

Оптимизация на сетях

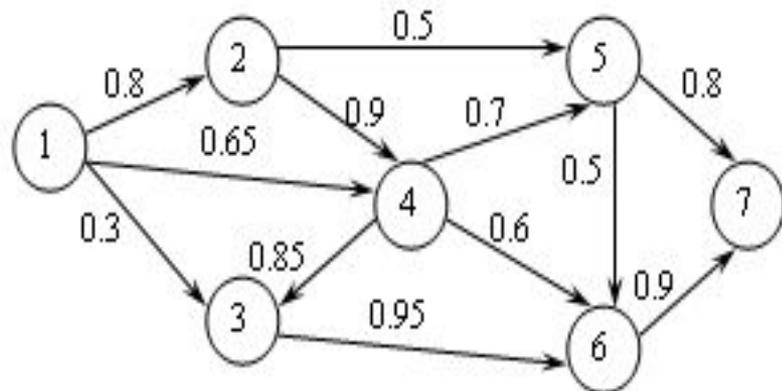
Классификация задач оптимизации на сетях

- Алгоритм нахождения минимального остового дерева
- Алгоритм нахождения кратчайшего пути
- Алгоритм определения максимального потока
- Алгоритм минимизации стоимости потока в сети с ограниченной пропускной способностью
- Алгоритм нахождения критического пути
- Алгоритм определения гамильтонова контура минимальной длины

Методы решения задач оптимизации на сетях

- 1. Симплекс-метод, т.к. все перечисленные задачи относятся к задачам линейного программирования
- 2. Специализированные методы, учитывающие особенности математической модели конкретной задачи

Пример сведения задачи к задаче о кратчайшем пути



Коммуникационная сеть:

узлы сети 1-7 –приемопередающие станции

дуги сети - указана вероятность передачи сообщения без потерь

Найти: путь 1→7 с максимальной вероятностью успешной передачи сообщения

Вероятность успешной передачи сообщения по пути 1→2→...→k

$$p_{1k} = p_1 p_2 \dots p_k \quad (1)$$

Логарифмирование выражения (1)

$$\log p_{1k} = \log p_1 + \log p_2 + \dots + \log p_k \quad (2)$$

$$\max p_{1k} \Leftrightarrow \max \log p_{1k} \quad (3)$$

$$\log p_{1k} \leq 0 \Leftrightarrow (-\log p_{1k}) \geq 0$$

$$\max \log p_{1k} \Leftrightarrow \min (-\log p_{1k}) \quad (4)$$

Задача $\min (-\log p_{1k})$ - алгоритм нахождения кратчайшего пути между двумя узлами сети

- Методы решения –
1. Симплекс-метод
 2. Методы решения ТЗ с ПП
 3. Метод Дейкстри
 4. Метод Флойда
 5. Метод ДП

Задача с кольцевыми маршрутами (о коммивояжере)

- Дано: 1. граф – вершины – узлы сети (n
ребра – дуги сети
2. матрица расстояний $A = (a_{ij})_{n \times n}$
при $a_{ij} = \infty$ прямого маршрута между i -м
и j -м вершинами графа

Найти: гамильтонов контур минимальной длины –
путь, проходящий через все вершины графа,
когда начальная вершина совпадает с конечной

Методы решения задачи о коммивояжере

1. метод перебора всех возможных маршрутов
количество $(n-1)!$
2. метод ветвей и границ решения задач ЦЛП
(схема с использованием верхних оценок)

Математическая модель задачи

Переменные $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{(дуга (i, j) включена в контур)} \\ 0 & \text{(дуга (i, j) не включена в контур)} \end{cases}$

ЦФ – длина контура $f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$ **(5)**

Система ограничений $\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = \overline{1, n} & \text{(въезд в вершину j)} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = \overline{1, n} & \text{(выезд из вершины i)} \end{cases}$ **(6)**

Условие устранения образования негамильтоновых контуров

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \quad i, j = \overline{1, n} \quad (i \neq j) \quad u_i, u_j - \text{целочисленные переменные} \quad \mathbf{(7)}$$

