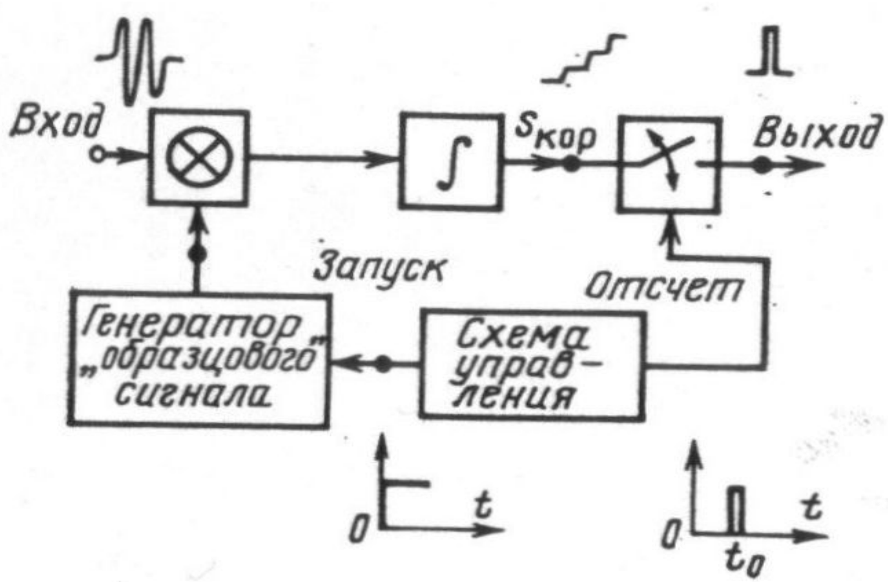
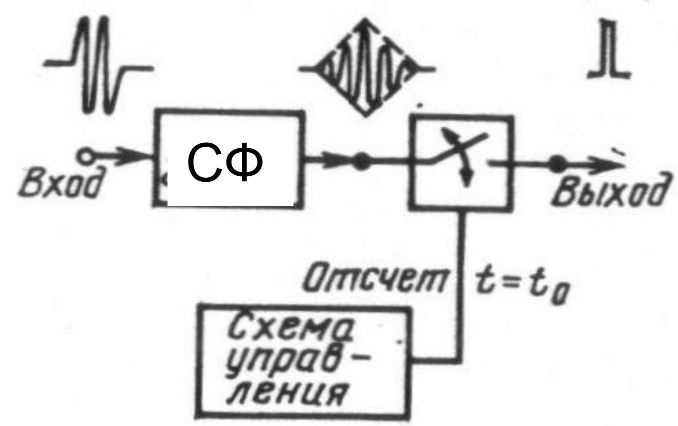
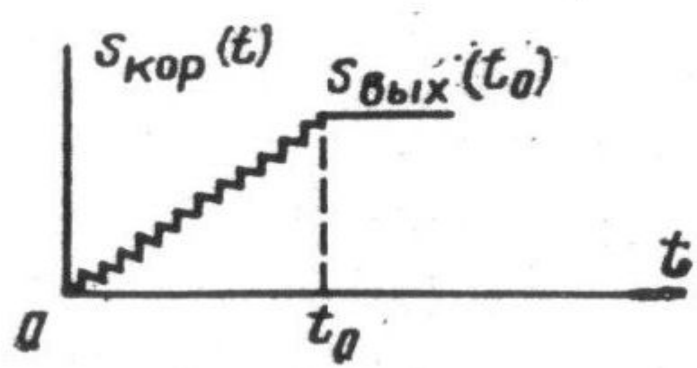
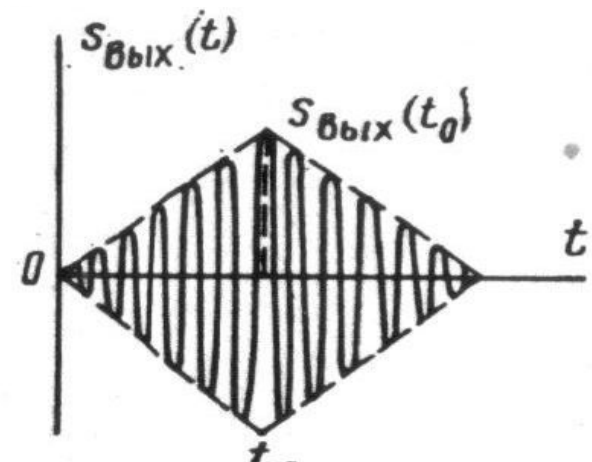
СОГЛАСОВАННЫЙ ФИЛЬТР

