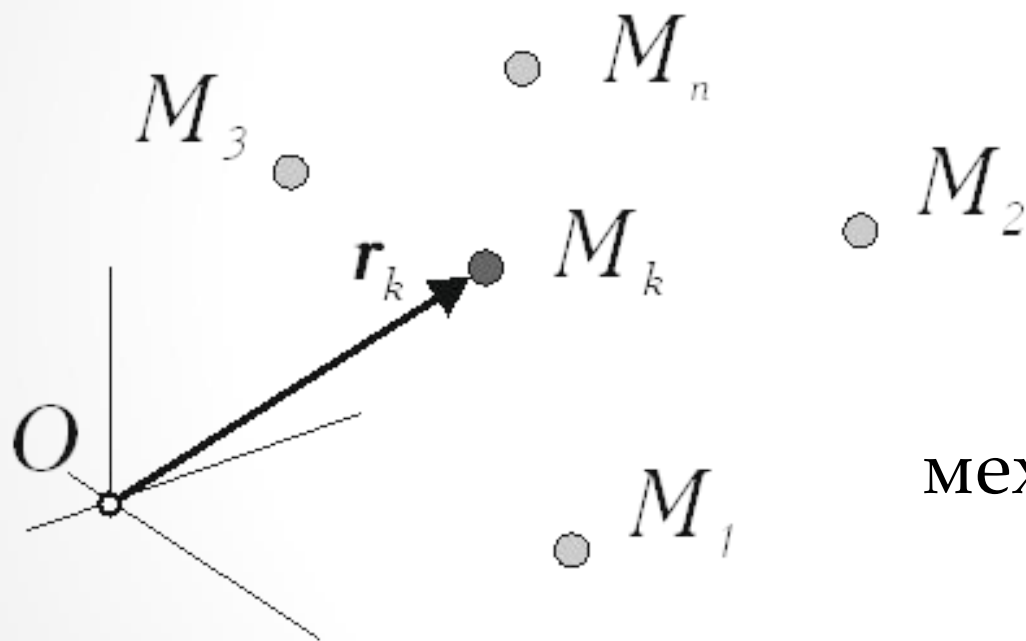


Общие теоремы динамики механической системы

Механическая система

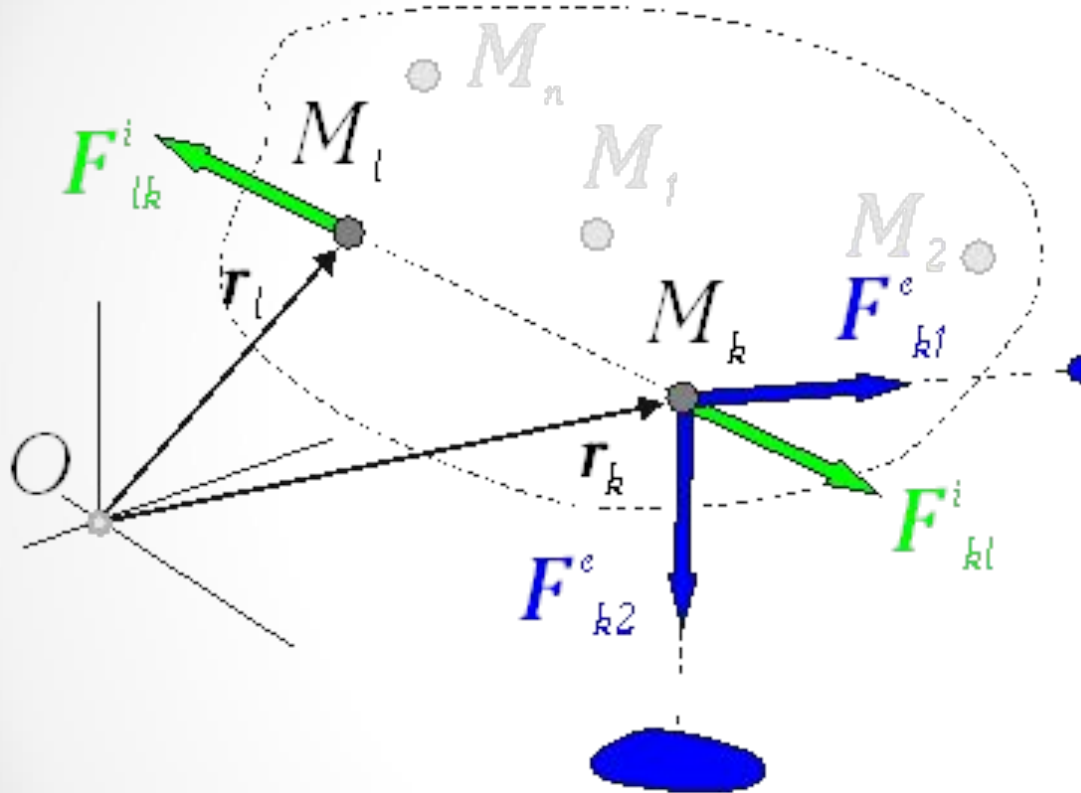
$$M_k, \quad m_k, \quad \bar{r}_k, \quad k = 1, \dots, n$$



