

Лекция № 11. Отклик линейных систем. Свёртка

11.1. Отклик линейных систем во временной области

Линейная система – это такая система, выходной отклик которой на два или более входных сигнала равен сумме откликов на каждый из этих сигналов, действующих по отдельности. Если система не изменяется во времени, то отклик на заданный входной сигнал не зависит от начала отсчета сигнала.

На рис. 11.1 показана не изменяющаяся во времени линейная система, а также ее выходной сигнал в предположении, что входным сигналом является единичный импульс. На рисунке также показано, что момент подачи входного импульса не влияет на форму выходного сигнала.

Если на вход подается последовательность импульсов с различной эффективной силой и различным положением на временной оси, то выходной сигнал является суммой откликов на отдельные импульсы.

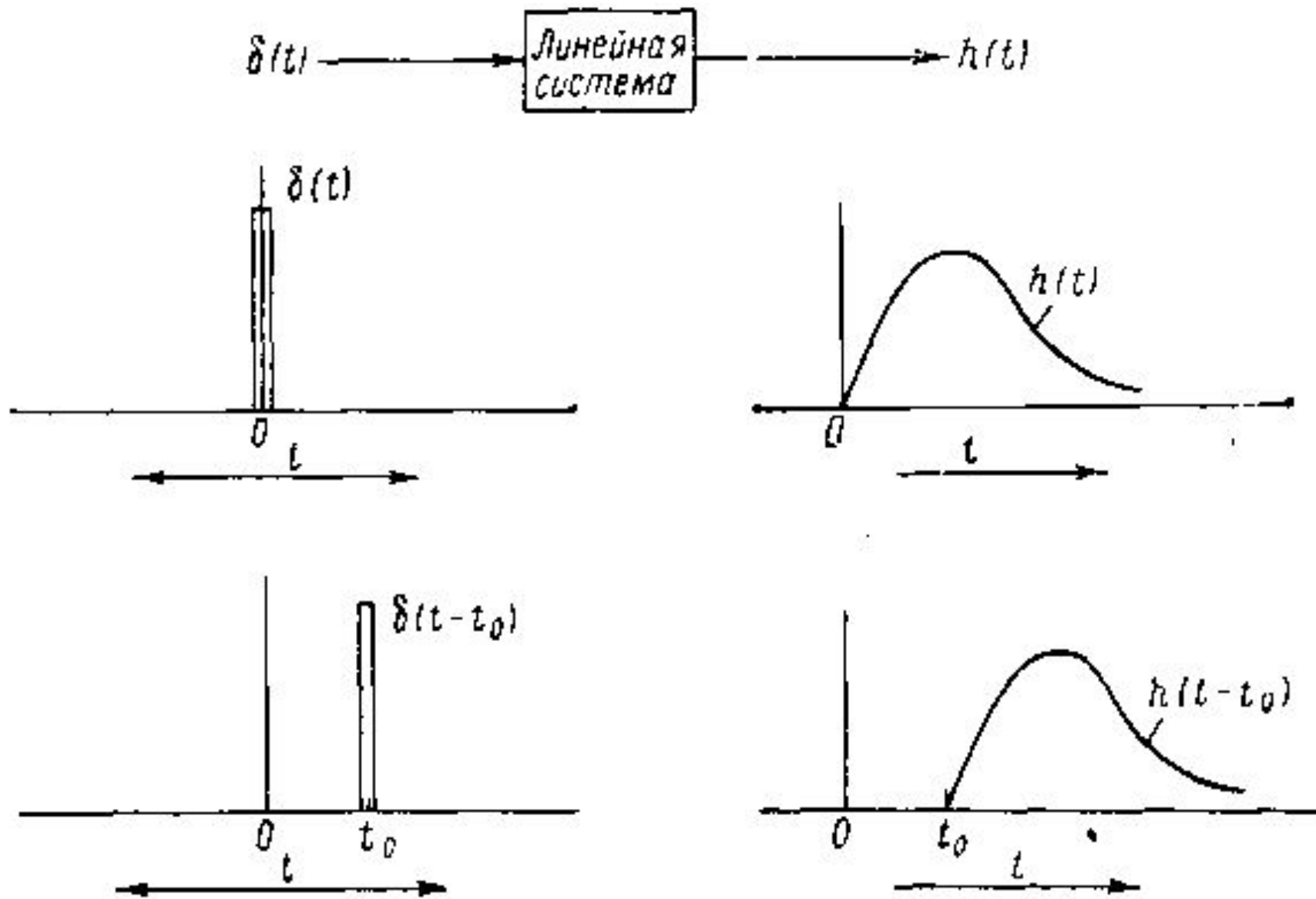


Рис. 11.1. Импульсная реакция линейной системы

Пусть входной сигнал имеет вид

$$s_1(t) = \sum_{n=1}^N a_n \delta(t - t_n). \quad (11.1)$$

Отклик системы на единичный импульс в начале координат называется импульсной реакцией $h(t)$. Следовательно, выходной сигнал

$$s_2(t) = \sum_{n=1}^N a_n h(t - t_n). \quad (11.2)$$

Пусть теперь входной сигнал является непрерывной функцией, которая может быть, тем не менее, аппроксимирована последовательностью прилегающих друг к другу узких прямоугольных импульсов. При ширине, приблизительно равной нулю, импульсы становятся похожими на импульсную функцию (рис. 11.2).