СХЕМЫ КОРРЕЛЯТОРА И СФ (предыдущая лекция)









СФ КАК КОРРЕЛЯТОР

1.Отношение сигнал/шум на выходе СФ при $t=t_0$ равно отношению сигнал/шум на выходе коррелятора с опорным сигналом, равным $s_{\text{вх}}(t)$

2.Сигналы на выходе СФ и коррелятора не совпадают по форме

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ СФ

ПРВ сечения СП: $w(y_{\text{вых}}; t_0)$

$$Y_{\text{вых}}(t_0) = s_{\text{вых}}(t_0) + N_{\text{вых}}(t_0)$$

СФ является НЧ фильтром, в котором происходит нормализация белого шума, т.е. ПРВ СП на выходе СФ является гауссовской

Если на входе СФ действуют сигнал и шум (*H_1*)

МО СП($t=t_o$):

$$m_{y_{\text{вых}}}(t_0) = M[Y_{\text{вых}}(t_0)] = M[s_{\text{вых}}(t_0) + N_{\text{вых}}(t_0)] =$$

$$= M[s_{\text{вых}}(t_0)] + M[N_{\text{вых}}(t_0)] = s_{\text{вых}}(t_0) = BE_{s_{\text{вх}}}$$

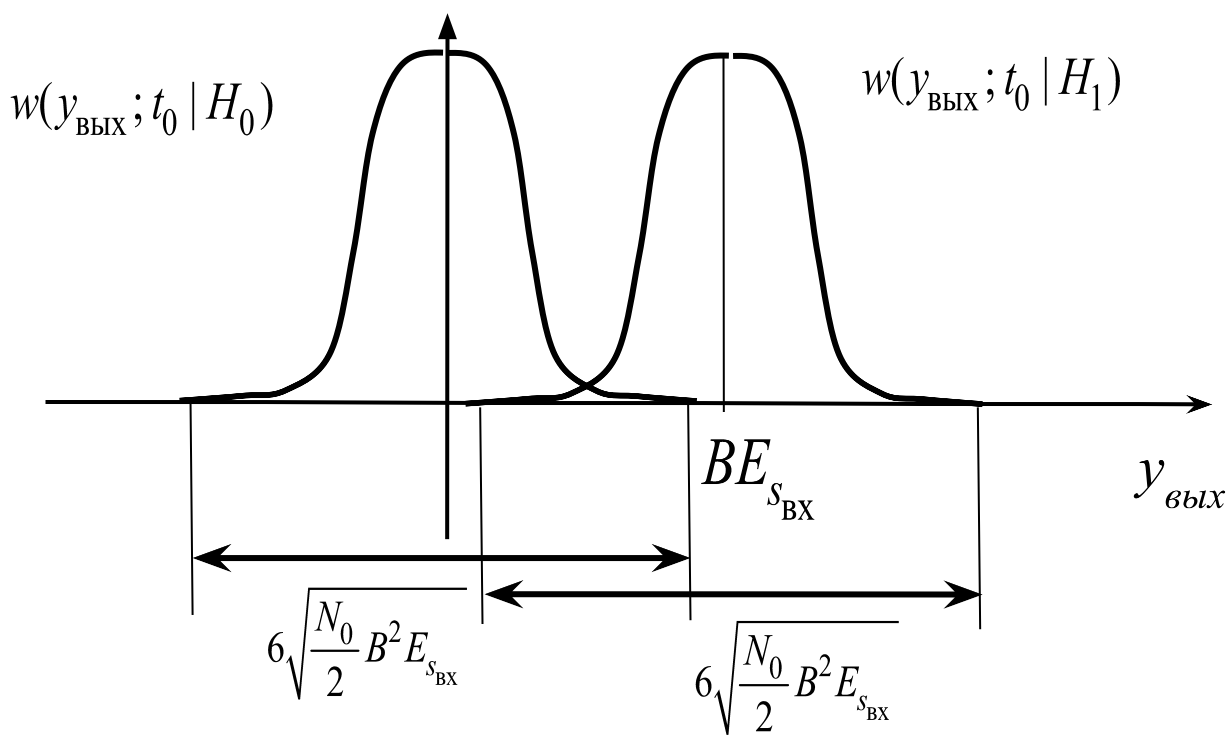
Дисперсия СП:

$$D_{y_{\text{вых}}}(t_0) = D[Y_{\text{вых}}(t_0)] = D[s_{\text{вых}}(t_0) + N_{\text{вых}}(t_0)] = D_{n_{\text{вых}}} = \frac{N_0}{2} B^2 E_{s_{\text{вх}}}$$

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ СФ

H_1: $m_{y_{\text{вых}}}(t_0) = BE_{s_{\text{вх}}}$; $D_{n_{\text{вых}}} = \dfrac{N_0}{2} B^2 E_{s_{\text{вх}}}$

H_0: $m_{y_{\text{вых}}}(t_0) = 0$; $D_{n_{\text{вых}}} = \dfrac{N_0}{2} B^2 E_{s_{\text{вх}}}$



СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕБЕЛОМ ШУМЕ

СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕБЕЛОМ ШУМЕ

СПМ аддитивного шума $N_{\text{вх}}(t)$:

$$G_{n_{\text{вх}}}(f) \neq \text{const}$$

Наблюдаемый сигнал:

$$Y_{\text{вх}}(t) = s_{\text{вх}}(t) + N_{\text{вх}}(t)$$

«Выбеливающий» линейный фильтр преобразует окрашенный шум $N_{BX}(t)$ в белый шум $N_1(t)$

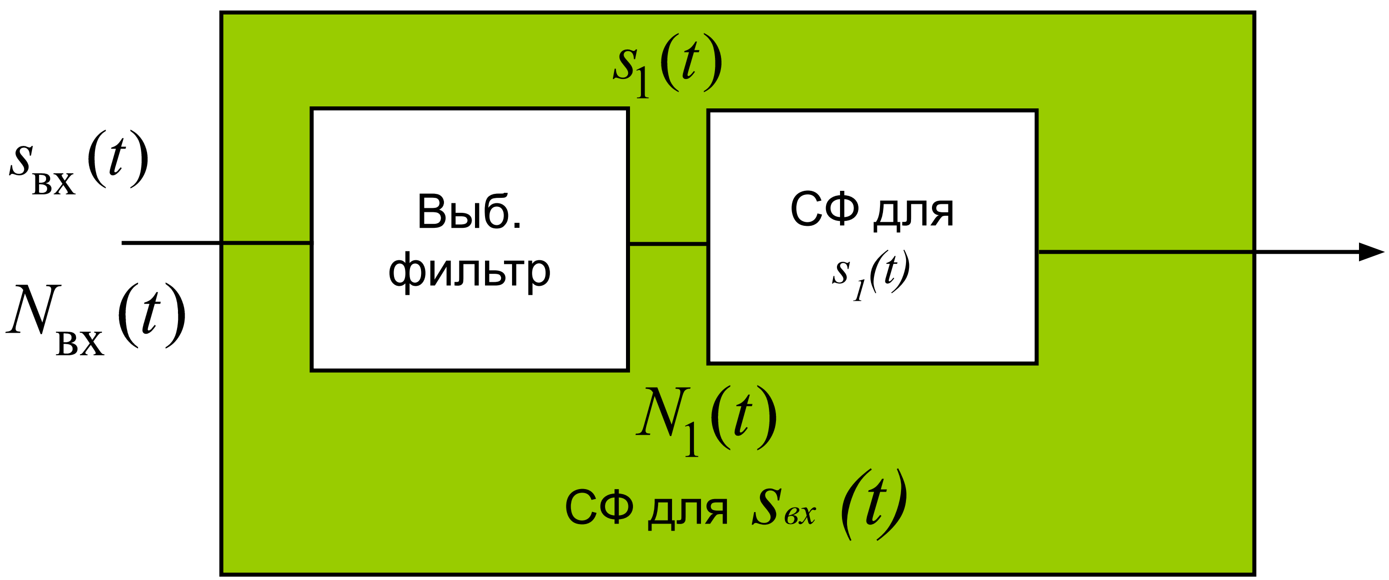
$$G_{n\,1}(f) = \frac{N_0}{2}$$

СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕБЕЛОМ ШУМЕ

Реакция «выбеливающего» фильтра:

$$Y_{вф}(t) = L\quad [Y_1(t)] = s_1(t) + N\ (t)$$

$$s_1(t) \neq s_{вх}(t)$$



СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕБЕЛОМ ШУМЕ

КЧХ фильтра, согласованного с $s_1(t)$

$$\dot{H}_{\text{ф}1}(f) = B\dot{S}_1^*(f)\exp(-j \cdot 2\pi f t_1)$$

$$\dot{S}_1(f) = F\{s_1(t)\}$$

t_1 –длительность сигнала $s_1(t)$

АЧХ «выбеливающего» фильтра должна удовлетворять условию:

$$C_{\text{вф}}^2(f) G_{n_{\text{вх}}}(f) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow C_{\text{вф}}(f) = \sqrt{\frac{N_0}{2G_{n_{\text{вх}}}(f)}}$$

СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕБЕЛОМ ШУМЕ

Пример. Найти КЧХ фильтра, преобразующего в белый шум СП с СПМ

$$G_{n_{\text{вх}}}(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$C^2_{\text{вф}}(f) = \frac{N_0}{2G_{n_{\text{вх}}}(f)} = \frac{N_0(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)}{2 \cdot 2\alpha}$$

$$\dot{H}_{\text{вф}}(f) = \sqrt{\frac{N_0}{4\alpha}}(\alpha - j2\pi f)$$

СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕБЕЛОМ ШУМЕ

Спектральная плотность сигнала на выходе «выбеливающего» фильтра:

$$\dot S_1(f)=\dot H_{вф}(f)\dot S_{вх}(f)$$

КЧХ фильтра, согласованного с $s_1(t)$ (шум - белый)

$$\dot H_{сф1}(f)=\dot B\dot S_1^*(f)\exp(-j\cdot 2\pi f t_1)$$

$$=\dot B\underbrace{\dot H_{вф}^*(f)\dot S_{вх}^*(f)}_{S_1{}^*(f)}\exp(-j\cdot 2\pi f t_1)$$

КЧХ фильтра, согласованного с $s_{вх}(t)$) (шум - небелый)

$$\dot H_{сф}(f)=\dot H_{вф}(f)\dot H_{сф1}(f)=\dot B\,|\dot H_{вф}(f)|^2\dot S_{вх}^*(f)\exp(-j\cdot 2\pi f t_1)$$

СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕБЕЛОМ ШУМЕ

Вывод: КЧХ СФ не зависит от ФЧХ выбеливающего фильтра

$$\boxed{\dot{H}_{\text{сф}}(f) = B\underbrace{\frac{N_0}{2G_{n_{\text{вх}}}(f)}}_{C^2_{\text{вф}}(f)}\dot{S}^*_{\text{вх}}(f)\exp(-j\cdot 2\pi f t_1)}$$

Отношение сигнал/шум:

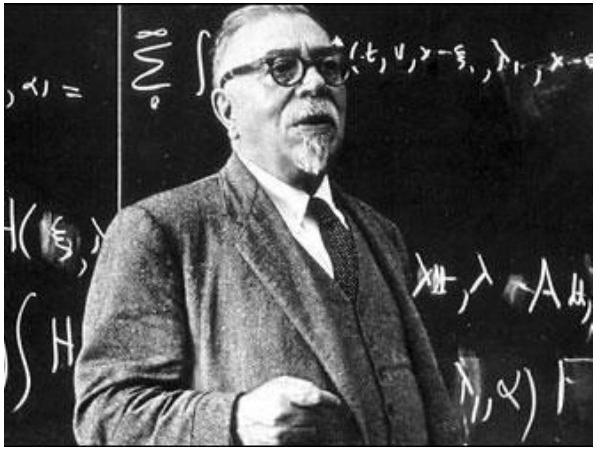
$$q^2_{\text{сф}} = \frac{2E_{s_1}}{N_0}$$

$$E_{s_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{H}_{\text{вф}}(f)\dot{S}_{\text{вх}}(f)|^2\, df$$

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Критерий: минимум среднего квадрата ошибки

НОРБЕРТ ВИНЕР (1894–1964)



Американский учёный, выдающийся математик и философ, основоположник кибернетики и теории искусственного интеллекта.