Масса
механической системы

$$M = \sum_{k=1}^n m_k > 0$$

Внутренние и внешние силы



Внешние силы

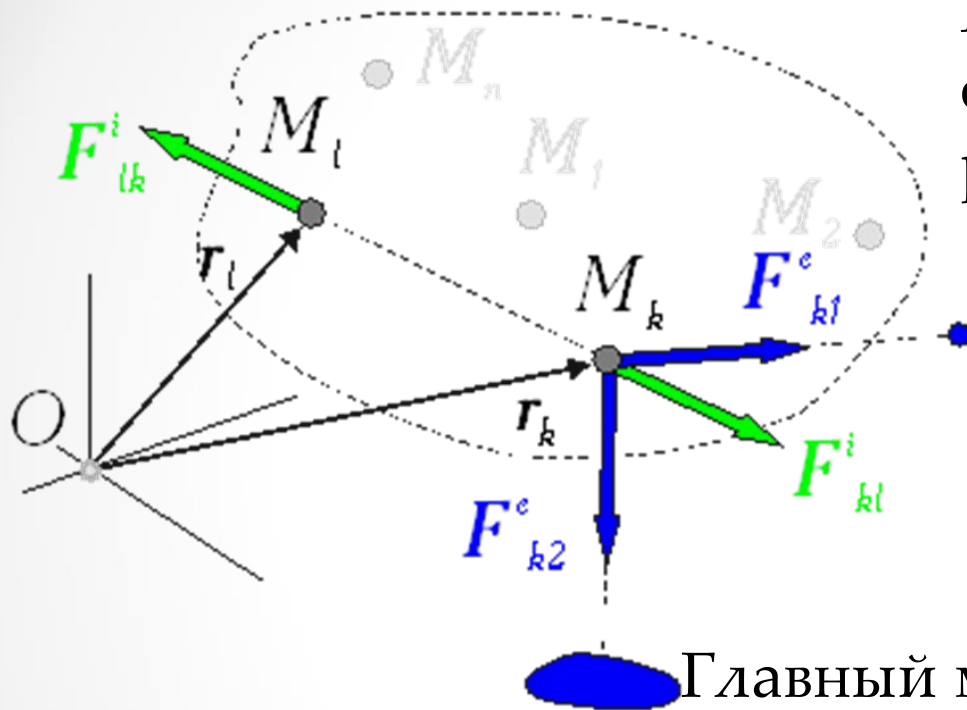
$$e \Rightarrow \bar{F}_k^e, \bar{R}_k^e$$

Внутренние силы

$$i \Rightarrow \bar{F}_k^i, \bar{R}_k^i$$

$$\bar{F}_{kl}^i = -\bar{F}_{lk}^i$$

Свойства внутренних сил



Главный вектор внутренних сил механической системы равен нулю

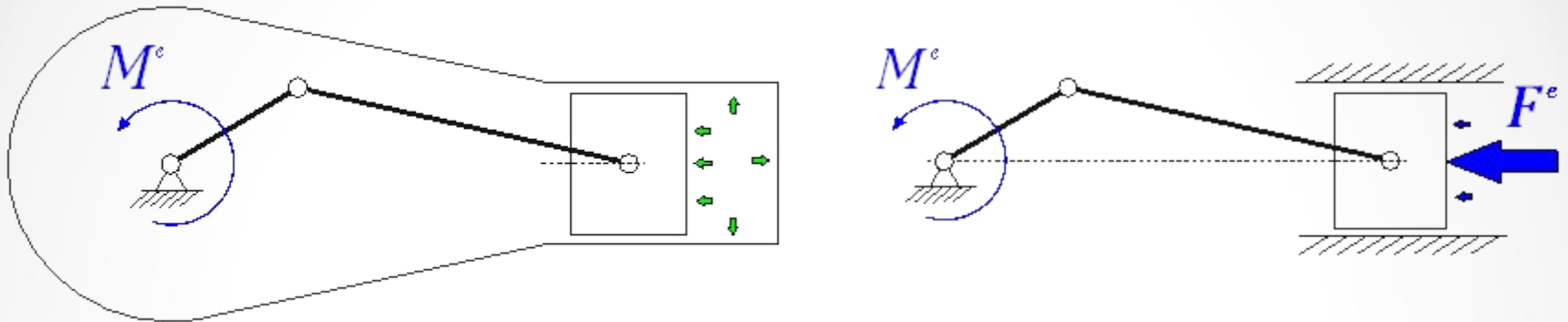
$$\bar{F}_{kl}^i = -\bar{F}_{lk}^i$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{F}_{kl}^i = \sum_{k,l=1}^n \bar{F}_{kl}^i = \bar{R}^i = 0$$

