Практика №6 (5117)

СПОСОБ ПРИВЕДЕНИЯ МАТРИЦЫ К СТУПЕНЧАТОМУ ВИДУ

Была задана домашняя работа (на отдельных листах)

1) Решить задачу 3 своего варианта

РГР .

2) Решить **одну** систему из задачи 3 своего варианта
РГР
с помощью обратной матрицы.

Способ приведения матрицы к ступенчатому виду

ШАГ 1) Выбираем в первой строке элемент, не равный нулю: $a_{11} \neq 0$.

Если $a_{11} = 0$, то переставим на место первого столбца тот столбец, который содержит ненулевой элемент в первой строке.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} :a_{11} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Назовем a_{11} главным(ведущим) элементом первого шага и разделим на него все элементы первой строки, то есть выполним элементарное преобразование строк №2. Матрица примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ВОПРОС:
что делать, если в первой строке нет элемента, не равного нулю ?!

$$A=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-a_{21})\\ +\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Чтобы превратить в ноль второй элемент столбца, умножим первую строку на $(-a_{21})$ и сложим ее со второй, то есть выполним элементарное преобразование строк №3:

$$A=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-a_{31})\\ +\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Умножая поочередно на $(-a_{31}), \dots (-a_{m1})$ первую строку и складывая результат с нужной строкой, превратим в нули все остальные элементы первого столбца:

$$A=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если остальные строки стали нулевыми, то процесс заканчивается; если в строках ниже первой остался ненулевой элемент, то переходим к следующему шагу.

ШАГ 2) состоит в применении к матрице

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

процедуры первого шага.

Повторяя шаги, получим ступенчатую форму матрицы.

Пример

Привести матрицу к ступенчатому виду: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

ШАГ 1) $a_{11} = 1 \neq 0$. Чтобы превратить в ноль второй элемент столбца,

надо умножить первую строку на $(-a_{21}) = -2$ и сложить со второй :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \times (-2) + \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 + 1 \cdot (-2) & 3 + 2 \cdot (-2) & 4 + 3 \cdot (-2) \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ \boxed{4} & 5 & 7 \end{pmatrix} \times (-4) + \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 + 1 \cdot (-4) & 5 + 2 \cdot (-4) & 7 + 3 \cdot (-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix};$$

ШАГ 1) закончен, переходим к ШАГУ 2).

ШАГ 2) $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ Ведущий элемент равен -1, поэтому разделим строку на -1. Нулевые элементы первого столбца матрицы A не изменятся, и можно их не отбрасывать:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} : (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-3} & -5 \end{pmatrix} \times 3 \; + \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 + 1 \cdot 3 & -5 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Получили три ненулевых строки, поэтому $\operatorname{rang} A = 3$.

Теорема Кронекера-Капелли

Если к матрице системы A приписать справа столбец правых частей B,

отделив его от основной матрицы вертикальной чертой, то получим

РАСШИРЕННУЮ матрицу системы P: $P = (A|B)$

$$P = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Найдем ее ранг : rang P.

Справедлива ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ:

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ **СОВМЕСТНА** ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА

РАНГ ОСНОВНОЙ МАТРИЦЫ РАВЕН РАНГУ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ:

$$\text{rang } A = \text{rang } P = r.$$

Число r назовем рангом системы.

Пример

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$P = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ \boxed{2} & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \times(-2) \; + \sim$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 + 1\cdot(-2) & -1 + 2\cdot(-2) & 1 + 3\cdot(-2) & -2 + (-1)\cdot(-2) \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ \boxed{1} & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \times(-1) \; + \sim$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 1 + 1\cdot(-1) & -3 + 2\cdot(-1) & -2 + 3\cdot(-1) & 3 + (-1)\cdot(-1) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right) : (-5) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & -5 & 4 \end{array}\right) \times 5 \; + \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$P = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\operatorname{rang} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2;$$

$$\operatorname{rang} P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 3;$$

$2 \neq 3 \quad \Rightarrow$ по теореме Кронекера – Капелли система несовместна

ОТВЕТ : нет решений.

Домашняя работа

1) Определить ранг матрицы и базисный минор:

$$\times\left(-a_{21}\right)$$

2) По теореме Кронекера – Капелли проверить совместность систем уравнений :

$$+$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3) Решить систему уравнений методом обратной матрицы:

Умножая поочередно на $\left(-a_{31}\right),\ldots\left(-a_{m1}\right)$ первую строку и складывая результат с нужной строкой, превратим в нули все остальные элементы первого столбца: