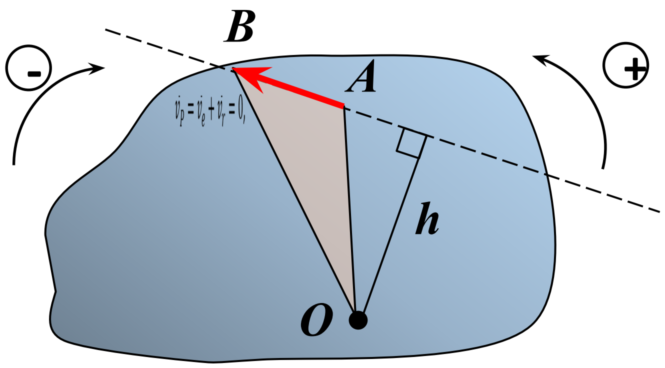
Момент силы относительно точки.

Алгебраическим моментом силы относительно точки называется скалярная величина, равная произведению модуля силы на плечо силы относительно этой точки, взятое со знаком плюс или минус.

$$\bar{v}_B^e = (\bar{v}_A + \bar{v}_{BA})_e; \qquad v_{BA} = \omega_e AB$$

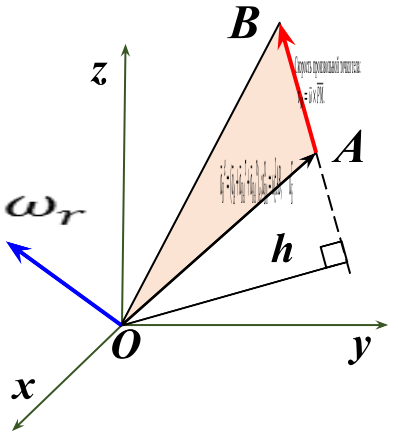


$$v_r = \omega_r OP,$$

$$OP = \frac{v_e}{\omega_r}.$$

Алгебраический момент не зависит от переноса силы вдоль ее линии действия.

Векторным моментом силы относительно точки называется вектор, приложенный в этой точке, по модулю равный произведению силы на плечо, относительно моментной точки, перпендикулярный плоскости, проходящей через моментную точку и силу, и направленный так, что с конца этого вектора видим вращение относительно моментной точки против часовой стрелки.



$$v_e$$

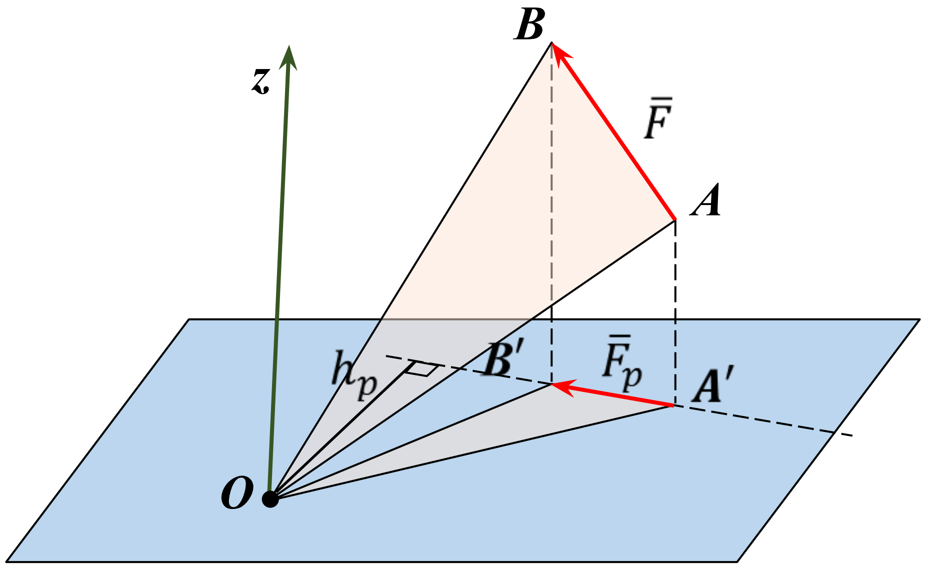
Переносное движение поступательное со скоростью $\bar{v}_e$.

