Матрицы.

Матрицы и их виды. Действия над матрицами.

Определение: **Матрица – прямоугольная таблица, образованная из элементов некоторого множества и состоящая из *m* строк и *n* столбцов.**

Обычно матрицу обозначают двойными вертикальными черточками или круглыми скобками.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Если *m=n* матрица называется квадратной.

Среди квадратных матриц выделяют класс **диагональных** матриц, т.е. матрицы, которые имеют элементы не равные нулю только на главной диагонали:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Если

$$d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$$

то матрица называется **единичной**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица, у которой все элементы нулевые, получила название нулевой:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Понятие нулевой матрицы можно вводить и для неквадратных матриц .

Матрицы *A* и *B* считаются равными, если они одинакового размера, т.е. число строк и столбцов матрицы *A* соответственно равны числу строк и столбцов матрицы *B* и элементы стоящие на одинаковых местах, равны между собой .

Основные операции, которые производятся над матрицами:

1. Сложение матриц.
2. Вычитание матриц.
3. Умножение матрицы на число.
4. Умножение матриц

1. Суммой **двух матриц *A* и *B*, одинаковых размерностей, называется матрица той же размерности, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц *A* и *B*:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & \dots & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Сумма матриц обладает следующими свойствами:

1. *A+B=B+A*, сложение матриц коммутативно,
2. *A+(B+C)=(A+B)+C*, свойство ассоциативности,
3. *A+0=A, где 0* – нулевая матрица той же размерности.

2. Аналогично определяется **разность** двух матриц:

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Произведением матрицы *A* на число λ, называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы *A*, путём умножения их на число λ:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ & \ldots & & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Операция произведения матрицы на число удовлетворяет следующим свойствам:

$$1)\ 1 \cdot A = A \qquad 2)\ \lambda \cdot (\mu A) = (\lambda \cdot \mu) A$$

$$3)\ (\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A \qquad 4)\ \lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$5)\ A + (-A) = 0$$

Где *A,B* – произвольные матрицы,

λ, μ **-произвольные числа,** ***0*** **– нулевая матрица.**

4. Произведение *AB* матрицы *A* на матрицу *B* определяется только в том случае, когда число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*.

В результате умножения получится новая матрица *С*, у которой число строк будет равно числу строк матрицы *A*, а число столбцов равно числу столбцов матрицы *B*.

Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ & \dots & \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

В таком случае произведением матрицы *A* на матрицу *B* является матрица *C*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ & \dots & \\ c_{m1} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

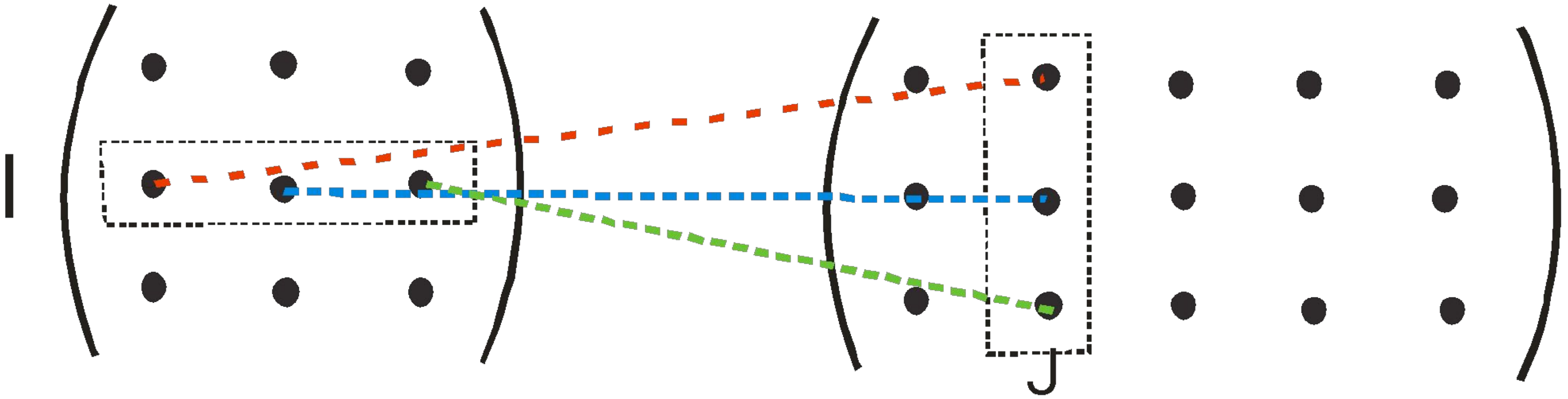
элементы которой определяются по следующему правилу