Алгоритм метода ветвей и границ

I Определение множества всех гамильтоновых контуров нижней границы длины маршрута

$$\Phi(\mathcal{R})$$

Основная идея – применение процедуры приведения матрицы расстояний

Ia) приведение матрицы расстояний A по строкам

$$\alpha_i = \min_{j=1, n} a_{ij} \quad (8)$$

Iб) приведение матрицы расстояний A по столбцам

$$\beta_j = \min_{i=1, n} a_{ij} \quad (9)$$

α_i, β_j - константы приведения

A' - полностью приведенная матрица расстояний

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \quad (10)$$

$$L = L' + \gamma \quad (11)$$

L - длины оптимального маршрута в задаче с неприведенной матрицей

L' - длина оптимального маршрута в задаче с полностью приведенной матрицей

$$\Phi(\mathcal{R}) = \gamma \quad (12)$$

Алгоритм метода ветвей и границ

II Разбиение множества R всех гамильтоновых маршрутов на подмножества

$\Phi_{(i,j)} \leftrightarrow \{\{\overline{i,j}\}\}$ - гамильтонов контур, не включающий дугу (i, j)

$\Phi_{(i,j)} \leftrightarrow \{\{i,j\}\}$ - гамильтонов контур, включающий дугу (i, j)

Сравнение нижних границ длины гамильтонова контура $\Phi_{(i,j)}$ и $\Phi_{(i,j)}$ с $\Phi_{(R)}$:



После получения гамильтонова контура просмотр оборванных ветвей дерева

если $\Phi_{(i,j)} < Rec$

При получении новых гамильтоновых контуров берут наименьший из Rec

Решение закончено при нижних границах оборванных ветвей превышающих Rec

Оптимальный маршрут – гамильтонов контур с наименьшей длиной

Алгоритм метода ветвей и границ

Па) Замена в матрице A' условно элемента "0" на " ∞ "

$$\gamma(\overline{i,j}) = \alpha_i + \beta_j \quad (13)$$

выбор $\gamma(\overline{r,s}) = \max \gamma(\overline{i,j})$

подмножество контуров - $\{\{\overline{r,s}\}\}$

$$\Phi(\overline{r,s}) = \Phi_{(R)} + \gamma(\overline{r,s}) = \gamma + \gamma(\overline{r,s}) \quad (14)$$

Пб) Условное включение выбранной в Па) дуги $(\overline{r,s})$ в гамильтонов маршрут:

исключение в матрице A' строки r и столбца s

замена элемента $a_{s,r}$ на " ∞ " (устранение образования негамильтонова контура)

приведение усеченной матрицы расстояние с расчетом $\gamma(\overline{r,s})$

подмножество контуров - $\{\{r,s\}\}$

$$\Phi_{(r,s)} = \Phi_{(R)} + \gamma(\overline{r,s}) = \gamma + \gamma(\overline{r,s}) \quad (15)$$

Пв) Проверка размера усеченной матрицы

$2 \times 2 \rightarrow$ **Пд)**

более чем $2 \times 2 \rightarrow$ **Пг)**

Алгоритм метода ветвей и границ

Пг) Сравнение нижних границ подмножеств $\Phi(\overline{r,s})$ и $\Phi(r,s)$:

$\Phi(\overline{r,s}) < \Phi(r,s)$ - развитие подмножества $\{\overline{r,s}\}$

$\Phi(\overline{r,s}) > \Phi(r,s)$ - развитие подмножества $\{(r,s)\}$

переход к **Па)**

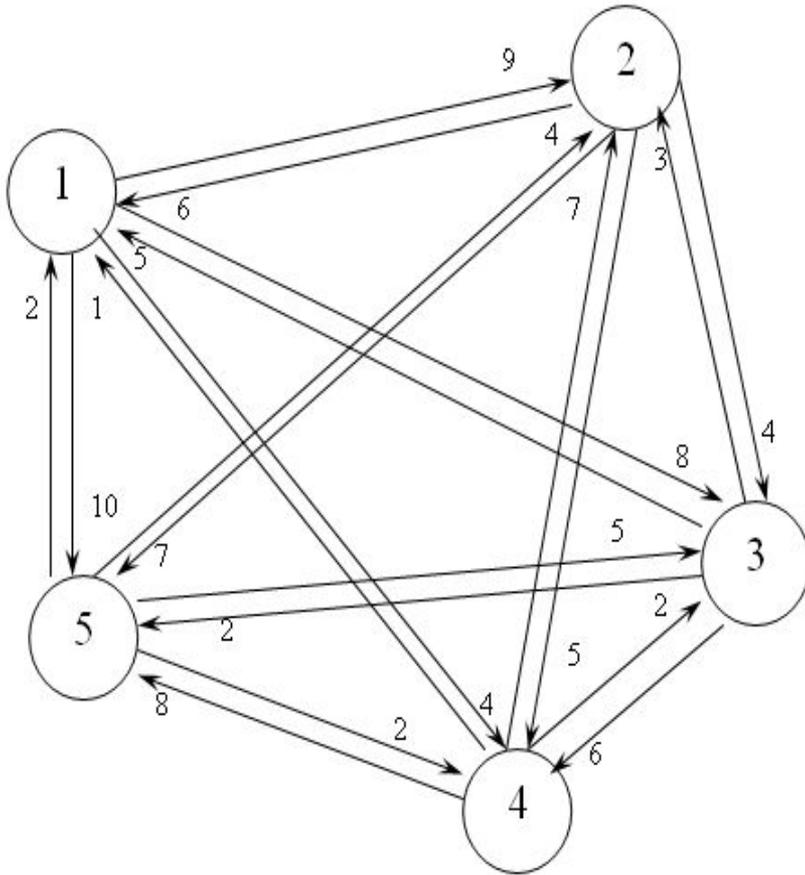
Пд) Определение гамильтонова контура и его длины Rec