Главный момент внутренних сил механической системы относительно любой точки равен нулю

$$\bar{M}_O^i = \sum_{k,l=1}^n \bar{m}_O \left(\bar{F}_{kl}^i \right) = \sum_{k,l=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_{kl}^i = 0$$

Внутренние и внешние силы



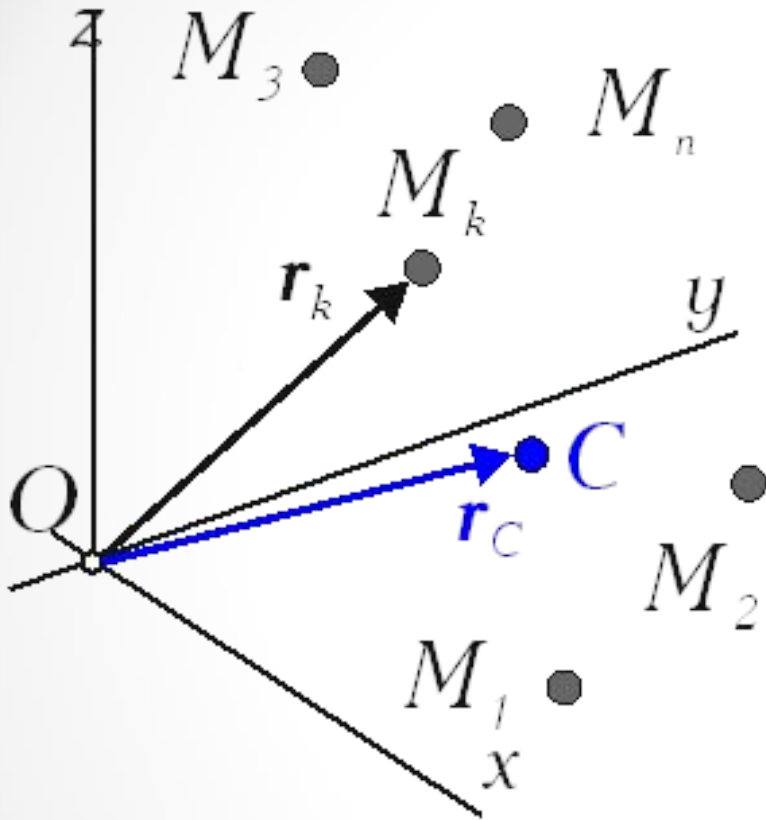
Дифференциальные уравнения движения
механической системы

$$m_k \bar{w}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{R}_k^e + \bar{R}_k^i, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\bar{R}_k^e, \bar{R}_k^i = ? \quad k = 1, \dots, n$$

Центр масс

Центром масс механической системы называется геометрическая точка, положение которой определяется следующим образом



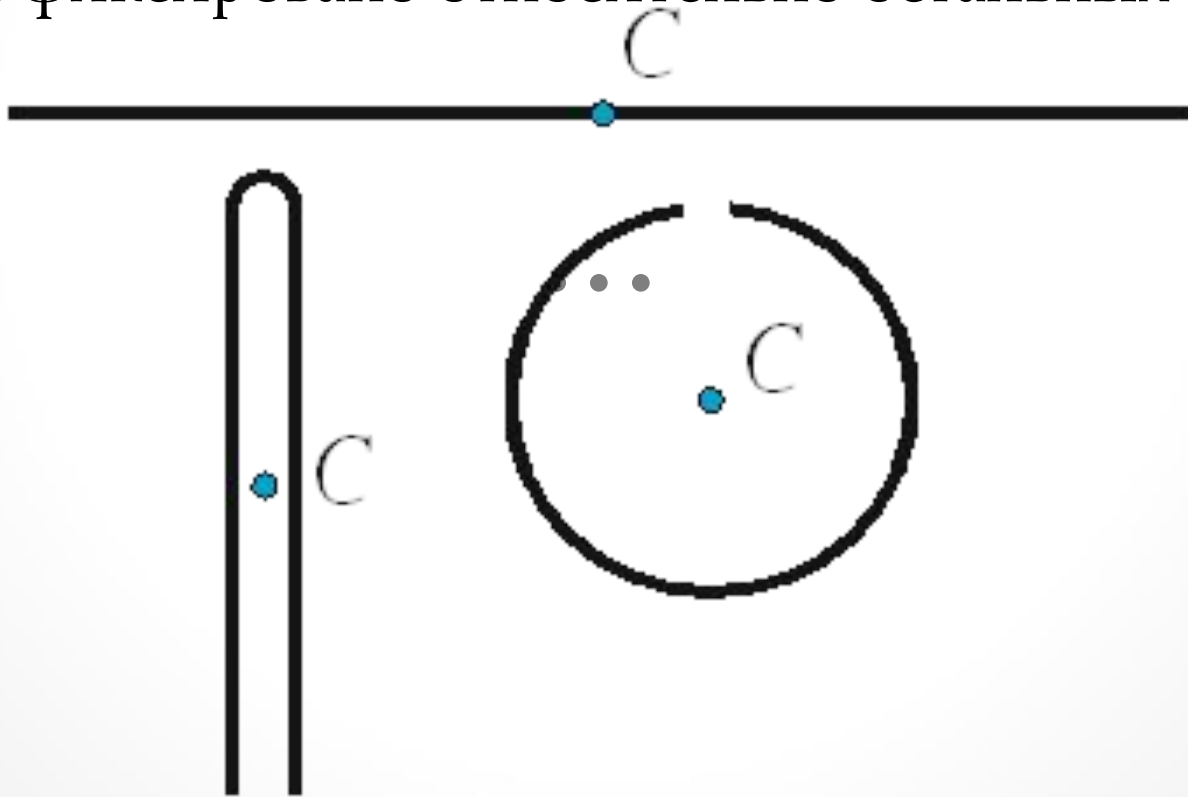
$$\bar{\mathbf{r}}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{\mathbf{r}}_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \bar{\mathbf{r}}_k$$

