Элементы комбинаторики

Примеры комбинаторных задач

- Задачи , решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций , называются **комбинаторными**
- Раздел математики , в котором рассматриваются подобные задачи, называют **комбинаторикой**
- Слово «комбинаторика» от латинского combinare - «соединять , сочетать»

Пример 1

- Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека-Антонов, Григорьев , Сергеев и Федоров , тренер выделяет пару для участия в соревнованиях . Сколько существует вариантов выбора такой пары?
- АГ, АС, АФ
- ГС, ГФ
- СФ
- Значит, всего существует шесть вариантов выбора
- Способ рассуждений , которым мы воспользовались , называют **перебором возможных вариантов**

Пример 2

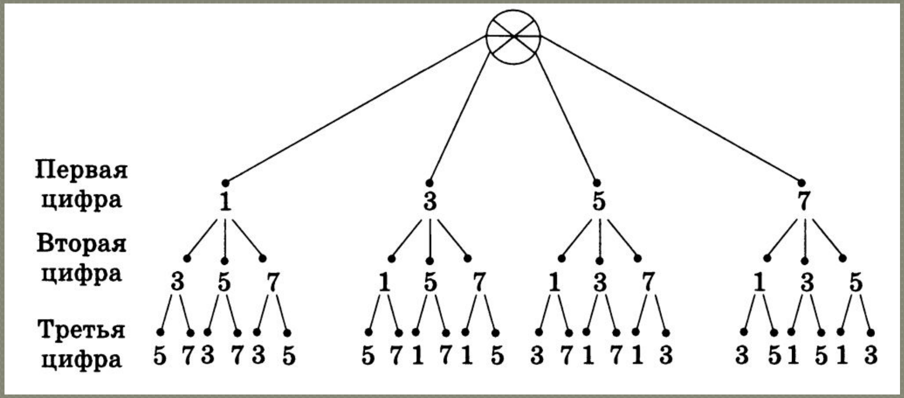
Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7 ,используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

Чтобы ответить на вопрос задачи , выпишем все такие числа . Полученные результаты запишем в четыре строки , в каждой из которых шесть чисел:

135	137	153	157	173	175
315	317	351	357	371	375
513	517	531	537	571	573
713	715	731	735	751	753

Способ второй

- Проведенный перебор вариантов проиллюстрирован на схеме



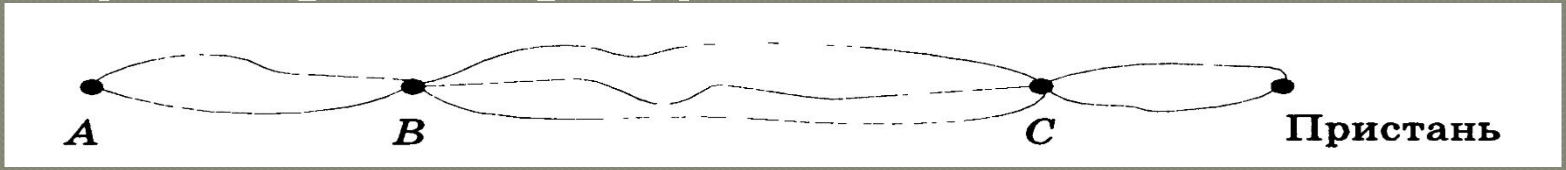
- Такую схему называют деревом возможных вариантов

Способ третий

- Первую цифру можно выбрать четырьмя способами . Так как после выбора первой цифры останутся три , то вторую цифру можно выбрать уже тремя способами. Наконец , третью цифру можно выбрать двумя способами. Следовательно , общее число искомых чисел равно произведению 4*3*2,т.е.24
- Использовалось комбинаторное правило умножения:
- Пусть имеется n элементов и требуется выбрать из них один за другим k элементов. Если первый элемент можно выбрать n1 способами, после чего второй элемент можно выбрать n2 способами из оставшихся, затем третий элемент можно выбрать n3 способами из оставшихся и т. д., то число способов, которыми могут быть выбраны все k элементов, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пример 3

- Из города А в город В ведут две дороги, из города В в город С – три дороги , из города С до пристани- две дороги . Туристы хотят проехать из города А через В и С к пристани . Сколькими способами они могут выбрать маршрут?



- Решение: 2*3*2=12

Задачи

- 1. В кафе предлагают два первых блюда :борщ , рассольник-и четыре вторых блюда: гуляш, котлеты, сосиски, пельмени. Укажите все обеды из двух блюд, которые может заказать посетитель . Построить дерево возможных вариантов
- 2. Стадион имеет четыре входа: A, B, C, D. Укажите все возможные способы, какими посетитель может войти через один вход, а выйти через другой. Сколько таких способов?
- Ответ:12 способов
- 3. Используя цифры 0,2,4,6 составьте все возможные трехзначные числа, в которых цифры не повторяются.