Во время второй мировой войны перед американским математиком Н. Винером встала задача отделения полезного сигнала от шума при решении задач автоматизации систем ПВО, использующих радиолокационную технику.

В 1942 г. Н. Винер решил эту задачу, допустив что искомая система должна быть линейной с постоянными параметрами, время наблюдения бесконечно, входной и желаемый выходной сигналы системы являются стационарными и стационарно связанными случайными процессами, система минимизирует средний квадрат ошибки между желаемым и реальным выходными сигналами.

В 1942-м году сотрудник Винера Джулиан Бигелоу (Julian Bigelow) построил прототип прибора, позволявшего следить за самолетом в течение десяти секунд и предсказывать затем его местонахождение двадцатью секундами позже

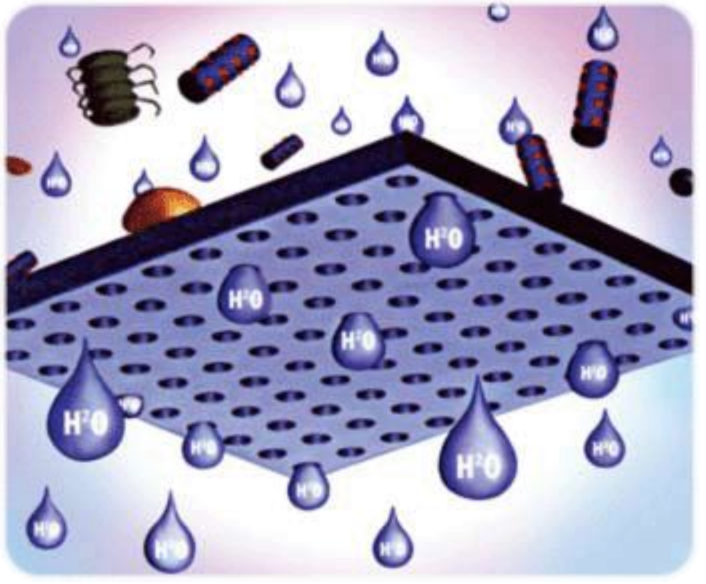
РУДОЛЬФ ЭМИЛЬ КАЛМАН (RUDOLPH EMIL KALMAN) (19.05.1930)

Фильтра Калмана (конец 1958-го — начало 1959) - эффективный рекурсивный фильтр. Когда Калман придумал свой фильтр, то встретился с таким скептицизмом, что был вынужден опубликовать первые работы о нем в журнале, связанном с механикой, хотя сам занимался электротехникой.

Основываясь на предшествующих работах Винера, Колмогорова, Шеннона и др. Калман разработал технику оценки вектора состояния системы управления с использованием неполных и неточных (зашумленных) измерений, используемую в частности, в системах навигации.

Широко используется в инженерных и эконометрических приложениях: от радаров и систем технического зрения до оценок параметров макроэкономических моделей

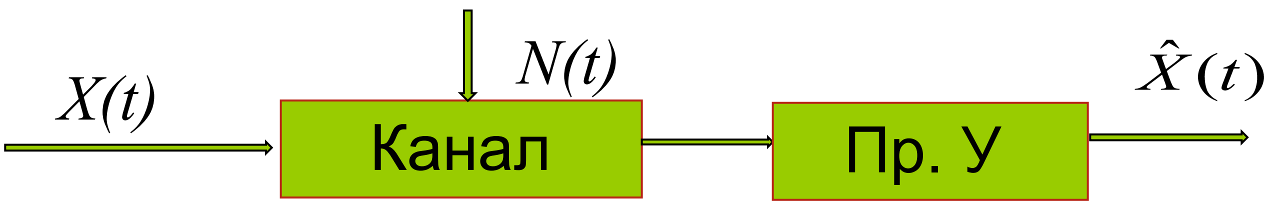
ФИЛЬТР ВИНЕРА



ФИЛЬТР ВИНЕРА

1. Априорная информация

Наблюдаемый сигнал: $Y(t) = \Psi[X(t), N(t)], \quad -\infty < t < \infty$



$X(t)$ и $N(t)$ стационарно связанные (необязательно гауссовские) СП с нулевыми математическими ожиданиями.