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k, y_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k y_k, z_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k.$$

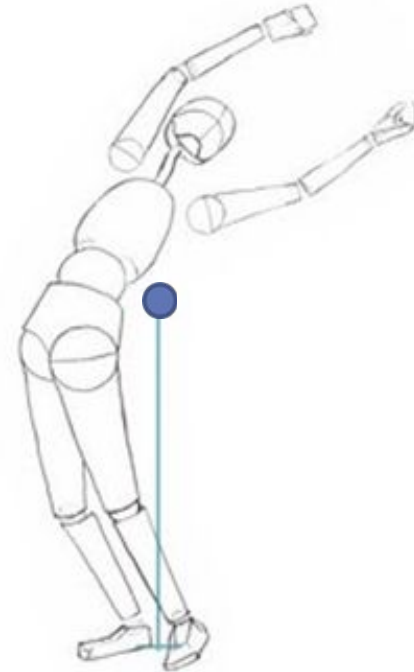
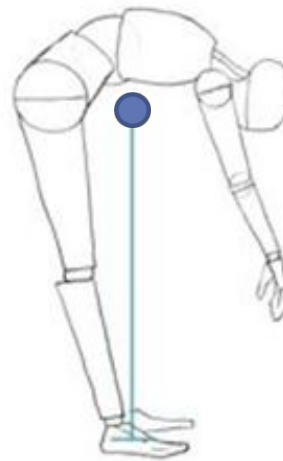
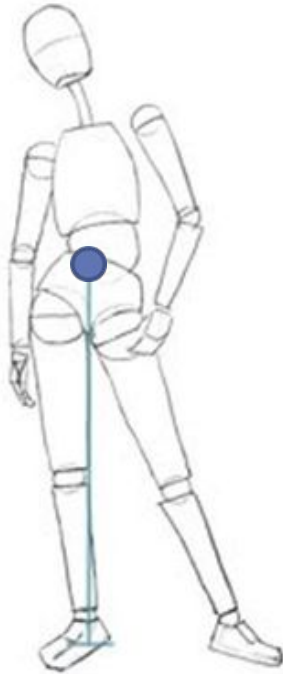
Центр масс

В изменяемой механической системе центр масс не связан ни с какой физической точкой.

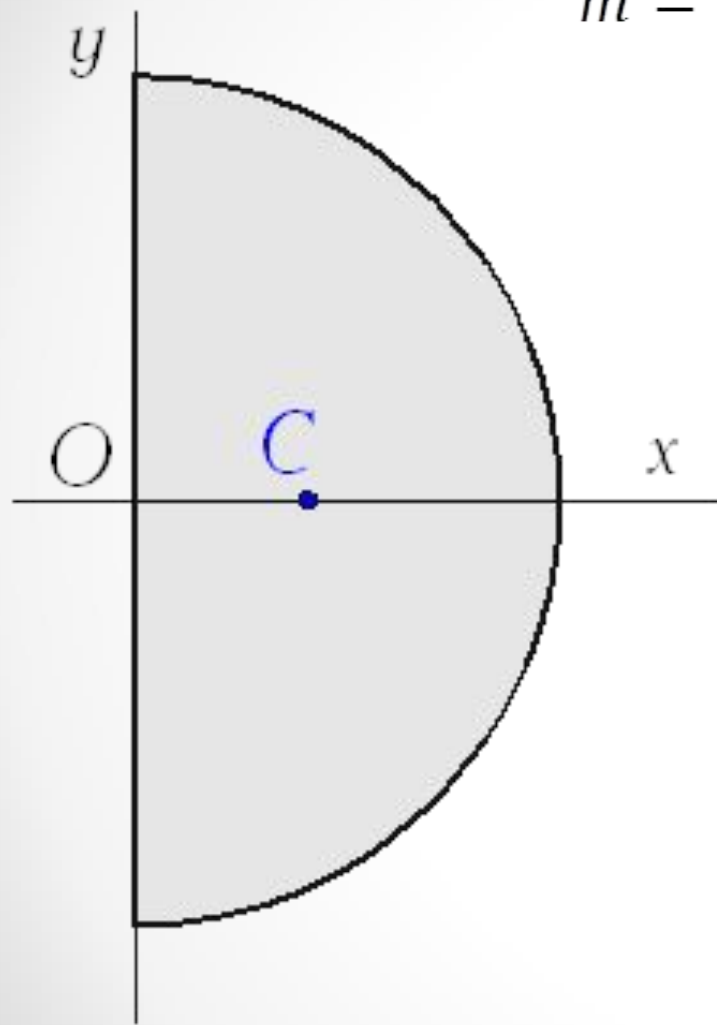
В абсолютно твердом теле положение центра масс фиксировано относительно остальных точек.



