

ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

- 1. Д.Э. Постнов «Введение в динамику итерируемых отображений».**
Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007.
- 2. В.С. Анищенко «Знакомство с нелинейной динамикой».** Москва:
Изд-во УРСС, 2008.

1. Динамическая система и ее математическая модель

Динамическая система (ДС) - это любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени, и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию *однозначно* прогнозировать будущее состояние ДС и его называют законом эволюции, который является *детерминированным оператором*.

Таким образом, главное свойство ДС состоит в том, что зная ее состояние в некоторый момент времени, можно найти состояние в любой последующий момент времени. Для этого достаточно применить к начальному состоянию закон эволюции.

В смысле его задания ДС могут описываться с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, с помощью теории графов, теории марковских цепей и т.д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид математической модели соответствующей ДС.

Математическая модель ДС считается заданной, если введены параметры (*координаты*) системы, определяющие однозначно ее *состояние*, и указан *закон эволюции* состояния во времени.

В зависимости от степени приближения одной и той же системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели. Исследуя одну и ту же динамическую систему (например, движение маятника), в зависимости от учета различных факторов мы получим различные математические модели.

В дальнейшем под динамической системой будем понимать ее математическую модель.

2. Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим ДС, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений. Для определения ДС указывается объект, допускающий описание состояния заданием величин x_1, x_2, \dots, x_N в некоторый момент времени $t = t_0$. Величины x_i могут принимать произвольные значения, причем двум различным наборам величин x_i и x'_i отвечают два разных состояния. Закон эволюции динамической системы во времени записывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, \dots, x_N, \mu), \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, \dots, x_N, \mu), \\ &\dots \\ \frac{dx_N}{dt} &= F_N(x_1, \dots, x_N, \mu).\end{aligned}\quad (1)$$

Величины x_1, x_2, \dots, x_N - фазовые переменные системы,

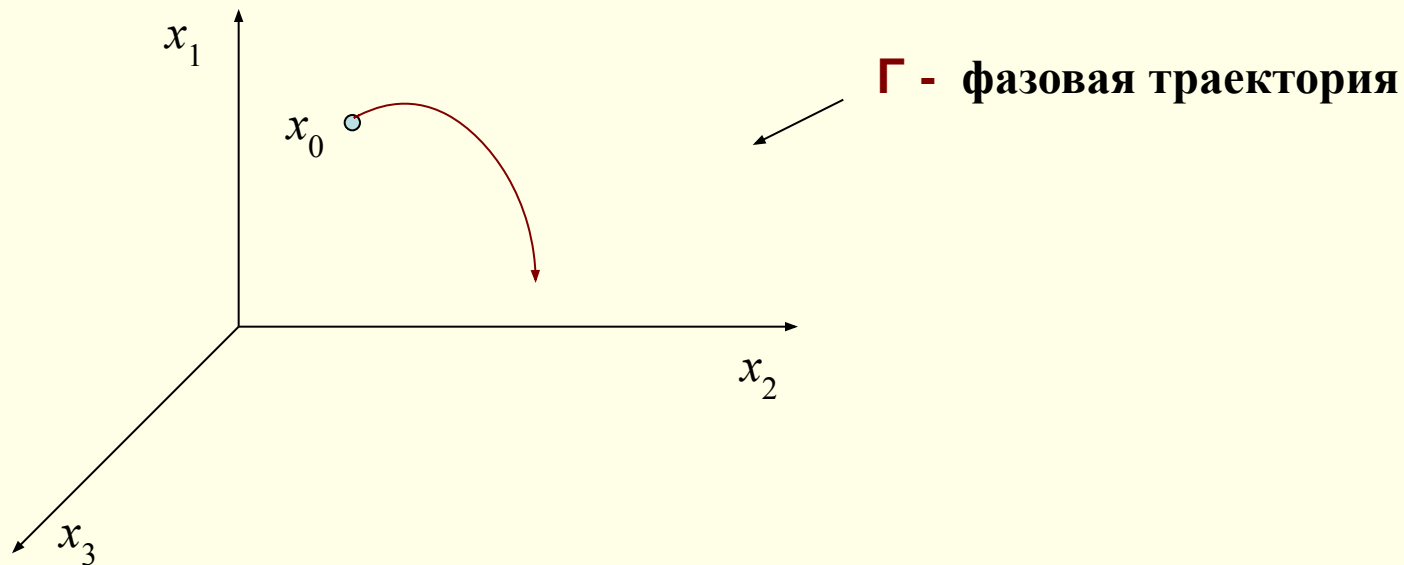
μ - вектор управляющих параметров,

F_1, F_2, \dots, F_N - некоторые функции.