Относительное движение – поступательное со скоростью $\bar{v}_r$.

$$\bar{\omega}_r = \bar{\omega}_e = 0.$$

Момент силы относительно оси.

Моментом силы относительно оси называется алгебраический момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, вычисленный относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.



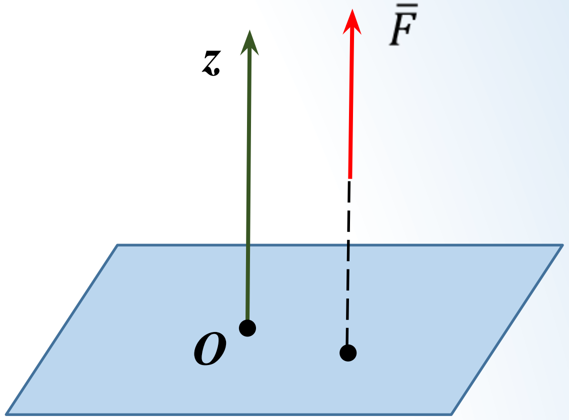
$$M_z(\bar{F}) = M_o\left(\bar{F}_p\right) = \pm F_p h_p$$

$$M_z(\bar{F}) = \pm 2 \cdot S_{\Delta OA'B'}$$

$$M_z(\bar{F}) = \pm F_p h_p = 0:$$

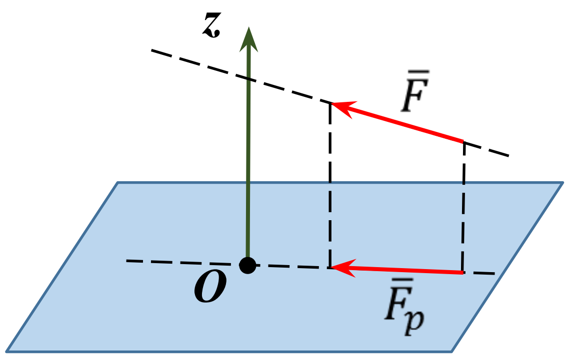
1) Сила параллельна оси;

$$F_p=0$$



2) Линия действия силы пересекает ось

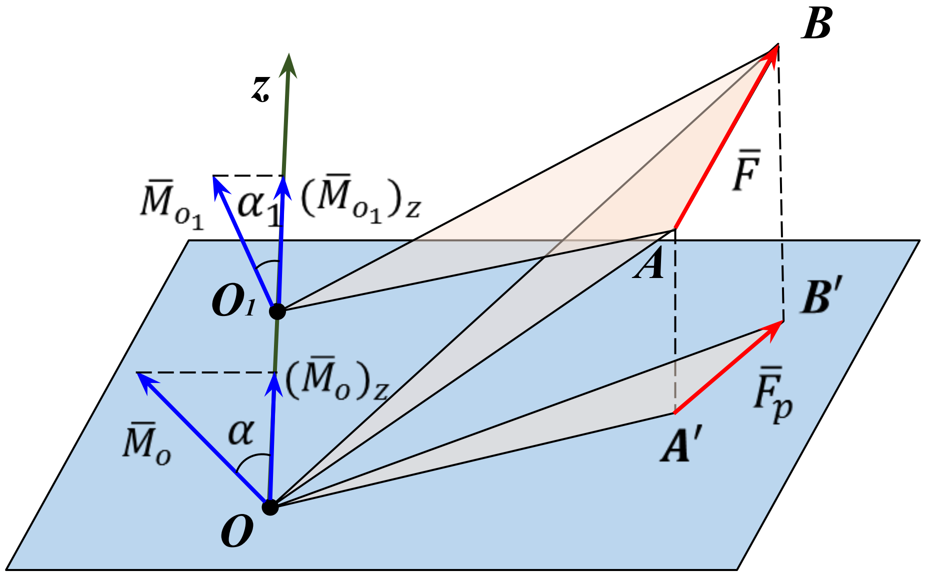
$$h_p=0$$



Таким образом, сила не создает момент относительно оси, если сила и ось расположены в одной плоскости.