Непрерывный сигнал $s_1(t)$ содержит импульсный элемент при $t = \tau$ такой, что импульс в точке

$$\tau = s_1(t) \delta(t - \tau) dt.$$

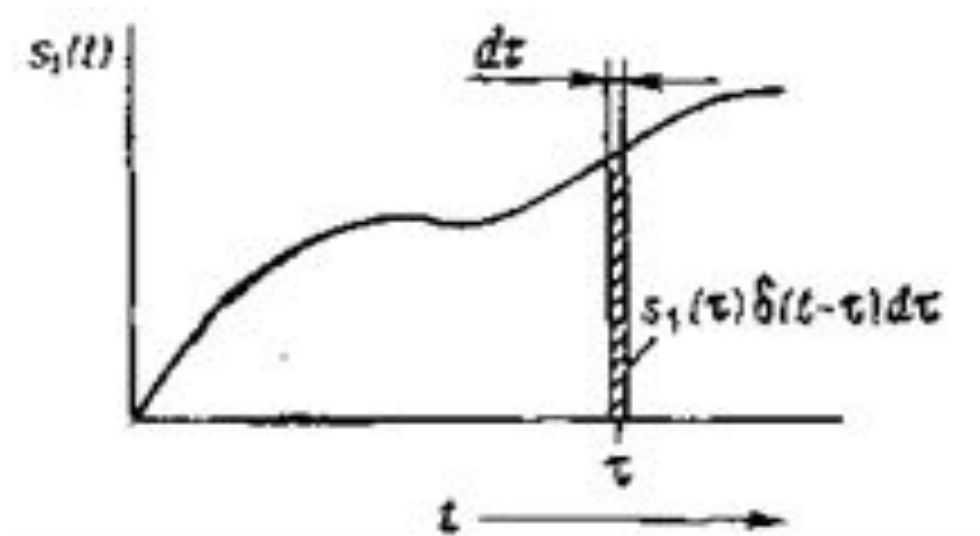


Рис. 11.2. Импульсный элемент произвольной функции $s_1(t)$

Эффективная сила этого импульса равна $s_1(\tau)d\tau$, а отклик системы на него

$$\text{выход} = s_1(\tau)h(t - \tau)d\tau . \quad (11.3)$$

Полный выходной сигнал, образуемый всеми импульсными элементами входного сигнала, получается суммированием всех компонент типа (11.3). Поскольку τ – непрерывная переменная, то эта сумма становится интегралом. Таким образом,

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau)h(t - \tau)d\tau . \quad (11.4)$$

Интеграл (11.4) называется интегралом свертки. Выходной отклик линейной системы получается сверткой импульсной реакции системы с входной функцией.

Выражение (11.4) можно также записать так:

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s_1(t - \tau) d\tau. \quad (11.5)$$

Интеграл свертки встречается настолько часто, что для него во многих случаях используется следующее сокращенное обозначение:

$$s(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (11.6)$$

11.2. Описание свёртки

Свертка, кроме всего прочего, описывает, как выход системы определяется взаимодействием входа с самой системой. Как известно, обычно выход системы является запаздывающей и подавленной или усиленной версией входа.

Рассмотрим выход системы, порожденный импульсным входом, т.к. любой вход можно представить как последовательность импульсов разной мощности.