Центр масс



Центр масс



$$m = \sum_{k=1}^n m_k \Rightarrow m = \iint_D \gamma dx dy, \quad [\gamma] = \frac{\kappa \tau}{M^2}$$

$$S_x = \sum_{k=1}^n m_k x_k \Rightarrow S_x = \iint_D \gamma x dx dy$$

$$\iint_D \gamma x dx dy = \iint_{D'} \gamma \rho \sin \varphi \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^R \gamma \rho^2 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \gamma \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R \cos \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2\gamma R^3}{3}$$

$$x_C = \frac{S_x}{m} = \frac{4R}{3\pi}$$

Теорема о движении центра масс механической системы

Центр масс механической системы движется так, как двигалась бы точка, масса которой равна массе механической системы, под действием одной силы, равной главному вектору всех внешних сил, приложенных к точкам и телам системы.

$$M\ddot{\bar{w}}_C = \bar{R}^e \quad \left\{ \begin{array}{l} M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e = R_x^e; \\ M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e = R_y^e; \\ M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e = R_z^e. \end{array} \right.$$

Теорема о движении центра масс механической системы

$$m_k \bar{w}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{w}_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i$$


$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e = \bar{R}^e,$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = \bar{R}^i = 0$$

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{w}_k = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k = \frac{d^2}{dt^2} M \bar{r}_C = M \bar{w}_C$$

Теорема о движении центра масс механической системы

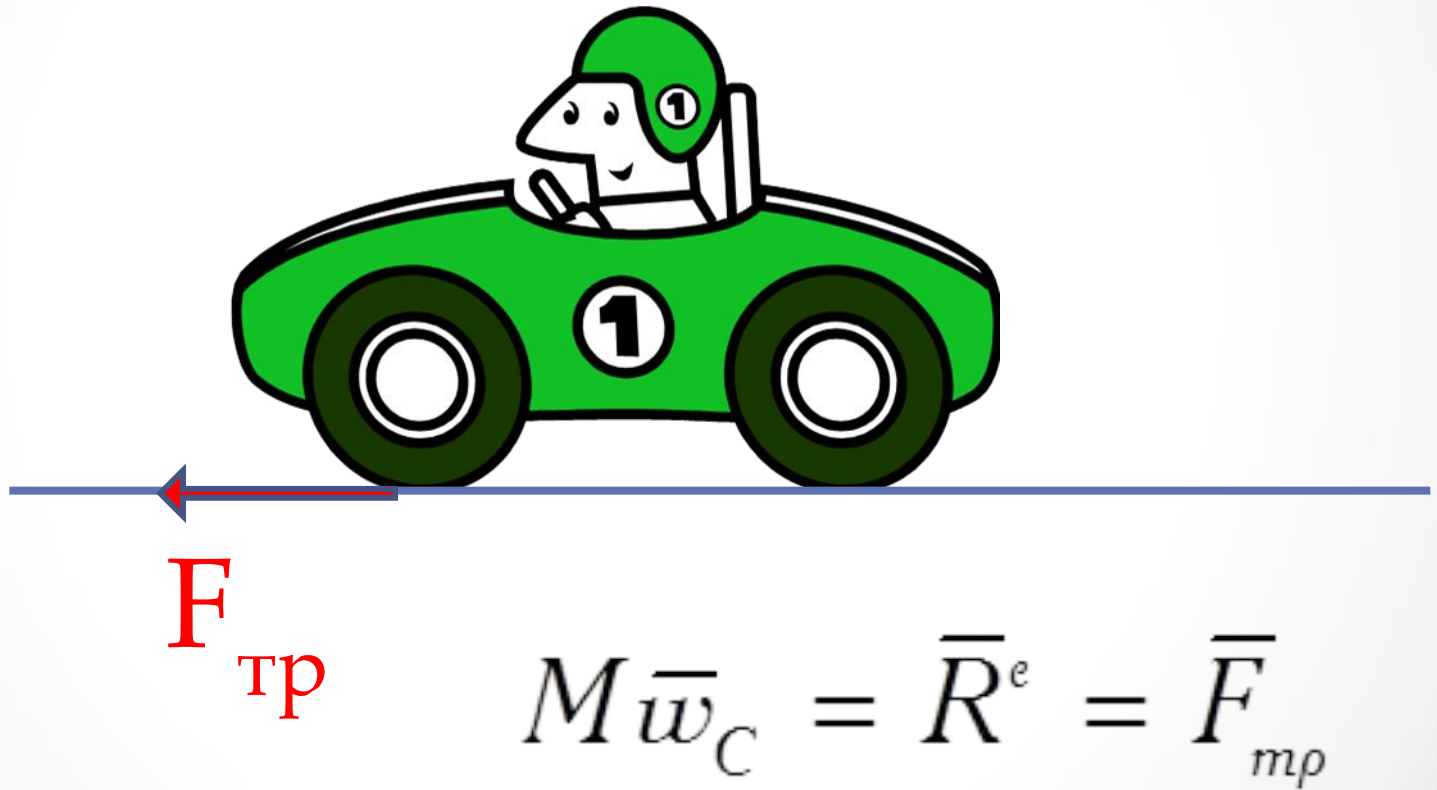
Следствие 1. Если главный вектор внешних сил, приложенных к точкам и телам механической системы, равен нулю, то центр масс этой системы или покоится, или движется равномерно и прямолинейно.