Момент силы относительно оси.

Теорема. Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось векторного момента силы, вычисленного относительно произвольной точки на данной оси.



$$M_z(\bar{F}) = 2 \cdot S_{\Delta OA'B'}$$

$$|\bar{M}_o(\bar{F})| = \pm 2 \cdot S_{\Delta OAB}$$

$$\left|\bar{M}_{o_1}(\bar{F})\right| = \pm 2 \cdot S_{\Delta O_1 AB}$$

Угол между соответствующими плоскостями есть угол между перпендикулярами к ним.

$$S_{\Delta OA'B'} = S_{\Delta OAB} cos\alpha\,; \quad S_{\Delta OA'B'} = S_{\Delta O_1 AB} cos\alpha_1$$

$$M_z(\bar{F}) = |\bar{M}_o(\bar{F})| cos\alpha = \left|\bar{M}_{o_1}(\bar{F})\right| cos\alpha_1$$

Знак $M_z(\bar{F})$ определяется знаком $cos\alpha$.

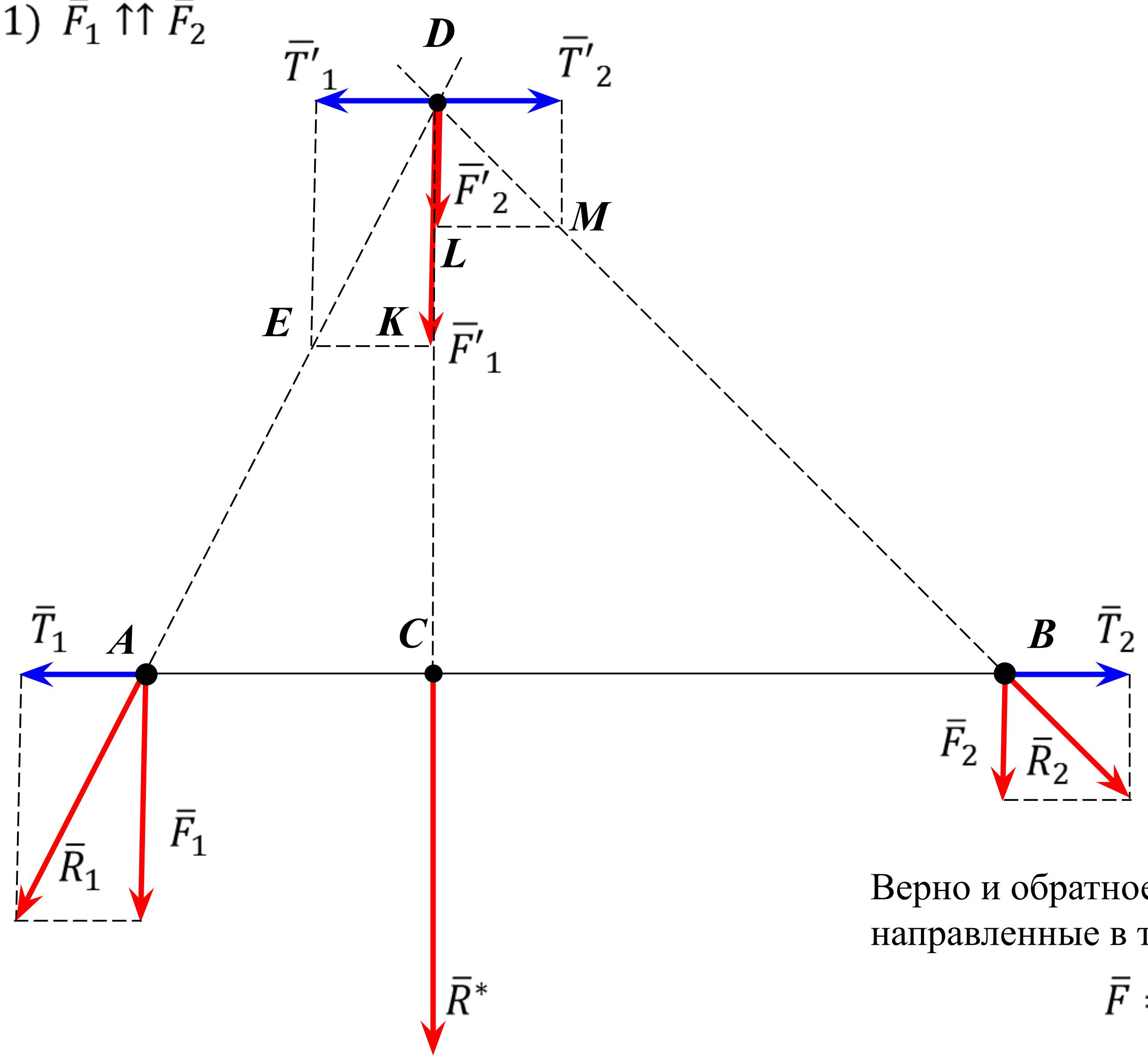
$$\bar{M}_o(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \bar{\imath}(yF_z - zF_y) + \bar{\jmath}(zF_x - xF_z) + \bar{k}(xF_y - yF_x)$$

