

Математика

Интегралы

Неопределенный интеграл (основные понятия)

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F(x) + C.$$

Определение: Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется множество первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают:

$$\int f(x) dx = F(x) + C;$$

Некоторые интегралы

1) Степенная функция $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

2) Экспонента $\int e^x dx = e^x + C$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$

Примеры

• 1. $\int x dx = x^2 / 2 + C$

4. $\int x^2 dx = x^3 / 3 + C$

• 2. $\int 5 dx = 5x + C$

5. $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = x^{-1} / (-1) = -\frac{1}{x} + C$

• 3. $\int (2x - 3) dx = x^2 - 3x + C$

Тест по неопределенному интегралу

- 1. Первообразная постоянной функции $f(x)=2$ равна
 - 1) 0 2) 2 3) $2x$
- 2. Для какой функции первообразная равна $\ln |x|$
 - 1) 1 2) $1/x$ 3) x
- 3. Неопределенный интеграл от $f(x)=2x$ равен
 - 1) 2 2) x^2+C 3) x^2
- 4. Неопределенный интеграл от $f(x)=4-5x$ равен
 - 1) $4-5x$ 2) $-0,25(4-5x)$ 3) $4x-2,5x^2+C$

Определенный интеграл (основные понятия)

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Разобьём этот отрезок на n частей длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Выберем на каждой из частей произвольную точку ξ_i и найдем произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$.

Составим сумму $S = \sum f(\xi_i)\Delta x_i$

таких произведений, которая называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Обозначим через λ наибольшую из длин частичных отрезков.

Определение определенного интеграла

- **Определение.** Если существует конечный предел интегральной суммы **S** при $\lambda \rightarrow 0$, то этот предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$. Его обозначают

$$\int_a^b f(x) dx$$

- **a**-нижний, **b**-верхний пределы интегрирования.
- Определенный интеграл- это **число**.

Основная теорема интегрального исчисления

Теорема Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где

F (x) - какая либо первообразная для f(x).

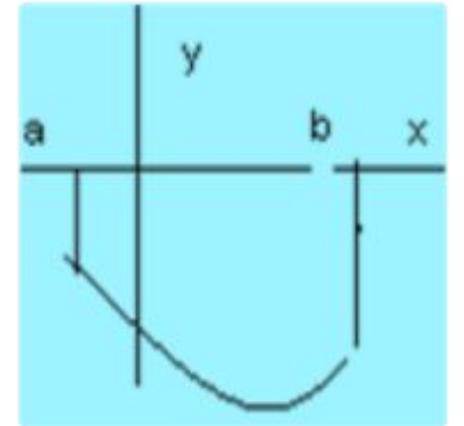
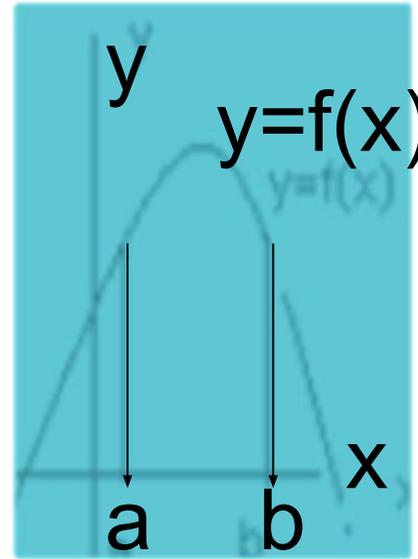
Примеры: 1) $\int_1^2 (x^3 + 2x) dx = (x^4 / 4 + x^2) \Big|_1^2 = (16 / 4 + 4) - (1 / 4 + 1) = 6,75$

2) $\int_1^3 (2x - 1) dx = (x^2 - x) \Big|_1^3 = (9 - 3) - (1 - 1) = 6$

Последний интеграл может быть проверен исходя из геометрического смысла.

Геометрический смысл определенного интеграла

- Геометрический смысл определённого интеграла кратко формулируется так: определённый интеграл от неотрицательной функции $f(x) \geq 0$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу - осью абсцисс, слева – прямой $x = a$ и справа - прямой $x = b$.
- (площади подграфика функции
- $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$).



- Замечание. Если $f(x) \leq 0$, то для вычисления площади интеграл берется со знаком “-”.
- .

Пример 4 контрольной работы

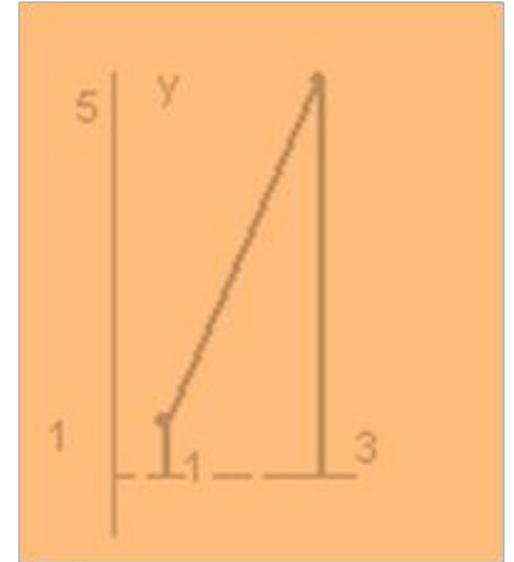
Пример. Вычислить интеграл и проверить результат, исходя из его геометрического смысла.

$$1) \int_1^3 (2x - 1) dx = (x^2 - x) \Big|_1^3 = (9 - 3) - (1 - 1) = 6$$

2) Построим фигуру, ограниченную сверху прямой $y=2x-1$, снизу осью Ox , с боков прямыми $x=1$, $x=3$. (См. рисунок).

Это трапеция с основаниями $y(1)$ и $y(3)$ и высотой, равной длине отрезка $[1, 3]$. $y(1)=1$, $y(3)=5$, откуда $S=(1+5)/2 \cdot (3-1)=6$

Ответы совпадают



Тест по определенному интегралу

• Интегралы равны:

- | | | | | | | | | |
|----|---------------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| 1. | $\int_0^3 (2x - 1) dx$ | 1. | A. | 5 | B. | 6 | C. | 7 |
| 2. | $\int_1^2 (2 - x) dx$ | 2. | A. | 2 | B. | 3 | C. | 4 |
| 3. | $\int_0^2 3x^2 dx$ | 3. | A. | 5 | B. | 6 | C. | 7 |
| 4. | $\int_1^2 (3x^2 + 2x) dx$ | 4. | A. | 10 | B. | 12 | C. | 14 |

Ответы на тест по определенному интегралу

- 1. C
- 2. A
- 3. C
- 4. A