Пе) Определение оптимального решения:

$$\text{Rec} < \begin{cases} \Phi(i,j) \\ \Phi(\overline{i,j}) \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n} \text{ оборванных ветвей} - \text{решение найдено}$$

иначе – развитие оборванных ветвей по приведенному алгоритму

Пример решения задачи о коммивояжере



$n = 5$

матрица расстояний

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
1	∞	9	8	4	10
2	6	∞	4	5	7
3	5	3	∞	6	2
4	1	7	2	∞	8
5	2	4	5	2	∞

Пример решения задачи о коммивояжере

1. Поиск нижней границы множества всех маршрутов $\varphi_{(R)}$

Таблица 1.

i \ j	1	2	3	4	5	α_i
1	∞	9	8	4	10	4
2	6	∞	4	5	7	4
3	5	3	∞	6	2	2
4	1	7	2	∞	8	1
5	2	4	5	2	∞	2

Таблица 2.

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	5	4	0	6
2	2	∞	0	1	3
3	3	1	∞	4	0
4	0	6	1	∞	7
5	0	2	3	0	∞
β_j	0	1	0	0	0

Таблица 3.

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	4	4	0	6
2	2	∞	0	1	3
3	3	0	∞	4	0
4	0	5	1	∞	7
5	0	1	3	0	∞

$$\varphi_{(R)} = \gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 14$$

2. Разбиение множества гамильтоновых контуров на подмножества

Таблица 3.

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	4	4	0 (4)	6
2	2	∞	0 (2)	1	3
3	3	0 (1)	∞	4	0 (3)
4	0 (1)	5	1	∞	7
5	0 (0)	1	3	0 (0)	∞

Выбор $\gamma_{(\overline{1,4})} = 4$

Пример решения задачи о коммивояжере

Подмножество контуров $\{(\overline{1,4})\}$

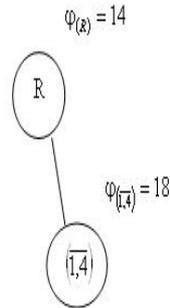
Таблица 4.

i \ j	1	2	3	4	5	α_i
1	∞	4	4	∞	6	4
2	2	∞	0	1	3	0
3	3	0	∞	4	0	0
4	0	5	1	∞	7	0
5	0	1	3	0	∞	0

Таблица 5.

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	0	0	∞	2
2	2	∞	0	1	3
3	3	0	∞	4	0
4	0	5	1	∞	7
5	0	1	3	0	∞
β_j	0	0	0	0	0

$$\varphi_{(\overline{1,4})} = \varphi_{(R)} + \gamma_{(\overline{1,4})} = 14 + 4 = 18$$



3. Включение дуги (1,4) в гамильтонов контур
 $(a_{41} = \infty)$

Таблица 6.

i \ j	1	2	3	5	α_i
2	2	∞	0	3	0
3	3	0	∞	0	0
4	∞	5	1	7	1
5	0	1	3	∞	0

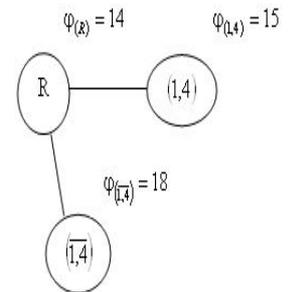
Таблица 7.