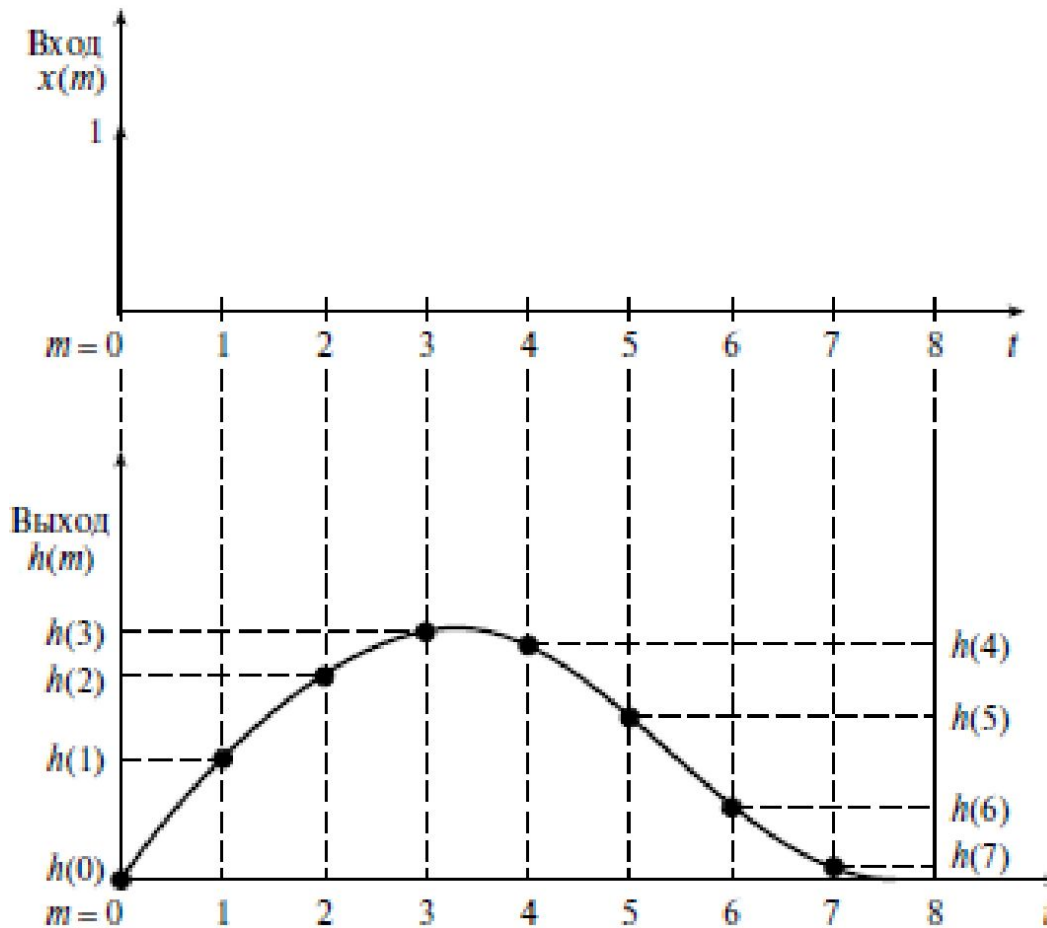


Рис. 11.3. Входной импульс и соответствующая импульсная характеристика системы

Итак, выход системы, инициированный импульсным входом, не будет соответствующим импульсом, а будет меняться со временем, в некоторый момент достигая максимального значения, как показано на рис. 11.3. Из данного рисунка видно, что в момент взятия выборки m выход, порожденный единичным импульсом, поданным в момент 0, равен $h(m)$. Данная величина называется импульсной характеристикой системы или ее импульсным откликом.

Далее рассмотрим подачу на вход системы последовательности импульсов $x(m)$ в моменты времени m . В контексте рис. 11.3 выход в момент времени 0 равен $y(0)$, причем

$$y(0) = h(0)x(0).$$

В дискретный момент времени $m = 1$ выход равен $h(0)x(1)$ (влияние текущего входа $x(1)$) плюс $h(1)x(0)$ (запаздывающее влияние входа, поданного в момент $m = 0$).