Формулы для вычисления моментов относительно осей:

$$M_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y; \quad M_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z; \quad M_z(\bar{F}) xF_y - yF_x.$$

Сложение параллельных сил.

1) $\bar{F}_1 \uparrow\uparrow \bar{F}_2$



$$\bar{T}_1 = -\bar{T}_2; \quad (\bar{T}_1, \bar{T}_2) \sim 0$$

$$\bar{F}_1 + \bar{T}_1 = \bar{R}_1; \qquad \bar{F}_2 + \bar{T}_2 = \bar{R}_2$$

$$\bar{R}_1 = \bar{F}'_1 + \bar{T}'_1; \quad \bar{R}_2 = \bar{F}'_2 + \bar{T}'_2;$$

$$(\bar{T}'_1, \bar{T}'_2) \sim 0\,; \qquad \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2 = \bar{R}^*$$

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{T}_1, \bar{T}_2) \sim (\bar{R}_1, \bar{R}_2) \sim$$

$$\sim (\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \bar{T}'_1, \bar{T}'_2) \sim (\bar{F}'_1, \bar{F}'_2) \sim \bar{R}^*$$

Из подобия треугольников ***DEK***, ***DAC*** и ***DLM***, ***DCB***:

$$\frac{AC}{DC} = \frac{T'_1}{F'_1}; \quad \frac{BC}{DC} = \frac{T'_2}{F'_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R^*}$$

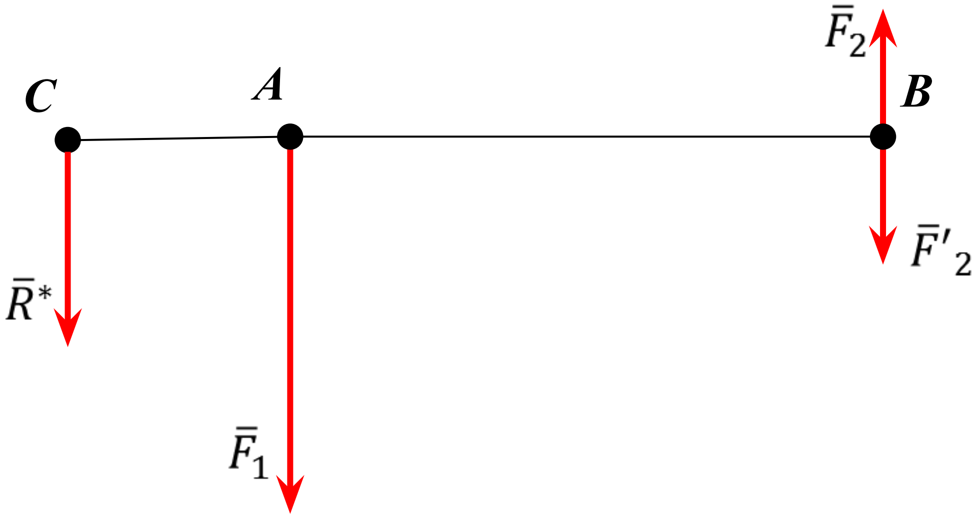
Таким образом, две параллельные силы, направленные в одну сторону, имеют равнодействующую, параллельную им, по модулю равную сумме их модулей и направленную в ту же сторону.