i \ j	1	2	3	5
2	2	∞	0	3
3	3	0	∞	0
4	∞	4	0	6
5	0	1	3	∞
β_j	0	0	0	0

$$\gamma_{(1,4)} = 1$$

Подмножество контуров $\{(1,4)\}$

$$\varphi_{(1,4)} = \varphi_{(R)} + \gamma_{(1,4)} = 14 + 1 = 15$$



Пример решения задачи о коммивояжере

4. Сравнение $\varphi_{(1,4)} = 15 < \varphi_{(\overline{1,4})} = 18$

5. Развитие подмножества $\{(1,4)\}$

Таблица 7.

i \ j	1	2	3	5
2	2	∞	0 (2)	3
3	3	0 (1)	∞	0 (3)
4	∞	4	0 (4)	6
5	0 (3)	1	3	∞

Выбор $\gamma_{(4,3)} = 4$

Подмножество контуров $\{(1,4), (\overline{4,3})\}$

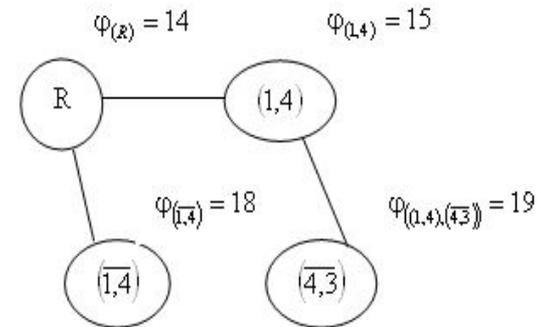
Таблица 8.

i \ j	1	2	3	5	α_i
2	2	∞	0	3	0
3	3	0	∞	0	0
4	∞	4	∞	6	4
5	0	1	3	∞	0

Таблица 9.

i \ j	1	2	3	5
2	2	∞	0	3
3	3	0	∞	0
4	∞	0	∞	2
5	0	1	3	∞
β_j	0	0	0	0

$$\varphi_{((1,4),(\overline{4,3}))} = \varphi_{(1,4)} + \gamma_{(\overline{4,3})} = 15 + 4 = 19$$



Пример решения задачи о коммивояжере

6. Включение дуги $(4,3)$ в гамильтонов контур
 $(a_{31} = \infty)$

Таблица 10.

i \ j	1	2	5	α_i
2	2	∞	3	2
3	∞	0	0	0
5	0	1	∞	0

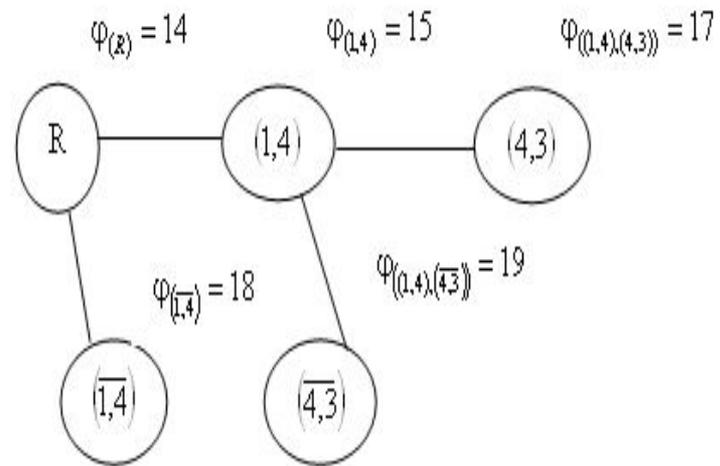
Таблица 11.

i \ j	1	2	5
2	0	∞	1
3	∞	0	0
5	0	1	∞
β_j	0	0	0

$$\gamma_{(4,3)} = 2$$

Подмножество контуров $\{(1,4), (4,3)\}$

$$\Phi_{((1,4), (4,3))} = \Phi_{(1,4)} + \gamma_{(4,3)} = 15 + 2 = 17$$



7. Сравнение $\Phi_{((1,4), (\overline{4,3}))} = 19 > \Phi_{((1,4), (4,3))} = 17$

Пример решения задачи о коммивояжере

8. Развитие подмножества $\{(1,4), (4,3)\}$

Таблица 11.