Следовательно,

$$y(1) = h(1)x(0) + h(0)x(1).$$

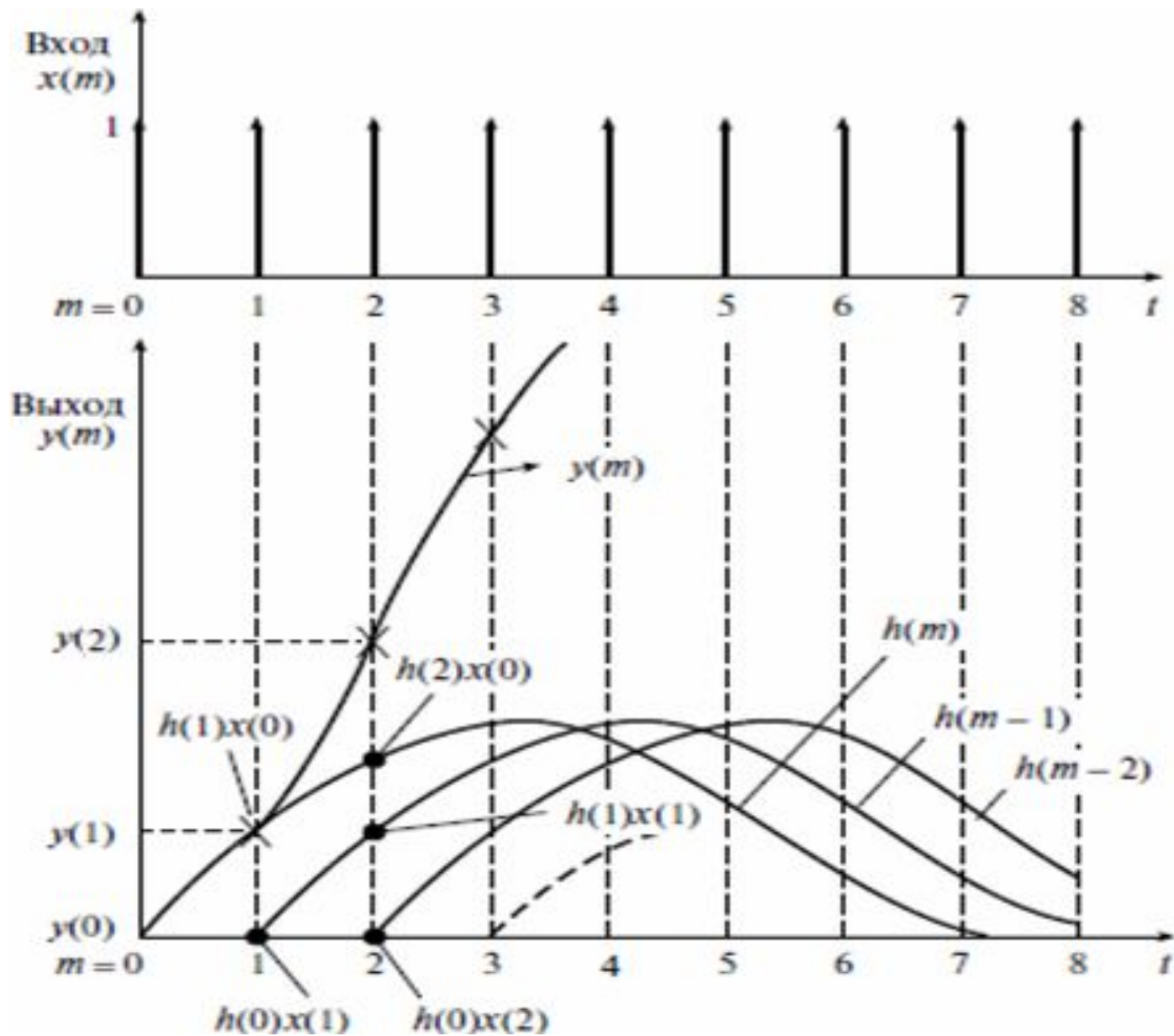


Рис. 11.4. Входная импульсная последовательность и характеристика системы, полученная из отдельных импульсных откликов

Таким образом, последующие выходы запишутся так:

$$\begin{aligned}y(2) &= h(2)x(0) + h(1)x(1) + h(0)x(2) \\y(3) &= h(3)x(0) + h(2)x(1) + h(1)x(2) + h(0)x(3) \\&\quad \cdot \cdot \cdot \\y(n) &= h(n)x(0) + h(n-1)x(1) + \dots + h(0)x(n).\end{aligned}\tag{11.7}$$

Если система линейна, выход можно записать как линейную сумму влияния предыдущих входов. Выход линейной системы первого порядка описывается уравнением (11.7).