Верно и обратное: силу можно разложить на две параллельные силы, направленные в ту же сторону, бесконечным числом способов.

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2\,; \quad \bar{F} \uparrow\uparrow \bar{F}_1 \uparrow\uparrow \bar{F}_2$$

Сложение параллельных сил. Пара сил.

2) $\bar{F}_1 \downarrow\uparrow \bar{F}_2$; $F_1 \neq F_2$



Разложим силу F_1 на две параллельные $\bar{F}'_2$ и $\bar{R}^*$

$$\bar{F}_1 = \bar{F}'_2 + \bar{R}^*; \quad \bar{F}'_2 = -\bar{F}_2; \quad (\bar{F}'_2, \bar{F}_2) \sim 0$$

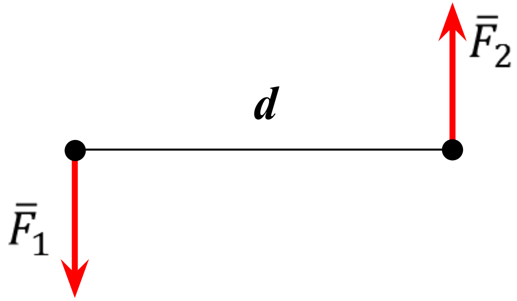
$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim (\bar{F}_2, \bar{F}'_2, \bar{R}^*) \sim \bar{R}^*$$

$$R^* = F_1 - F_2$$

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R^*}$$

Таким образом, две параллельные силы, направленные в противоположные стороны и не равные по модулю, имеют равнодействующую, параллельную им, по модулю равную разности их модулей и направленную в сторону большей силы.

3) $\bar{F}_1 \downarrow\uparrow \bar{F}_2$; $F_1 = F_2$ ***Пара сил*** – система двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны и не направленные вдоль одной прямой.



Кратчайшее расстояние ***d*** между линиями действия сил пары называется ***плечом пары***.

Плоскость, в которой расположены силы пары, называется ***плоскостью пары***.

