

**Частное и полное приращение функции.
Частные производные. Полный дифференциал.
Применение дифференциала для
приближенных вычислений.**

Семинар 22

Частные приращения функции двух переменных выражаются формулами:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad (1)$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (2)$$

Сообщая аргументу x приращение Δx , а аргументу y приращение Δy , получим для z новое приращение Δz , которое называется полным приращением функции и определяется формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (3)$$

В общем случае, полное приращение не равно сумме частных приращений, то есть

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$$

Частные производные функций нескольких

Определение переменных

Частной производной по x от функции $z=f(x,y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x к приращению Δx при $\Delta x \rightarrow 0$

Обозначения:

$$z'_x, f'_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$$

Таким образом, по определению $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$

Аналогично определяется и обозначается частная производная по y , то есть

$$z'_y, f'_y(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Заметим, что $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y , а $\Delta_y z$ при неизменном x . Тогда определения частных производных можно сформулировать так:

Частной производной по x от функции $z=f(x,y)$ называется производная по x , вычисленная в предположении, что $y=const$.

Частной производной по y от функции $z=f(x,y)$ называется производная по y , вычисленная в предположении, что $x=const$.

Полное приращение и полный дифференциал

Полное приращение выражается для $z=f(x,y)$ следующей формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1)$$

Определение

Функция $z=f(x,y)$, полное приращение которой в данной точке (x,y) может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: выражения, линейного относительно Δx и Δy , и величины бесконечно малой высшего порядка относительно Δx и Δy , называется дифференцируемой в данной точке, а линейная часть приращения называется полным дифференциалом и обозначается через dz или df .

Если функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в данной точке, то она дифференцируема в данной точке и имеет полный дифференциал

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$$

Имеет место $\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ и с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно $\Delta \rho$ можно написать следующее приближенное равенство:

$$\Delta z \approx dz$$

Приращения независимых переменных $\Delta x, \Delta y$ называем дифференциалами независимых переменных x, y и обозначаем dx, dy соответственно. Тогда выражение полного дифференциала принимает вид $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x,y) . Найдем полное приращение этой функции $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$, тогда $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \Delta z$ (1). Мы имеем приближенную формулу $\Delta z \approx dz$ (2), где $dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$ (3).

Подставляя в формулу (1) вместо Δz выражение dz получаем приближенную формулу $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y$ (4) верную с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно $\Delta x, \Delta y$.

Примеры с решениями

1. Найти частные и полное приращение функции $z=xy$

Решение

$$z=xy$$

$$\Delta_x z = (x + \Delta x) - xy = y\Delta x$$

$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

2. Найти частные производные функций:

1) $z = x^2 \sin y$

Решение $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y; \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$

2) $z = x^y$

Решение $z = x^y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

3) $z = e^{x^2+y^2}$

Решение $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$

4) $u = x^2 + y^2 + xtz^3$

Решение $u = x^2 + y^2 + xtz^3 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3; \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2; \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3$

3. Найти дифференциалы функций:

$$1) z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$$

Решение

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

Следовательно,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

4. Вычислить приближенно $\sqrt{\sin^2 1,55 + 8e^{0,015}}$, исходя из значения функции

$$z = \sqrt{\sin^2 x + 8e^y} \text{ при } x = \pi/2 \approx 1,571, y = 0$$

Решение.

Искомое число есть наращенное значение функции z при

Найдем значение z при $x = \pi/2, y = 0$; имеем $z = \sqrt{\sin^2(\pi/2) + 8e^0} = 3$. Находим приращение функции: $\Delta x = 0,021, \Delta y = 0,015$.

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = \frac{\sin 2x \Delta x + 8e^y \Delta y}{2\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}} = \frac{8 \cdot 0,015}{6} = 0,02, \text{ следовательно}$$

$$\sqrt{\sin^2 1,55 + 8e^{0,015}} \approx 3,02$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти частные и полное приращение функций:

$$1) z = \ln(x + y); \dots 2) z = e^x (\cos y + x \sin y); \dots 3) u = e^{xyz}$$

2. Найти частные производные функций:

$$z = \frac{x}{y}; z = \ln(x^2 + y^2) \cdot (x + y); z = \operatorname{Arccctg} \frac{x}{y}; z = e^{\frac{x}{y}}; z = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}; z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}); u = x + \frac{x - y}{y - z};$$

$$u = \ln(xy + xz + yz); u = e^{\sin(xyz)}; u = \sin \frac{x + y + z}{xyz}$$

3. Найти дифференциалы функций:

$$1) z = \ln \operatorname{tg}(y/x); \dots 2) z = \sin(x^2 + y^2); \dots 3) u = \ln(z + \sqrt{x^2 + y^2}); \dots 4) u = xyz e^{x+y+z}$$

4. Вычислить приближенно:

$$a) (1,02)^3 \bullet (0,97)^2$$

$$b) \sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$$

$$c) \sqrt{5e^{0,02} + 2,03^2}$$