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}b_{\alpha j}$$

где *i=1,…,m*; *j=1,…,k.*

Т.е. для получения элемента c_{ij} надо элементы *i*-строки матрицы *A* умножить на соответствующие элементы *j* – го столбца матрицы *B* и полученные произведения сложить.

Получение элемента c_{ij} схематично изображается так:



Пример:

Перемножить матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **и** $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 6+2\cdot 5 & 1\cdot(-5)+0\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot 3+0\cdot(-4)+2\cdot 7 \\ 0\cdot 1+(-1)\cdot 6+3\cdot 5 & 0\cdot(-5)+(-1)\cdot 2+3\cdot(-1) & 0\cdot 3+(-1)\cdot(-4)+3\cdot 7 \\ 3\cdot 1+2\cdot 6+1\cdot 5 & 3\cdot(-5)+2\cdot 2+1\cdot(-1) & 3\cdot 3+2\cdot(-4)+1\cdot 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -7 & 17 \\ 9 & -5 & 25 \\ 20 & -12 & 8 \end{pmatrix}$$

Свойства умножений матриц:

$1) A \cdot B \neq B \cdot A$ **произведение матриц не коммутативно;**

Если *AB=BA*, то матрицы *A* и *B* называются перестановочными;

$$2)\, A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$$

свойство ассоциативности

$$3)\, \lambda\cdot(A\cdot B)=(\lambda\cdot A)\cdot B$$

$$4)\, A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

свойство дистрибутивности

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$A\cdot D=D\cdot A \quad (2.1)$$

$$A\cdot E=E\cdot A=A \quad (2.2)$$

$$A\cdot 0=0\cdot A=0 \quad (2.3)$$

2.2 Обратная матрица.

Пусть дана квадратная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

и $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ **определитель матрицы.**

Матрица определитель которой равен нулю, называется вырожденной (или особенной), а матрица определитель которой отличен от нуля - невырожденной (или неособенной).

Если для данной матрицы *A* существует матрица *X*, такая, что

$$\boxed{A \cdot X = X \cdot A = E \qquad (2.6)}$$

где *E* – единичная матрица, то матрица *X* называется обратной матрицей по отношению к матрице *A*, а сама матрица *A* - обратимой.

Обратная для *A* матрица обозначается A^{-1}

<u>Теорема.</u>

Для каждой обратимой матрицы существует только одна обратная матрица.

<u>Доказательство.</u>

Пусть для матрицы *А* существует обратная матрица *Х*, тогда должно выполняться условие (2.6)

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}=\mathrm{X}\cdot\mathrm{A}=\mathrm{E}$$

Пусть для матрицы А существует ещё одна обратная матрица X', **тогда согласно (2.6)** $\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}'=\mathrm{E}$

Умножим слева последнее выражение на матрицу *Х*:

$$X\cdot(A\cdot X')=X\cdot E=X$$

Согласно свойству произведение матриц левую часть выражения можно записать

$$X\cdot(A\cdot X')=(X\cdot A)\cdot X'=EX'=X'$$

Т.е. получили $\mathrm{X}'=\mathrm{X}$

Что и требовалось доказать.