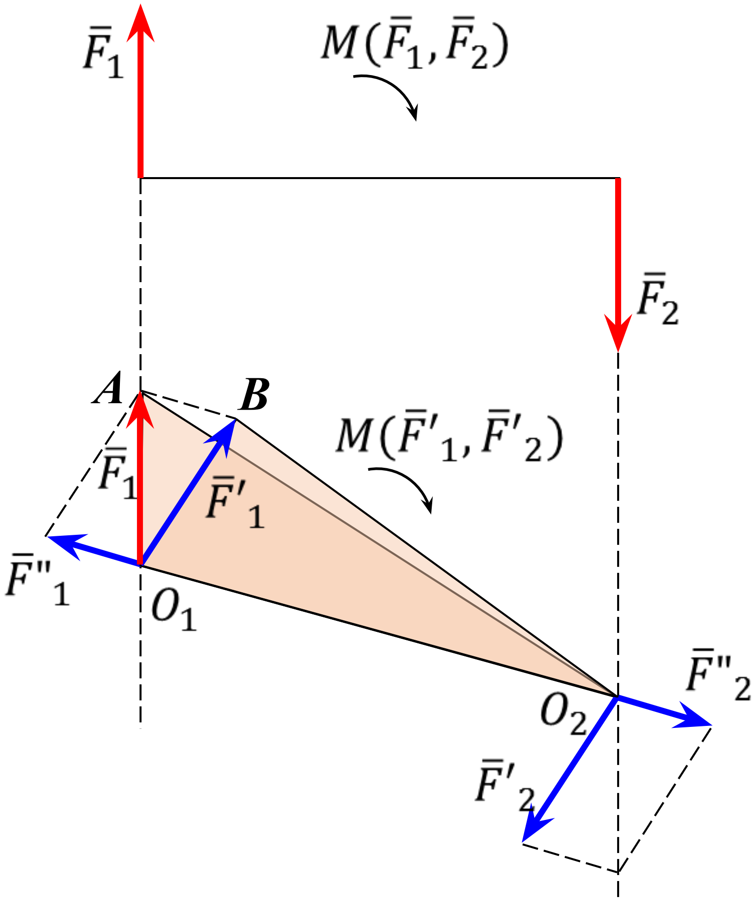
Действие пары сил на тело характеризуется ***моментом пары*** $M(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$.

$$M(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \pm F_1 d$$

Эквивалентность пар.

МГТУ им. Н. Э. Баумана

Теорема. Не изменяя действия пары сил на тело, ее можно переносить куда угодно в плоскости действия, изменять силы и плечо, сохраняя неизменным модуль и направление момента пары сил.



$$\bar{F}_1 = \bar{F}'_1 + \bar{F}"_1; \quad \bar{F}_2 = \bar{F}'_2 + \bar{F}"_2$$

$$\bar{F}'_1 = -\bar{F}'_2\,; \quad \bar{F}"_1 = -\bar{F}"_2\,;$$

$$(\bar{F}"_1,\bar{F}"_2)\sim 0$$

$$(\bar{F}_1,\bar{F}_2)\sim(\bar{F}'_1,\bar{F}'_2,\bar{F}"_1,\bar{F}"_2)\sim(\bar{F}'_1,\bar{F}'_2)$$

$$M(\bar{F}_1,\bar{F}_2) = 2\cdot S_{\Delta O_1AO_2}$$

$$M(\bar{F}'_1,\bar{F}'_2) = 2\cdot S_{\Delta O_1BO_2}$$

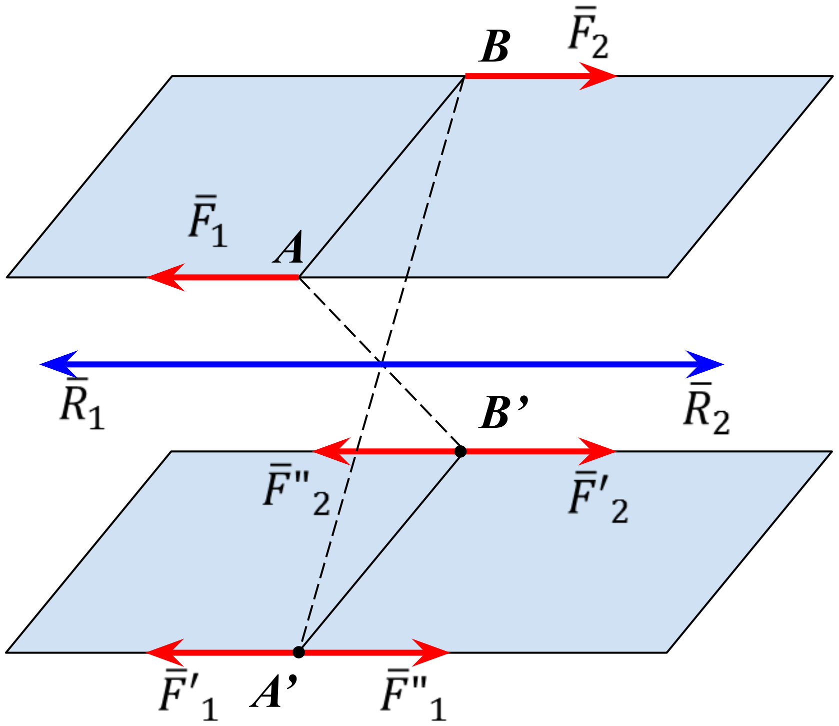
$S_{\Delta O_1AO_2} = S_{\Delta O_1BO_2}$ – общее основание и равные высоты