Изучая приведенные выражения, находим, что выход получается умножением входной последовательности на соответствующие точки обращенной во времени функции импульсной характеристики. Альтернативный вариант – записать уравнение (11.7) в таком виде:

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(n)x(0)\tag{11.8}$$

и рассматривать выход как произведение соответствующих пар точек в функции импульсной характеристики и обращенной во времени входной последовательности.

Следовательно, свёрточная сумма эквивалента взаимной корреляции одной последовательности и обращенной во времени другой.

Уравнения (11.7) и (11.8) можно записать компактно:

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(n-m)x(m) \quad (11.9)$$

и

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m) \quad (11.10)$$

Данные функции называются свёрточными суммами входов с импульсной характеристикой, а выход находится как свертка входа с импульсной характеристикой системы.

Уравнения (11.9) и (11.10) можно расширить на сигналы бесконечной длительности, записав их следующим образом:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) \otimes h(n) \quad (11.11)$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n) \otimes x(n) \quad (11.12)$$

Если вход состоит из непрерывной последовательности импульсов, приведенную выше сумму можно заменить интегралом.

До этого момента термином свертка назывался результат свертки импульсной характеристики системы с входом системы. В то же время, данную концепцию можно расширить на свертку любых двух наборов данных и рассматривать термин в более широком смысле.

В качестве примера свернем две периодические во времени последовательности $\{4, 3, 2, 1\}$ ($h(m)$) и $\{1, 2, 3, 4\}$ ($x(m)$). На рис. 11.5а показана периодическая последовательность $\{4, 3, 2, 1\}$ ($h(m)$), а на рис. 11.5б – обращенная во времени последовательность $(h(-m))$, $\{1, 2, 3, 4\}$. (Напомним, что сверточная сумма требует, чтобы одна из последовательностей умножалась на обращенную во времени вторую последовательность, т.е. свертка соответствует взаимной корреляции одной последовательности с обращенной во времени второй.)

На рисунке также показано окно, ширина которого равна одному периоду по которому выполняется свертка.

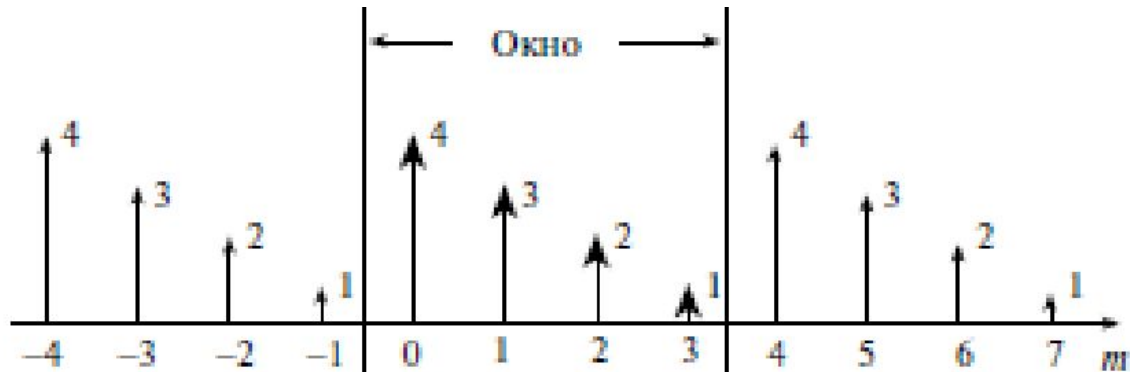
Очевидно, что полученный результат будет периодическим, как и при нахождении взаимной корреляции, так что необходимо найти только свертку по выделенному интервалу. На рис. 11.5e для справки показана вторая последовательность $\{1, 2, 3, 4\}$ ($x(m)$).