$$\bar{R}^e = 0 \Rightarrow M\bar{w}_C = 0 \Rightarrow \bar{v}_C = const$$

Следствие 2. Если проекция главного вектора внешних сил, приложенных к точкам и телам механической системы, на какую-то ось равна нулю, то проекция центра масс этой системы на эту ось или остается в покое, или движется вдоль оси равномерно и прямолинейно.

$$R_x^e = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0 \Rightarrow M\ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = const$$

Следствие 3. Внутренние силы не могут непосредственно изменить движения центра масс механической системы.



Главный вектор количества движения механической системы

Для материальной точки $\bar{Q} = m\bar{v}$

Для механической системы

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \bar{Q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k = \frac{d}{dt} M \bar{r}_C = M \bar{v}_C\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C ;$$

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k = M \bar{v}_C ;$$

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{\omega}_k = M \bar{\omega}_C .$$

Теорема об изменении количества движения механической системы

Полная производная по времени от главного вектора количества движения механической системы по величине и направлению совпадает с главным вектором внешних сил, приложенных к точкам и телам этой системы.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e$$

Доказательство

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{d}{dt} M \bar{v}_C = M \bar{w}_C = \bar{R}^e$$

Следствие 1. Если главный вектор внешних сил, приложенных к точкам и телам механической системы, равен нулю, то главный вектор количества движения этой системы остается неизменным.

$$\bar{R}^e = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{Q} = const$$

Следствие 2. Если проекция главного вектора внешних сил, приложенных к точкам и телам механической системы, на какую-то ось равна нулю, то проекция главного вектора количества движения системы на эту ось остается неизменной.

$$R_x^e = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0 \Rightarrow \frac{dQ_x}{dx} = 0 \Rightarrow Q_x = const$$

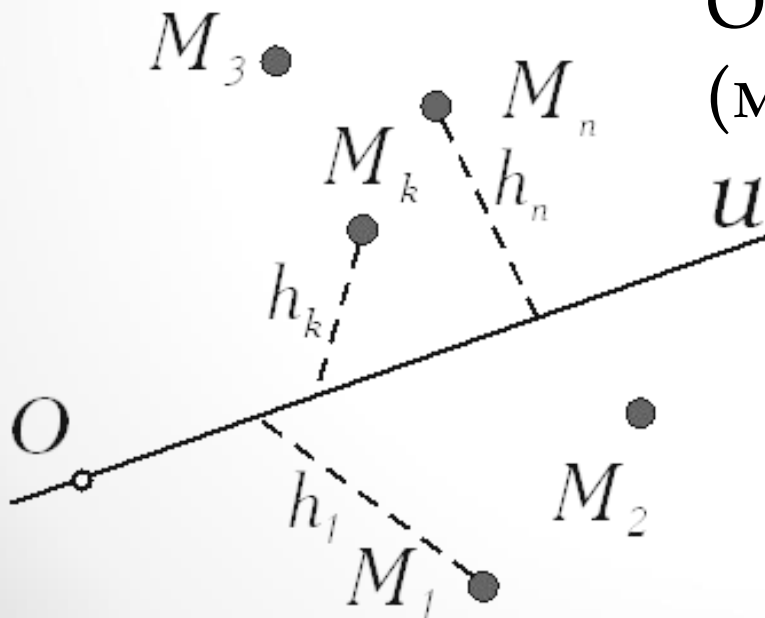
Следствие 3. Внутренние силы не могут непосредственно изменить главный вектор количества движения механической системы.