$K_y(\tau)$ и $K_{xy}(\tau)$ - полагаются известными.

ФИЛЬТР ВИНЕРА

2. Критерий оптимальности: минимум среднеквадратической ошибки оценивания

$$\boxed{M[\Delta^2(t)] = M[(X(t) - \hat{X}(t))^2] = \min}$$

3. Ограничения на синтез ОС: линейный фильтр с постоянными параметрами

$$\dot{H}_{\text{В}}(f) = C_{\text{В}}(f)\exp(j\varphi_{\text{В}}(f)) \quad \Longleftrightarrow \quad h_{\text{В}}(\tau)$$

СИНТЕЗ НЕКАУЗАЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО ЛФ

$$\hat{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{В}}(\tau) Y(t-\tau) d\tau$$

$h_{\text{В}}(\tau)$ - ИХ, минимизирующая СКО

$h(\tau) = h_{\text{В}}(\tau) + \alpha h_{\alpha}(\tau)$ - произвольная ИХ ЛС

$$M[\Delta^2(t)] = M\left[(X(t) - \int_{-\infty}^{\infty} (h_{\text{В}}(\tau) + \alpha h_{\alpha}(\tau)) Y(t-\tau) d\tau)^2 \right] \geq$$

$$M\left[(X(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{В}}(\tau) Y(t-\tau) d\tau)^2 \right]$$

$$M[\Delta^2(t)] = \min_{\alpha}$$

$$\left. \frac{\partial M[\Delta^2(t)]}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

СИНТЕЗ НЕКАУЗАЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО ЛФ

$$\boxed{K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{В}}(\tau_1) K_y(\tau - \tau_1)\, d\tau_1} = h_{\text{В}}(\tau) \otimes K_y(\tau)$$

$$\dot{G}_{xy}(f) = F\{K_{xy}(\tau)\}; \qquad F\{h_{\text{В}}(\tau) \otimes K_y(\tau)\} = \dot{H}_{\text{В}}(f) G_y(f)$$

$$\dot{G}_{xy}(f) = \dot{H}_{\text{В}}(f) G_y(f)$$

$$\boxed{\dot{H}_{\text{В}}(f) = \frac{\dot{G}_{xy}(f)}{G_y(f)}}$$

АНАЛИЗ ФИЛЬТРА ВИНЕРА

$$M[\Delta(t)^2] = M[(X(t) - \hat{X}(t))^2]$$

$$\boxed{M[\Delta^2(t)]_{\min} = D_x - D_{\hat{x}}}$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\,df; \qquad D_{\hat{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\hat{x}}(f)\,df \quad = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f)\,|\dot{H}_{\text{В}}(f)|^2\,df$$

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = D_x - D_{\hat{x}} \quad = \int_{-\infty}^{\infty} (G_x(f) - G_y(f)\,|\dot{H}_{\text{В}}(f)|^2)\,df$$

$$\boxed{\dot{H}_{\text{В}}(f) = \frac{\dot{G}_{xy}(f)}{G_y(f)}}$$

$$\boxed{M[\Delta^2(t)]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(G_x(f) - \frac{|\dot{G}_{xy}(f)|^2}{G_y(f)} \right) df}$$

ВЫВОДЫ

Для отыскания оптимальной линейной оценки необходимо знать только $Ky(t)$ и $Kxy(t)$ (или $Gy(f)$ и $Gxy(f)$).

Для вычисления минимальной среднеквадратической ошибки также необходимо знать эти характеристики и $Gx(f)$.

Любые другие статистические характеристики сигнала и помехи оказываются бесполезными.

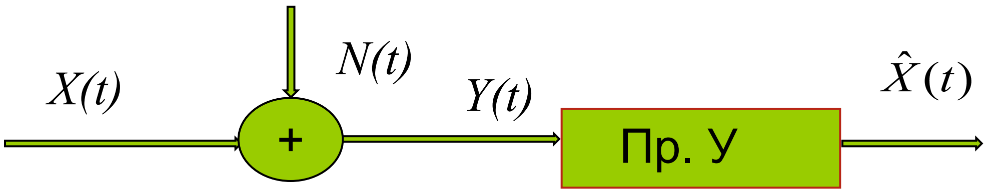
ВЫВОДЫ

- Для всех гауссовских и негауссовских процессов, имеющих одинаковые $Ky(t)$, $Kx(t)$ и $Kxy(t)$, оптимальный линейный фильтр является одинаковым и обладает одинаковой среднеквадратической ошибкой.