Запишем выражение для обратной матрицы A^{-1}

Пусть дана квадратная обратимая матрица *A*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Найдём алгебраические дополнения для каждого элемента и составим матрицу B:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & \dots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Заметим, что в *i* строке матрицы *B* расположены алгебраические дополнения элементов j столбца определителя. Матрицу *B* называют присоединенной для матрицы *A*.

Обратную матрицу можно найти по формуле

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\mathrm{B}$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & \dots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример: **Найти матрицу обратную данной**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Проверим, обратима матрица *A* или нет, т.е. является ли она вырожденной

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(-1)^6 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы *A*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-3) = 5$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1 \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & -1\end{vmatrix}=5$$

Запишем обратную матрицу

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & 5 & 5\\ -1 & -7 & -10\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

Для проверки правильности решения достаточно проверить следующее равенство: $A\cdot A^{-1}=E$

$$A\cdot A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & 5 & 5\\ -1 & -7 & -10\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2.3 Ранг матрицы.

Рассмотрим произвольную прямоугольную матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2m} \\ & & \dots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{km} \\ & & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Возьмем в этой матрицы *k* строк и *k* столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этой строки и столбца образуют квадратную матрицу.

Определитель данной матрицы называется минором *k*-ого порядка M_k

Минор M_{k+1} **порядка *k+1*, который содержит в себе минор** M_k

называется окаймляющим минором.

Если любой минор M_k **не равен нулю,**

а все возможные миноры M_{k+1}

равны нулю, то говорят, что ранг матрицы равен *k* **(rang*A*=*k*).**

Отличный от нуля минор M_k,

называют базисным минором .

Пример:

Вычислить ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 7 & -6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение:

Выберем минор второго порядка, находящийся в верхнем левом углу,

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Минор второго порядка не равен нулю, следовательно ранг не менее двух.

Составляем миноры третьего порядка, окаймляющие отличный от нуля минор второго порядка. Для этого добавим к M_{12}^{12} **третью строку и третий столбец.**

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-6+6) = 0$$

$$M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 7 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{124}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{124}^{124}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 7 & -6 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & -2 & 3\\ 0 & 0 & -1\\ 21 & -6 & 7\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^5\begin{vmatrix}7 & -2\\ 21 & -6\end{vmatrix}=0$$

Все миноры третьего порядка, окаймляющие минор второго порядка, равны нулю. А это значит, что *rang A*=2.

Другим простым способом вычисления ранга матрицы является метод Гаусса, основанный на элементарных преобразованиях, выполняемых над матрицей. Такими преобразованиями являются:

1. **вычёркивание строки состоящей из нулей,**
2. **прибавление к элементам одной из строк соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое число,**
3. **перестановку двух строк (двух параллельных рядов),**
4. **все строки заменить столбцами**

Метод Гаусса вычисления ранга матрицы заключается в том, что при помощи элементарных преобразований матрицу можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & b_{3k} & \dots & b_{3n} \\ & & \dots. & \dots\dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & b_{kk} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

В этой матрице все диагональные элементы b_{11}, b_{22}, b_{33} и т.д. отличны от нуля, а элементы других строк расположенные ниже, равны нулю.

Т.к. ранг не меняется при элементарных преобразованиях, то ранг исходной матрицы будет равен рангу данной матрицы и равен числу не нулевых строк .

Пример:

Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ -2 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Добьемся, чтобы все элементы первого столбца, кроме первого были нулями. Первую строку оставим без изменения, затем первую строку умножим на -2 и прибавим ко второй, первую строку умножим на -1 и прибавим к третьей, и наконец, первую строку умножим на 2 и прибавим к четвертой строке.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ -2 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 10 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Применим теперь элементарные преобразования таким образом, чтобы в матрице все элементы второго столбца кроме первых двух, были нулями. Умножим вторую строку на 2 и прибавим к четвертой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим третью строку на -1 и сложим с четвертой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Вычеркивая нулевую строку, получим ***rang A*=3.**