Геометрия масс

Статические моменты инерции
(моменты первого порядка)

$$S_x = \sum_{k=1}^n m_k x_k, \quad S_y = \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad S_z = \sum_{k=1}^n m_k z_k \Rightarrow x_C = \frac{S_x}{M}$$

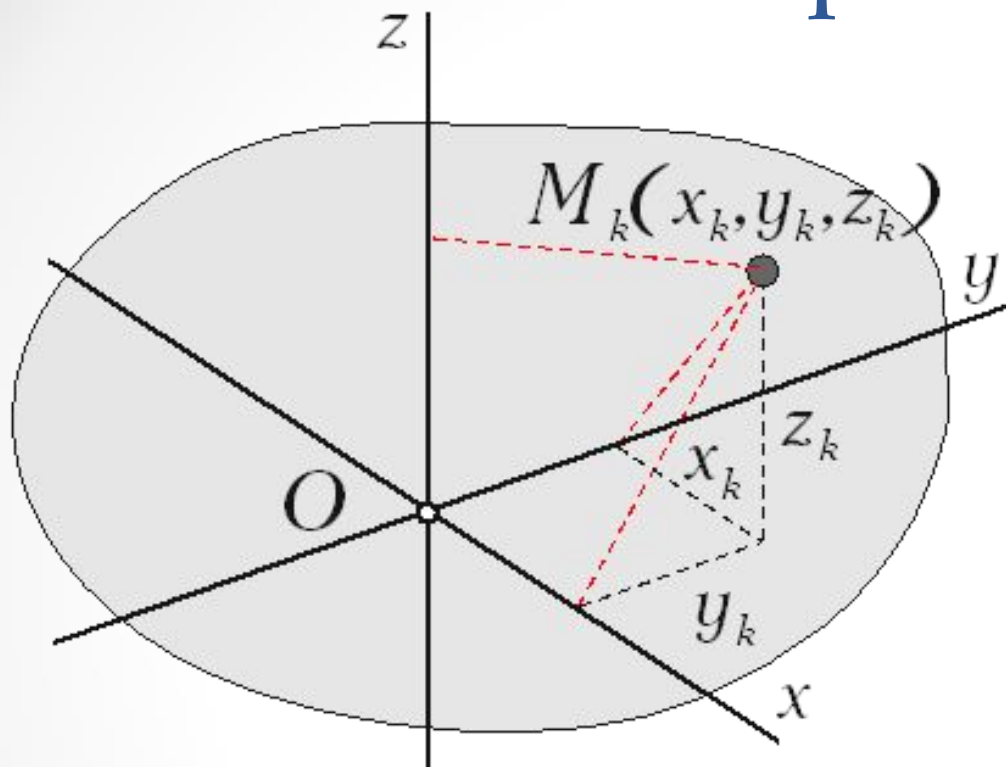
Осевой момент инерции
(момент второго порядка)



$$I_u = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2$$

Моменты второго порядка

Осевые



$$I_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2) ,$$

$$I_y = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2) ,$$

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

Центробежные

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k , \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k , \quad I_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k$$

Свойства моментов второго порядка

1. О севой момент невырожденного положительное число.

$$I_z > 0$$

2. Сумма моментов инерции относительно любых осей не меньше момента о третьей оси.

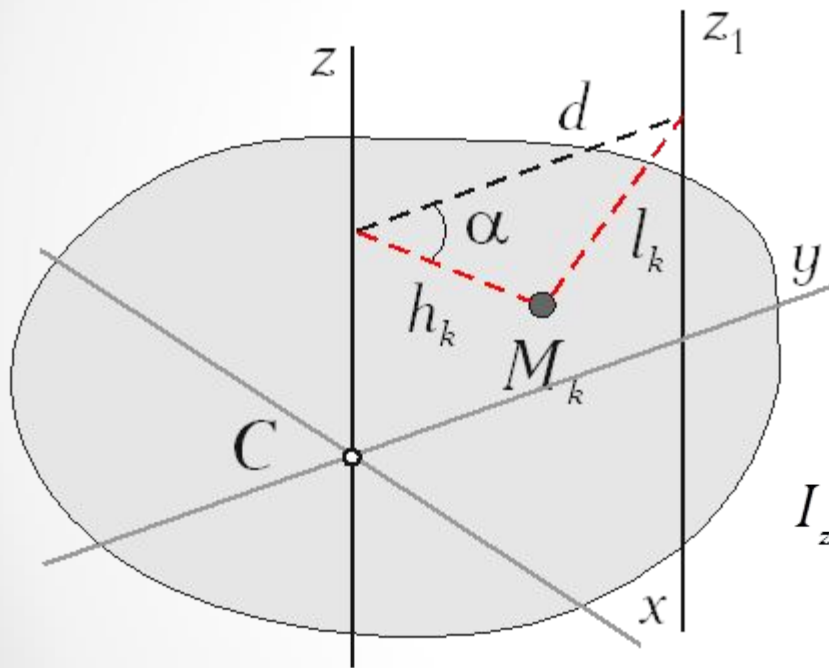
$$I_x + I_y \geq I_z$$

3. Сумма моментов относительно 1 проходящих через одну и ту же точку, от направления этих осей

$$I_x + I_y + I_z = \text{const} = 2I_0$$

Теорема Гюйгенса – Штейнера

Момент инерции твердого тела относительно выбранной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной выбранной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на расстояние между осями



$$I_{z1} = I_z + Md^2$$

$$I_{z1} = \sum_{k=1}^n m_k l_k^2,$$

$$l_k^2 = d^2 + h_k^2 - 2dh_k \cos \alpha = d^2 + h_k^2 - 2dy_k$$

$$I_{z1} = \sum_{k=1}^n m_k (d^2 + h_k^2 - 2dy_k) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) d^2 + \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 - 2d \sum_{k=1}^n m_k y_k$$

$$= M d^2 + \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 - 2d \sum_{k=1}^n m_k y_k$$

$$= M d^2 + \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 - 2d m y_C = 0$$