- Если сообщение , помеха и наблюдаемый сигнал являются совместно гауссовскими стационарно связанными СП, то фильтр Винера является абсолютно оптимальным

ФИЛЬТР ВИНЕРА ДЛЯ СИГНАЛА, НЕКОРРЕЛИРОВАННОГО С АДДИТИВНОЙ ПОМЕХОЙ

Оцениваемый процесс *X(t)* и шум *N(t)* являются некоррелированными СП с нулевыми МО и $Y(t) = X(t) + N(t)$



$$K_y(\tau) = K_x(\tau) + K_\eta(\tau) \qquad G_y(f) = G_x(f) + G_\eta(f)$$

$$K_{xy}(\tau) = M[X(t)Y(t+\tau)]$$

$$= M[X(t)(X(t+\tau) + N(t+\tau))] \quad = K_x(\tau)$$

$$G_{xy}(f) = G_x(f)$$

ФИЛЬТР ВИНЕРА ДЛЯ СИГНАЛА, НЕКОРРЕЛИРОВАННОГО С АДДИТИВНОЙ ПОМЕХОЙ

$$\dot{H}_{\text{В}}(f) = \frac{\dot{G}_{yx}(f)}{G_y(f)} \Rightarrow \boxed{H_{\text{В}}(f) = \frac{G_x(f)}{G_x(f) + G_\eta(f)}}$$

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(G_x(f) - \frac{|\dot{G}_{yx}(f)|^2}{G_y(f)} \right) df$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M[\Delta^2(t)]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_x(f) G_\eta(f)}{G_x(f) + G_\eta(f)} df}$$

ВЫВОДЫ

1. Поскольку СПМ являются вещественными и четными функциями, то

- КЧХ фильтра Винера также является вещественной и четной:

$$\dot{H}_B(f) = C_B(f);$$

- ФЧХ фильтра Винера тождественно равна нулю на всех частотах:

$$\varphi(f) \equiv 0.$$

Фильтр Винера не вносит фазовых искажений в наблюдаемый сигнал и тем самым максимально сохраняет форму оцениваемого сигнала.

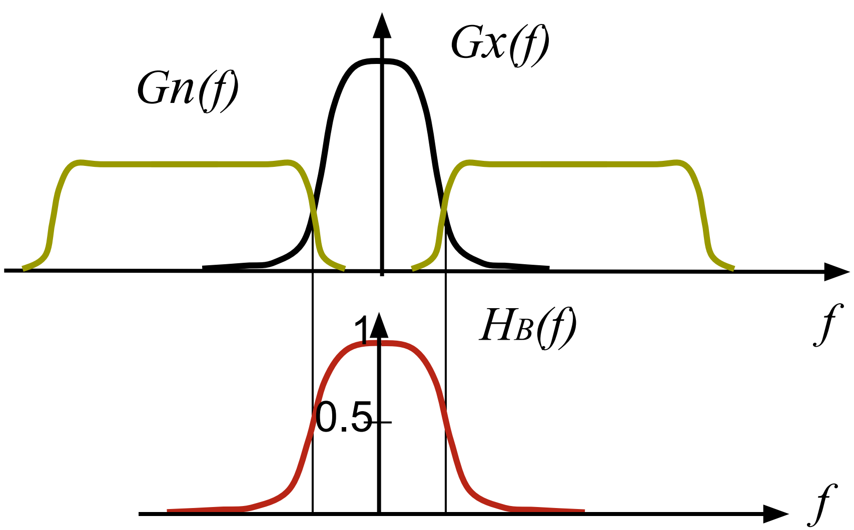
ВЫВОДЫ

2.