$$M(\bar{F}_1,\bar{F}_2) = M(\bar{F}'_1,\bar{F}'_2)$$

Направления моментов совпадают.

Перенос пары в параллельную плоскость.

Теорема. Действие пары сил на тело не изменится, если эту пару перенести в параллельную плоскость.



$$(\bar{F}'_1, \bar{F}''_1) \sim 0\,; \quad (\bar{F}'_2, \bar{F}''_2) \sim 0$$

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \bar{F}''_1, \bar{F}''_2)$$

$$\bar{F}'_1 = \bar{F}_1\,; \quad \bar{F}'_2 = \bar{F}_2\,;$$

$$\bar{F}_1 + \bar{F}''_2 = \bar{R}_1$$

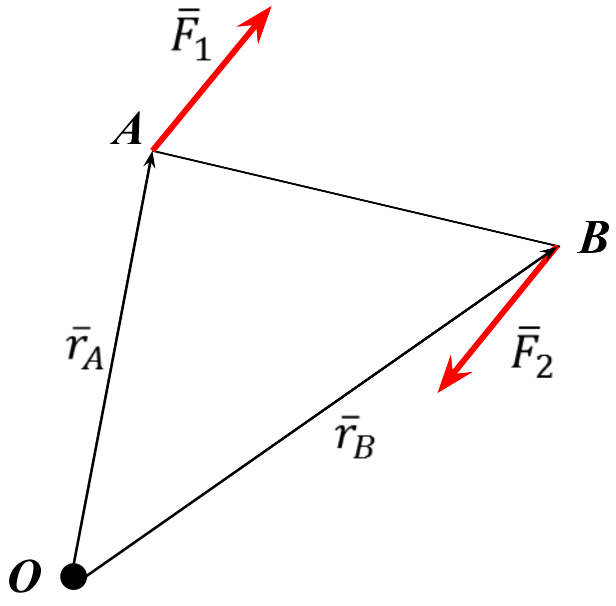
$$\bar{F}_2 + \bar{F}''_1 = \bar{R}_2$$

$$\bar{R}_1 = -\bar{R}_2\,; \qquad (\bar{R}_1, \bar{R}_2) \sim 0$$

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \bar{F}''_1, \bar{F}''_2) \sim$$
$$\sim (\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{F}'_1, \bar{F}'_2,) \sim (\bar{F}'_1, \bar{F}'_2)$$

Векторный момент пары сил.

Векторным моментом пары сил называется вектор, перпендикулярный плоскости пары, направленный в ту сторону, откуда пара стремится повернуть тело против часовой стрелки и численно равный произведению силы пары на ее плечо.



$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$$

$$\bar{M}_o(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \bar{M}_o(\bar{F}_1) + \bar{M}_o(\bar{F}_2) =$$
$$= \bar{r}_A \times \bar{F}_1 + \bar{r}_B \times \bar{F}_2 = \bar{r}_A \times (-\bar{F}_2) + \bar{r}_B \times \bar{F}_2 =$$
$$= (\bar{r}_B - \bar{r}_A) \times \bar{F}_2 = \overline{AB} \times \bar{F}_2 = \overline{BA} \times \bar{F}_1$$

