

12. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть X - дискретная случайная величина, заданная своим рядом распределения:

x_1	...	x_i	...	x_n
p_1	...	p_i	...	p_n

Математическим ожиданием MX случайной величины X называется сумма ряда

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

Пример X – число очков при
однократном бросании игральной
кости MX -?

В лотерее 100 билетов, из которых 2 выигрышных по 110 руб. и 10 выигрышных по 20 руб. Стоимость билета 10 руб. X - чистый выигрыш для человека, купившего 1 билет.

$MX-?$

ТЕОРЕМА.

Среднее арифметическое значений, принимаемых случайной величиной в длинной серии опытов, приближенно равно ее математическому ожиданию.

Пример.

*Игрок бросает 2 игральные кости.
Если на костях выпадает разное число
очков, то он проигрывает a рублей, а
если
одинаковое, то выигрывает $4a$ рублей.
Стоит ли играть в эту игру
многократно?*

Пример.

Пусть X – выигрыш игрока в одной игре.
 X может принимать значения $-a$ и $4a$.

Пример.

Пусть X – выигрыш игрока в одной игре.
 X может принимать значения $-a$ и $4a$.

$$P(X = 4a) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad P(X = -a) = \frac{5}{6}$$

Пример.

Пусть X – выигрыш игрока в одной игре.
 X может принимать значения $-a$ и $4a$.

$$P(X = 4a) = \frac{1}{6} \qquad P(X = -a) = \frac{5}{6}$$

X	$4a$	$-a$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Пример.

Пусть X – выигрыш игрока в одной игре.
 X может принимать значения $-a$ и $4a$.

X	$4a$	$-a$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

$$MX = 4a \cdot \frac{1}{6} + (-a) \cdot \frac{5}{6} = \frac{4a - 5a}{6} = -\frac{a}{6}$$

СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ



*Математическое ожидание от
постоянной величины равно
этой постоянной величине:
 $MC=C, C=const$*

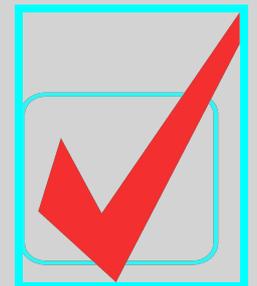
Доказательство:

Рассмотрим ряд распределения случайной величины $X=C$:

C
1

Тогда математическое ожидание будет равно

$$MC=C$$





*Математическое ожидание суммы
случайных величин X и Y равно
сумме математических ожиданий*

этих величин:

$$M(X+Y)=MX+MY$$



*Постоянную величину можно
выносить за знак математического
ожидания:
 $M[k X]=k M[X]$, где $k=const$.*



*Математическое ожидание
произведения
независимых случайных величин
X и Y равно произведению
математических ожиданий этих
величин:
 $M(XY) = M_X M_Y$*



**Пример. Приобретено 40 лотерейных билетов.
Вероятность выигрыша на один билет равна 0,05.
Найти математическое ожидание числа
выигравших билетов.**



Пусть X – число выигравших билетов.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й билет выиграл} \\ 0, & \text{если } i\text{-й билет проиграл} \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{40}$$



Пусть X – число выигравших билетов.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й билет выиграл} \\ 0, & \text{если } i\text{-й билет проиграл} \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{40}$$

$$\begin{aligned} MX &= M(X_1 + X_2 + \dots + X_{40}) = \\ &= MX_1 + MX_2 + \dots + MX_{40} \end{aligned}$$



$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{a\u00f1e\u00e8 i - \u00e9 \u00e0 \u00e0 \u00e0 \u00e0 \u00e0 \u00e0} \\ 0, & \text{a\u00f1e\u00e8 i - \u00e9 \u00e0 \u00e0 \u00e0 \u00e0 \u00e0 \u00e0} \end{cases}$$

X_i	1	0
P	0,05	0,95

$$MX_i = 1 \cdot 0,05 + 0 \cdot 0,95 = 0,05$$



Пусть X – число выигравших билетов.

$$\begin{aligned} MX &= MX_1 + MX_2 + \dots + MX_{40} = \\ &= 0,05 + 0,05 + \dots 0,05 = 40 \cdot 0,05 = 2 \end{aligned}$$



Пример. В страховой компании застраховано 10000 человек. Каждый застрахованный вносит за год 500 руб. Вероятность наступления страхового случая для одного человека составляет 0,001. При наступлении страхового случая компания выплачивает застрахованному 50000 рублей. Найти математическое ожидание прибыли страховой компании.