На рис. 11.5 обозначены:

- а) периодическая последовательность $h(m)$;
- б) обращенная во времени последовательность $h(-m)$;
- в) – д) копии $h(-m)$, последовательно смещаемые вправо;
- е) последовательность $x(m)$;
- ж) выходная последовательность $y(m) = h(n) \otimes x(n)$

$$h(m) = \{4, 3, 2, 1\}$$

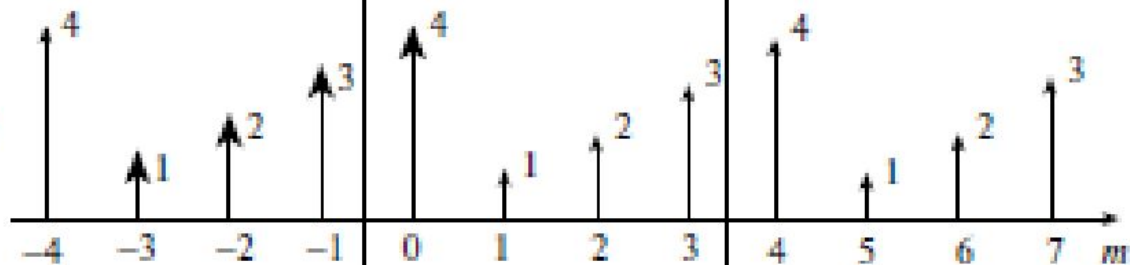
а)



б)

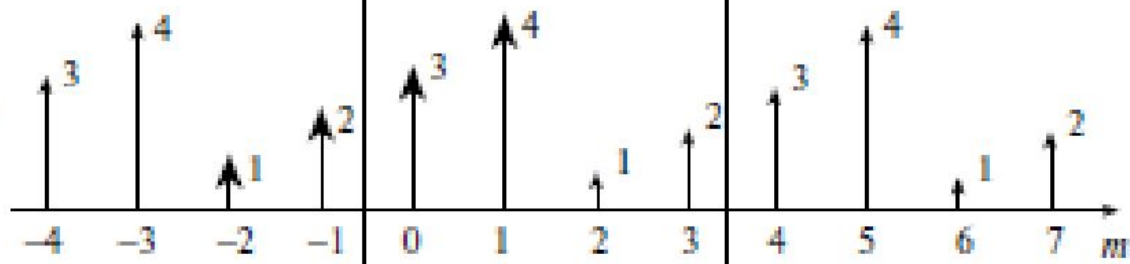
$$h(-m)$$

$$n=0$$



в)

$$n=1$$



г)