1. Из моментов инерции относительно параллельных осей наименьшим будет момент относительно оси, проходящей через центр масс тела (центральной оси).

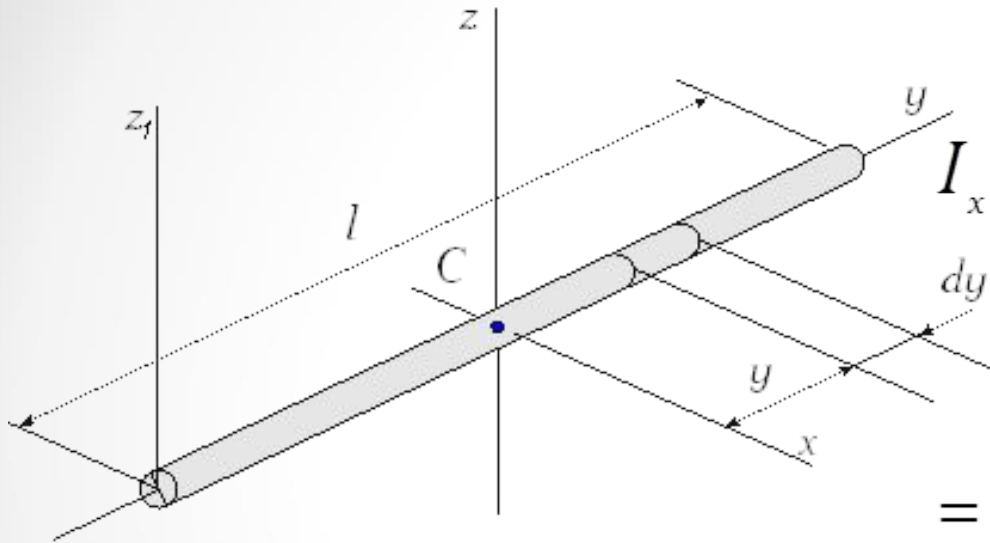
$$2. \quad I_{z1} = I_z + Md_1^2, \quad I_{z2} = I_z + Md_2^2$$



$$I_{z2} = I_{z1} + M(d_2^2 - d_1^2)$$

Моменты инерции стержня

$$I_y = 0$$

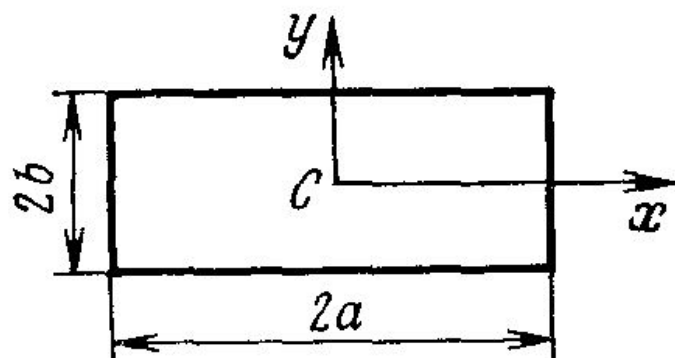


$$I_x = I_z = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y^2 dm = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y^2 dy =$$

$$= \frac{m}{l} \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{ml^2}{12}$$

$$I_{z1} = I_z + md^2 = \frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

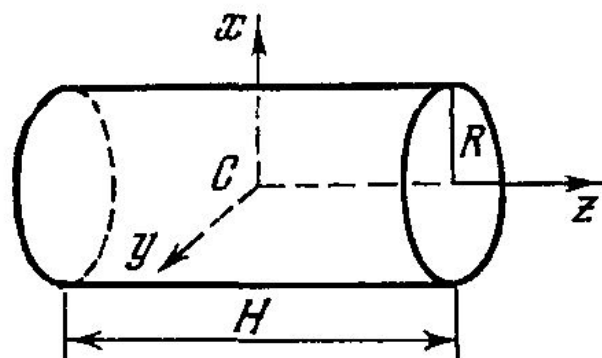
Площадь прямоугольника



$$I_x = \frac{1}{3} M b^2, \quad I_y = \frac{1}{3} M a^2,$$

$$I_{cz} = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2)$$

Прямой круглый цилиндр



$$I_x = I_y = \frac{1}{4} M \left(\frac{1}{3} H^2 + R^2 \right), \quad I_z = \frac{1}{2} M R^2$$