i \ j	1	2	5
2	0 (1)	∞	1
3	∞	0 (1)	0 (1)
5	0 (1)	1	∞

Выбор $\gamma_{(\overline{2,1})} = 1$

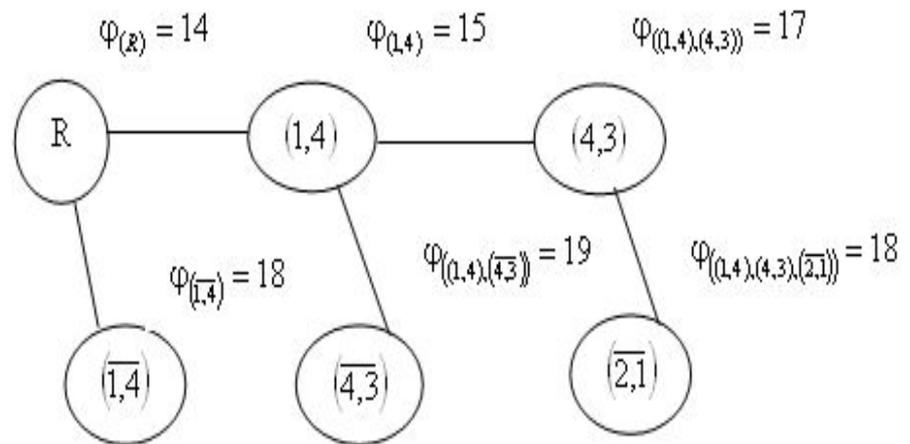
Таблица 12.

i \ j	1	2	5	α_i
2	∞	∞	1	1
3	∞	0	0	0
5	0	1	∞	0

Таблица 13.

i \ j	1	2	5
2	∞	∞	0
3	∞	0	0
5	0	1	∞
β_j	0	0	0

$$\Phi_{((1,4), (4,3), (\overline{2,1}))} = \Phi_{((1,4), (4,3))} + \gamma_{(\overline{2,1})} = 17 + 1 = 18$$



Пример решения задачи о коммивояжере

9. Включение дуги $(2,1)$ в гамильтонов контур
 $(\alpha_{32} = \infty)$

Таблица 14.

i \ j	2	5	α_i
3	∞	0	0
5	1	∞	1

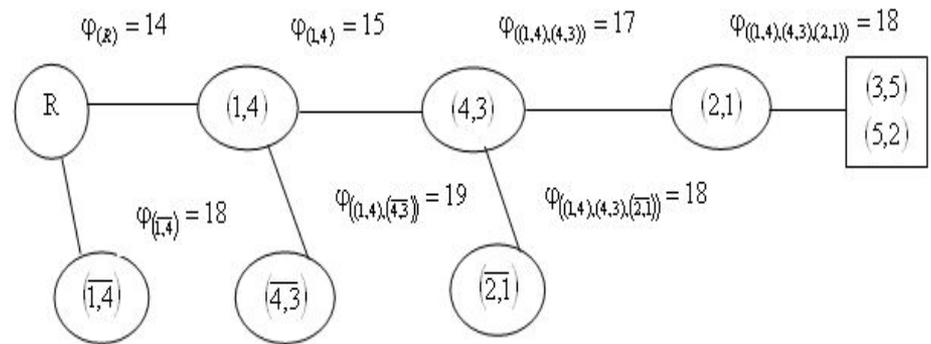
Таблица 15.

i \ j	2	5
3	∞	0
5	0	∞
β_j	0	0

$$\gamma_{(2,1)} = 1$$

Подмножество контуров $\{(1,4), (4,3), (2,1)\}$

$$\Phi_{((1,4), (4,3), (2,1))} = \Phi_{((1,4), (4,3))} + \gamma_{(2,1)} = 17 + 1 = 18$$



9. Сравнение $\Phi_{((1,4), (4,3), (\overline{2,1}))} = \Phi_{((1,4), (4,3), (2,1))} = 18$

10. развитие обеих ветвей

ветвь $\{(1,4), (4,3), (2,1)\}$ - из таблицы 15 размером 2×2
 в гамильтонов контур входят
 дуги $(3,5)$ и $(5,2)$

Гамильтонов контур $1-4-3-5-2-1$ длиной $\mu = 18$ $\text{Res} = 18$

ветвь $\{(1,4), (4,3), (\overline{2,1})\}$ - развитие далее по алгоритму

Дерево маршрутов

Дополнительно развитие ветвей $\{(1,4), (4,3), (\overline{2},1)\}$ и $\{(\overline{1},4)\}$ с нижней границей 18