$$n=2$$



Рис. 11.5. Свертка $y(m)$ последовательностей $h(n)$ и $x(n)$

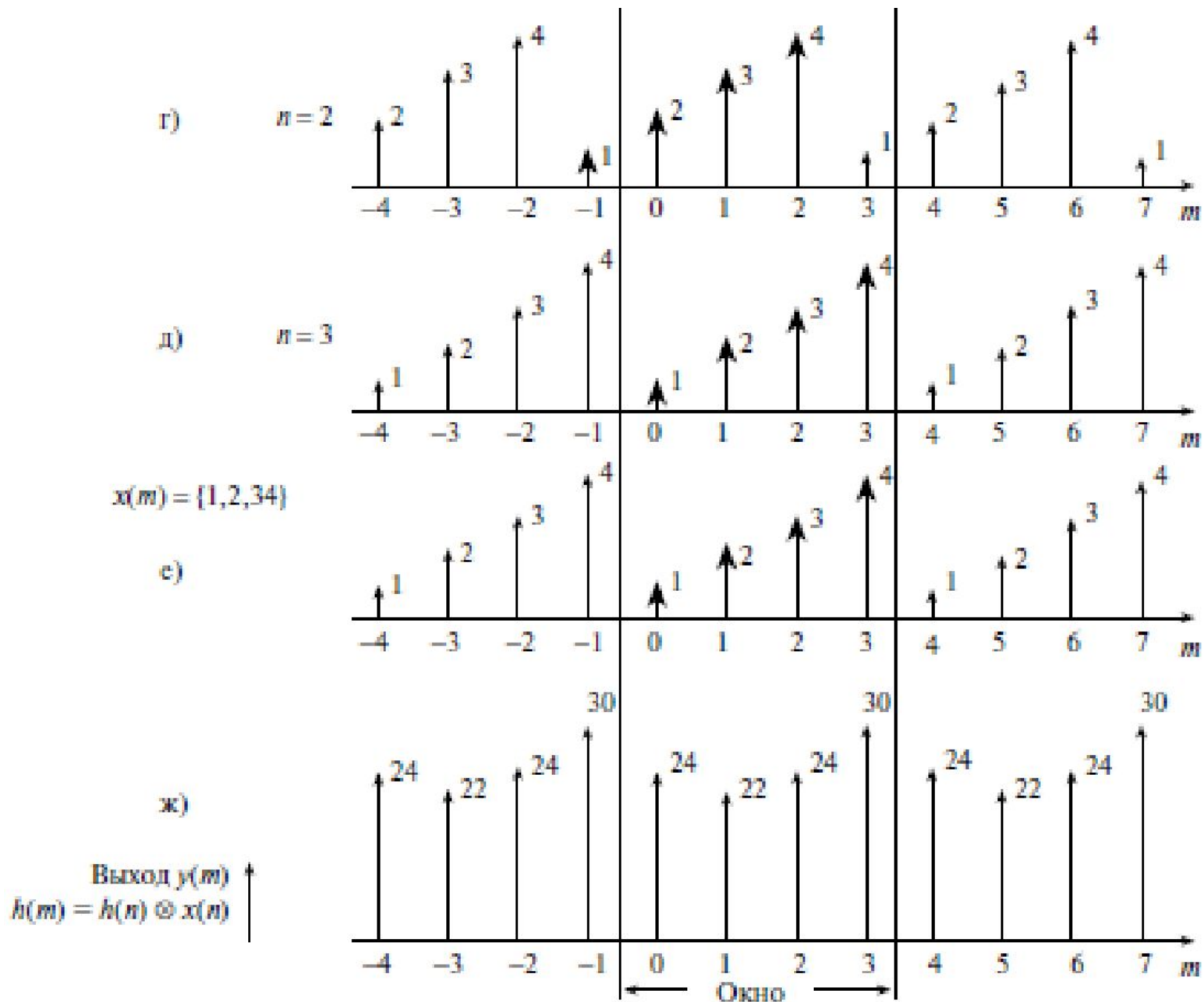


Рис. 11.5. Свертка $y(m)$ последовательностей $h(n)$ и $x(n)$

При $n = 0$ уравнение (11.9) переходит в следующее:

$$y(0) = \sum_{m=0}^n h(-m)x(m)$$

Согласно этой формуле взаимная корреляция данных в окне на рис. 11.5б и e равна

$$y(0) = 4 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 24.$$

При $n = 1$ уравнение (11.9) переходит в следующее:

$$y(1) = \sum_{m=0}^n h(1-m)x(m)$$

и согласно этой формуле взаимная корреляция данных в окне на рис. 11.5в и e равна

$$y(1) = 3 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 4 = 22.$$

Следовательно,

$$y(2) = 2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 1 \times 4 = 24,$$

и
$$y(3) = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 = 30.$$

Далее выходная последовательность (см. рис. 11.5ж) циклично повторяется.

Свертка двух прямоугольных функций

Если сигналы поддаются строгому математическому описанию, свертку можно выполнить аналитически.

Часто встречающейся операцией является свертка прямоугольной функции с собой. Пусть $s(t) = \text{rect}(t/t_H)$, тогда

$$s(t) \otimes s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\tau}{t_H}\right) \text{rect}\left[\frac{(t-\tau)}{t_H}\right] d\tau.$$