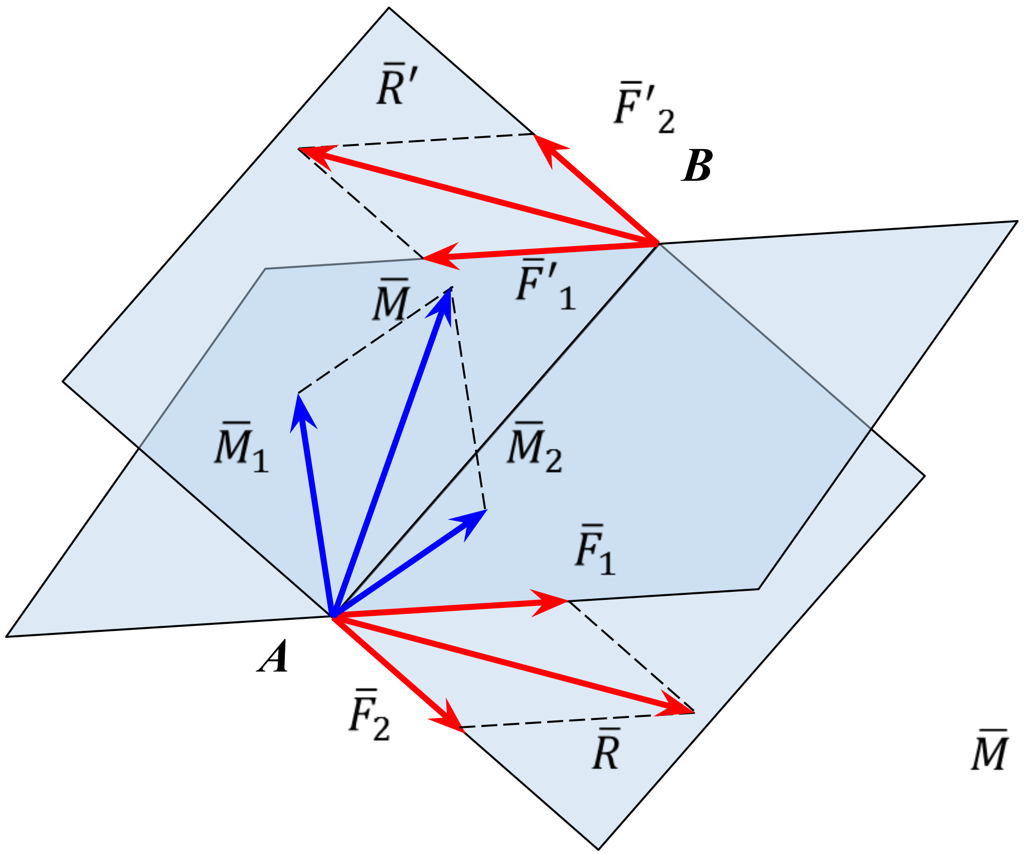
Таким образом, векторный момент пары равен векторному моменту одной из сил пары, вычисленному относительно точки приложения второй силы.

Т.к. точка ***O*** произвольна, то можно считать векторный момент приложенным в любой точке, т.е. ***векторный момент пары сил есть свободный вектор***.

Две пары сил, действующие на твердое тело, эквивалентны, если они имеют одинаковые по модулю и направлению векторные моменты.

Сложение пар сил.

Теорема. Две пары, действующие на твердое тело и лежащие в пересекающихся плоскостях, можно заменить одной эквивалентной парой, векторный момент которой равен сумме векторных моментов исходных пар.



Приведем обе пары к одному плечу ***AB***, расположенному на линии пересечения плоскостей.

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{R}\,; \qquad \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2 = \bar{R}'$$

$$\bar{M}(\bar{R}, \bar{R}_1) = \overline{BA} \times \bar{R} = \overline{BA} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \overline{BA} \times \bar{F}_1 + \overline{BA} \times \bar{F}_2$$

$$\bar{M}(\bar{R}, \bar{R}_1) = \bar{M}(\bar{F}_1, \bar{F}'_1) + \bar{M}(\bar{F}_2, \bar{F}'_2)$$

В общем случае: $\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i$

Условия равновесия системы пар сил:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_x = \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0 \\ M_y = \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0 \\ M_z = \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0 \end{cases}$$