dt$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2\left(1 - \sin^2 t\right)} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int a\cos t\; a\cos t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\int\cos 2t\,dt=\frac{a^2}{2}\cdot t+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot t+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sin t\cos t+C=\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{a^2-x^2}+C$$

Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен.

$$1^0. \quad \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\underbrace{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}_{\pm k}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right)$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$$

табличный интеграл

$$x + \frac{b}{2a} = t$$

$$dx = dt$$

$2^0.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\underbrace{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}_{\pm k}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right)$$

при a>0

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = t$$

$$dx = dt$$

табличный интеграл

при a<0: $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}$

Пример 12. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$

$$x^2-2x+5=x^2-2x+1+5-1=(x-1)^2+4$$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+5}=\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}=\int\frac{dt}{t^2+2^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}+C=$$

$$x-1=t$$

$$dx=dt$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2}+C$$

Пример 13. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{11+10x-x^2}$

$$11+10x-x^2 = -(x^2-10x-11) = -(x^2-10x+25-11-25) =$$

$$= -\left((x-5)^2-36\right)$$

$$\int \frac{dx}{11+10x-x^2} = -\int \frac{dx}{(x-5)^2-36} = -\int \frac{dt}{t^2-6^2} = -\frac{1}{12}\ln\left|\frac{t-6}{t+6}\right| + C =$$

$$x-5=t$$

$$dx=dt$$

$$= -\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-5-6}{x-5+6}\right| + C = -\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-11}{x+1}\right| + C$$

Пример 14. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$

$$x^2-6x+10=x^2-6x+9+10-9=(x-3)^2+1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+1}}=\int \frac{dt}{t^2+1}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=$$

$$x-3=t$$

$$dx=dt$$

$$=\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+10}\right|+C$$

Пример 15. Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

$$5-4x-x^2=-(x^2+4x-5)=-\left(x^2+4x+4-5-4\right)=$$

$$=-\left((x+2)^2-9\right)=9-(x+2)^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3^2-(2+x)^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{3}+C=$$

$$2+x=t$$

$$dx=dt$$

$$=\arcsin\frac{2+x}{3}+C$$