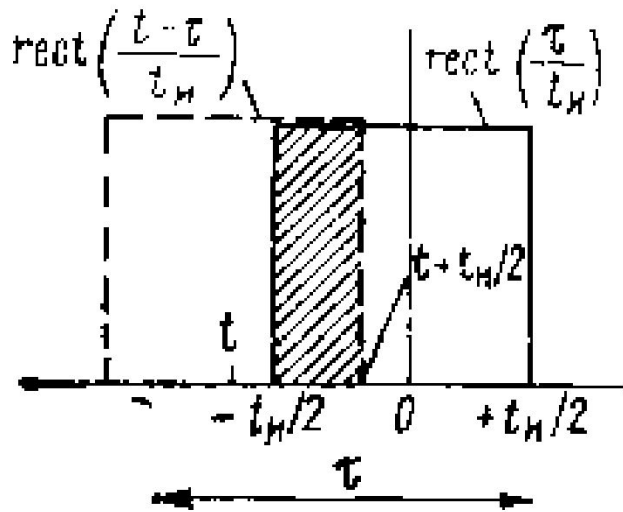


Рис. 11.6. Пересечение двух прямоугольных функций при операции свертки

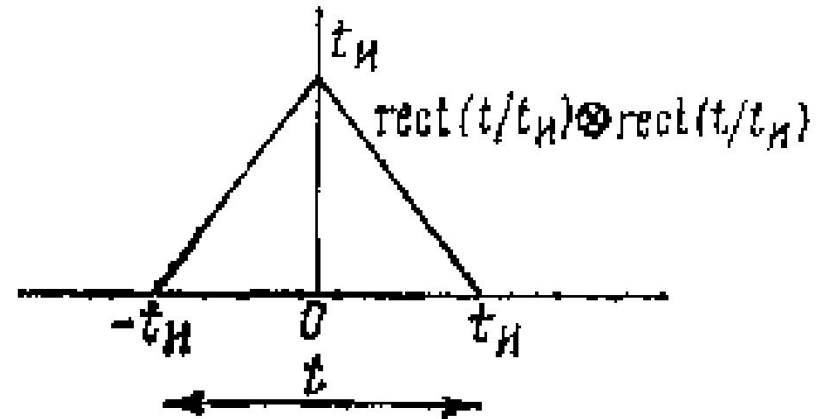


Рис. 11.7. Результат автосвёртки прямоугольной функции

Произведение двух прямоугольных функций под интегралом отлично от нуля только в области, где они перекрываются (рис. 11.6).

При отрицательных t пределы интегрирования равны $-t_{\text{и}}/2$ и $t + t_{\text{и}}/2$. Поэтому

$$s(t) \otimes s(t) = \int_{-t_{\text{и}}/2}^{t+t_{\text{и}}/2} d\tau = t + t_{\text{и}}, \quad -t_{\text{и}}/2 \leq t \leq 0.$$

При положительных t аналогично

$$s(t) \otimes s(t) = \int_{t-t_{\text{и}}/2}^{t_{\text{и}}/2} d\tau = t_{\text{и}} - t, \quad 0 \leq t \leq t_{\text{и}}/2.$$

Объединив эти результаты, получим

$$s(t) s(t) = t_{\text{и}} (1 - |t| / t_{\text{и}}) \text{rect}(t / 2t_{\text{и}}). \quad (11.13)$$

Таким образом, автосвёртка прямоугольного импульса приводит к треугольному импульсу (рис. 11.7).

11.3. Свойства свертки

1. Закон коммутативности

$$s_1(t) \otimes s_2(t) = s_2(t) \otimes s_1(t)$$

Отметим, что данное выражение идентично следующему:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau.$$

2. Закон дистрибутивности

$$s_1(t) \otimes [s_2(t) + s_3(t)] = s_1(t) \otimes s_2(t) + s_1(t) \otimes s_3(t);$$

3. Закон ассоциативности

$$s_1(t) \otimes [s_2(t) \otimes s_3(t)] = [s_1(t) \otimes s_2(t)] \otimes s_3(t)$$

4. Закон аддитивности (временные задержки суммируются)

Предположим, что три функции связаны соотношением

$s_3(t) = s_1(t) \otimes s_2(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} s_1(t - t_1) \otimes s_2(t - t_2) &= s_1(t) \otimes \delta(t - t_1) \otimes s_2(t) \otimes \delta(t - t_2) = \\ &= s_1(t) \otimes s_2(t) \otimes \delta[t - (t_1 + t_2)] = s_3(t) \otimes \delta[t - (t_1 + t_2)] = \\ &= s_3[t - (t_1 + t_2)]. \end{aligned}$$

11.4. Круговая свертка

Так как результат корреляции двух периодических последовательностей неравной длины – это циклическая последовательность, период которой равен периоду меньшей последовательности, но это является неверным результатом.

Поскольку свертка эквивалента взаимной корреляции одной последовательности с обращенной во времени второй, сказанное справедливо и для свертки. Следовательно, как и в случае с корреляцией, при свертке необходимо, чтобы две последовательности были равной длины.

Итак, если длины последовательностей равны N_1 и N_2 , то к первой из них следует добавить $N_2 - 1$ нулей, а ко второй – $N_1 - 1$ нулей.

После этого обе последовательности получают равную длину $N_1 + N_2 - 1$, и будет вычислено правильное значение линейной свертки при выполнении других необходимых условий, указанных в разделе, посвященном корреляции.