Задачи

- 4. В шахматном турнире участвуют 9 человек. Каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?
- Ответ:36 партий
- 5. При встрече 8 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?
- Ответ:28 рукопожатий
- 6. Учащиеся 9 класса решили обменяться фотографиями. Сколько фотографий для этого потребуется, если в классе 24 учащихся?
- Ответ:552 фотографии

Задачи

- 7. В кафе имеются три первых блюда , пять вторых блюд и два третьих. Сколькими способами посетитель кафе может выбрать обед , состоящий из первого , второго и третьего блюд?
- Ответ:30 способов
- 8. Петр решил пойти на новогодний карнавал в костюме мушкетера. В ателье проката ему предложили на выбор различные по фасону и цвету предметы: пять видов брюк , шесть камзолов , три шляпы , две пары сапог . Сколько различных карнавальных костюмов можно составить из этих предметов?
- Ответ:180 костюмов

Перестановки

- Простейшими комбинациями , которые можно составить из элементов конечного множества , являются перестановки
- Число перестановок из n элементов обозначают символом Pn(читается «P из n»)

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)\,n$$

- Для произведения первых n натуральных чисел используют специальное обозначение: n! (читается n факториал)
- 2!=2; 5!=120; 1!=1

Примеры задач

- Таким образом , число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле: $P_n=n!$
- Пример 1. Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?
- $P_8=8!=40320$
- Пример 2. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?
- Из цифр 0,2,4,6 можно получить P_4 перестановок. Из этого числа надо исключить те перестановки , которые начинаются с 0.Получаем: $P_4-P_3=4!-3!=18$

- Пример 3. Имеется 9 различных книг, четыре из которых- учебники . Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так , чтобы все учебники стояли рядом?
- Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не 9,а 6 книг . Это можно сделать P_6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить P_4 перестановок учебников. Значит , искомое число способов расположения книг на полке равно произведению P_6*P_4. Получаем:
- $P_6*P_4=6!*4!=720*24=17280$

Задачи

- 1. Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?
- Ответ:24
- 2. Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов может он выбрать?
- Ответ:5040
- 3. Сколько шестизначных чисел(без повторения цифр) можно составить из цифр: а)1,2,5,6,7,8; б)0,2,5,6,7,8 ?
- Ответ : а)720;б)600
- 4. В расписании на понедельник шесть уроков:алгебра, геометрия,биология,история,физкультура,химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так , чтобы два урока математики стояли рядом?
- Ответ:240

Задачи

- 5. Делится ли число 14! На:
- А)168; б)136;в)147;г)132?
- 6.

Найдите значение выражения:

а) $\frac{15!}{14!}$; б) $\frac{8!}{10!}$; в) $\frac{42!}{40!}$; г) $\frac{16!}{14! \cdot 3!}$.

- 7.

Что больше и во сколько раз:

а) $6! \cdot 5$ или $5! \cdot 6$; б) $(n+1)! \cdot n$ или $n! \cdot (n+1)$?

- Ответ на 6) :15; 1/90; 1722; 40

Проверочная работа

1 ВАРИАНТ

- 1. Комбинаторные задачи
- 2. Способы решения комбинаторных задач
- 3. Вычислить

г) $\frac{36!}{2!\cdot 34!}$; д) $\frac{15!}{2!\cdot 16!}$; е) $\frac{25!}{23!\cdot 5!}$

2 ВАРИАНТ

- 1. Перестановки , формула
- 2. Комбинаторика
- 3. Вычислить

а) $\frac{8!}{6!\cdot 2!}$; б) $\frac{12!}{9!\cdot 3!}$; в) $\frac{7!\cdot 5!}{8!\cdot 4!}$.

Размещения

Пусть имеется 4 шара и 3 пустых ячейки . В пустые ячейки можно по-разному разместить три шара из этого набора шаров . Выбирая разными способами первый , второй и третий шары , будем получать различные тройки шаров.
Каждую упорядоченную тройку , которую можно составить из четырех элементов , называют ***размещением*** из четырех элементов по три

- Размещением из n элементов по к (к<n) называется любое множество , состоящее из любых к элементов , взятых в определенном порядке из данных n элементов
- Число размещений из n элементов по к обознача A_n^k
- Читают « А из n по к »
- Формула для вычисления числа размещений из nэлементов п

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1)).$$

Примеры

- 1. Учащиеся второго класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?
- В этом примере речь идет о размещениях из 8 элементов по 4. Имеем: $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$
- 2. Сколько трехзначных чисел (без повторения цифр в записи числа) можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5,6?
- Среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число . Поэтому:

$$A_7^3 - A_6^2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 180.$$

Задачи

- 1. Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?
- Ответ: 24
- 2. Из 30 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
- Ответ: 870
- 3. Сколькими способами организаторы конкурса могут определить, кто из 15 его участников будет выступать первым, вторым и третьим?
- Ответ: 2730
- 4. На странице альбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные места: а)2 фотографии; б) 4 фотографии; в) 6 фотографий?
- Ответ: 30;360;720

Сочетания

- **Сочетанием из n элементов по к называется любое множество , составленное из данных n элементов**
- В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения , в каком порядке указаны элементы .Два сочетания из элементов по C_n^k отличаются друг от друга хотя бы одним элементом
- Обозначают
- Читают «С
- Формула чи

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

нтов по к ,где к<n

Примеры

- 1. Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?
- Каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит , здесь речь идет о сочетаниях из 15 элементов по 3.
- Имеем: $$C_{15}^{3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

- 2. Из вазы с фруктами, в которой лежит 9 яблок и 6 груш, надо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами можно сделать такой выбор?
- Имеем: $$C_9^3 \cdot C_6^2 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 1260.$$

Задачи

- 1. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?
- Ответ:21
- 2. Учащимся дали список из 10 книг , которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?
- Ответ:210
- 3. В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории требуется выделить четырех мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?
- Ответ:400400
- 4. В библиотеке читателю предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 4 журнала. Сколькими способами он может выбрать из них 3 книги и 2 журнала?
- Ответ:720

Домашняя работа
Самостоятельная работа

1. Сколькими способами 9 участников конкурса могут выступить в порядке очередности в финале ?
2. Делится ли число 40! на: а)410;б)500;в)780?
3. Используя цифры 0,3,7,8 составьте все возможные двузначные числа, в которых цифры не повторяются
4. В городской думе 10 депутатов моложе 30 лет. Сколькими способами можно выбрать из них троих для работы в комитете по молодежной политике?