$$H_{\text{В}}(f) = C_{\text{В}}(f) = \frac{1}{1 + G_{\eta}(f) / G_x(f)}$$

$$G_x(f) >> G_{\eta}(f) \qquad\qquad G_x(f) << G_{\eta}(f)$$

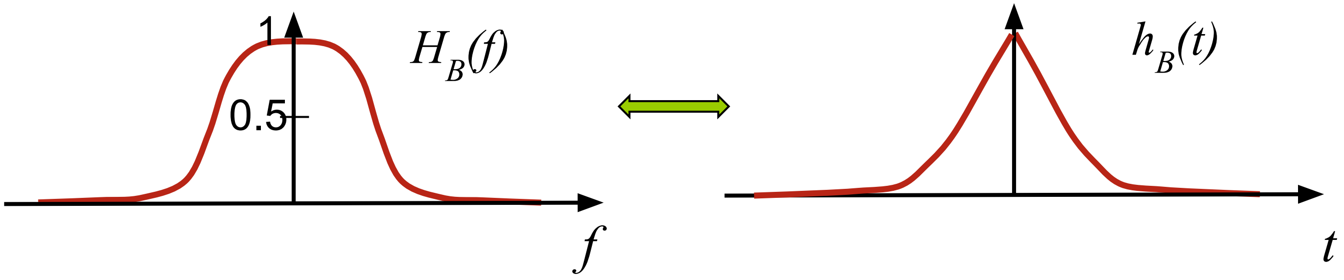
$$H_B(f) \approx 1 \qquad\qquad H_B(f) \approx 0$$



ВЫВОДЫ

3. Импульсная характеристика фильтра Винера является четной функцией

$$H_B(f) = H_B(-f) \Leftrightarrow h_B(t) = h_B(-t)$$



ВЫВОДЫ

4. Величина среднеквадратической ошибки не превышает дисперсии шума:

$$M[\Delta(t)^2]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_\eta(f)}{1+G_\eta(f)/G_x(f)} df \le \int_{-\infty}^{\infty} G_\eta(f) df = D_\eta$$

$$\hat{X}(t) = Y(t) = X(t) + N(t)$$

$$M[\Delta(t)^2]_{\min} = D_n$$

Использование фильтра Винера не может привести к увеличению среднеквадратической ошибки

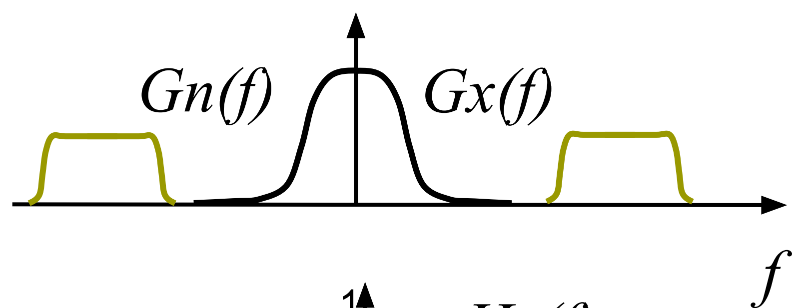
ВЫВОДЫ

5. $$M[\Delta^2(t)]_{\min} = 0$$

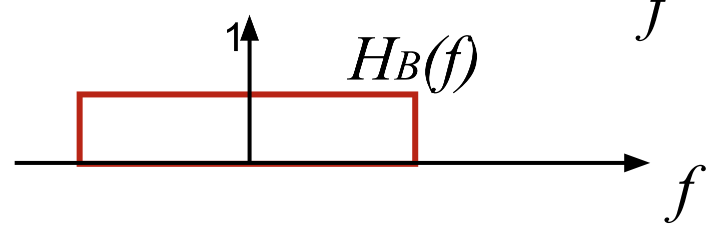
- при отсутствии шума;
- СПМ сигнала и помехи не перекрываются на всех частотах.

$$G_x(f)G_n(f) = 0$$

$$M[\Delta^2(t)]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_x(f)G_\eta(f)}{G_x(f)+G_\eta(f)}\,df$$



$$H_В(f) = \begin{cases} 1 \text{ при } G_x(f) \neq 0, \\ 0 \text{ при } G_x(f) = 0. \end{cases}$$



ВЫВОДЫ

6. Если СПМ сообщения и помехи перекрываются, например, при $f1<f<f2$, то СКО фильтрации не равна нулю.
Ошибка фильтрации возникает как от пропускания помехи в частотном диапазоне $f1<f<f2$, так и от ослабления сигнала в этом же частотном диапазоне.
Чем выше уровень СПМ помехи в диапазоне перекрытия, тем сильнее искажение информационного сигнала.