Если рассматривать величины x_1, x_2, \dots, x_N как координаты точки x в N -мерном пространстве, то получается наглядное геометрическое представление состояния ДС в виде этой точки.

Данная точка называется *изображающей* или **фазовой точкой**, а пространство состояний – **фазовым пространством** системы. Изменению состояния системы во времени отвечает движение фазовой точки вдоль некоторой линии, называемой **фазовой траекторией**.

Правые части уравнений F_1, F_2, \dots, F_N определяют скорость движения изображающей точки в N -мерном фазовом пространстве.



3. Классификация динамических систем

Система (1) может быть записана в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

В этом случае постулируется, что каждому $\mathbf{x}(t_0)$ в фазовом пространстве ставится в соответствие состояние $\mathbf{x}(t)$ ($t > t_0$), куда за время $t - t_0$ переместится фазовая точка, движущаяся в соответствии с уравнением (2). В операторной форме (2) можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}_t(t_0), \quad (3)$$

где \mathbf{T}_t – закон (оператор) эволюции. Если этот оператор применить к начальному состоянию $\mathbf{x}(t_0)$, то мы получим $\mathbf{x}(t)$, то есть состояние в момент времени $t > t_0$. Оператор \mathbf{T}_t можно назвать *оператором отображения* или просто *отображением*.

Динамические системы можно классифицировать в зависимости от вида оператора отображения и структуры фазового пространства.

1. Если оператор предусматривает только линейные преобразования начального состояния, то он называется *линейным*. Линейный оператор обладает свойством суперпозиции:

$$\mathbf{T}[\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)] = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}\mathbf{y}(t).$$

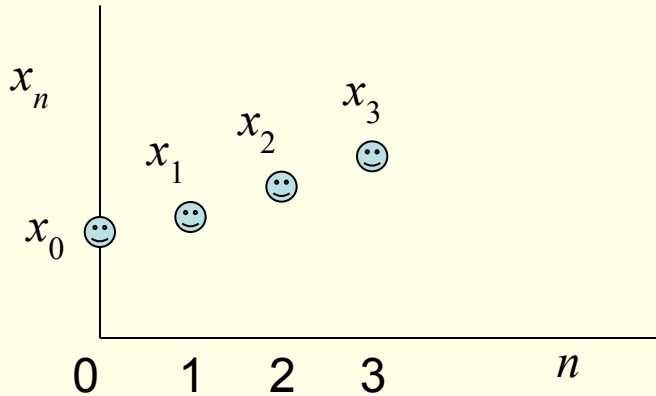
Если оператор нелинейный, то и соответствующая динамическая система называется *нелинейной*.

2. Системы, для которых отображение $\mathbf{x}(t)$ с помощью оператора \mathbf{T} может быть определено для любых $t > t_0$ (непрерывно во времени), называют *системами с непрерывным временем* или *потоками* (по аналогии со стационарным течением жидкости).

Если оператор отображения определен на дискретном множестве значений времени, то соответствующие динамические системы называют *системами с дискретным временем*, или *итерируемыми отображениями* (в дальнейшем для краткости – просто *отображения*).

В общем виде систему с дискретным временем можно записать следующим образом:

$$\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\mu}). \quad (4)$$



\mathbf{x} – вектор координат состояния;

n – дискретное время;

$F(\mathbf{x})$ – вектор-функция с компонентами f_i , $i=1,2,\dots, N$, задающая закон преобразования из предыдущей величины \mathbf{x}_n в последующую \mathbf{x}_{n+1} ;

$\boldsymbol{\mu}$ – вектор управляющих параметров системы.

Для одномерного случая уравнение (4) примет вид:

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu).$$

x_0 – начальное состояние системы при $n = 0$.

Последовательность точек $\mathbf{x}_n (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляет дискретную фазовую траекторию отображения.

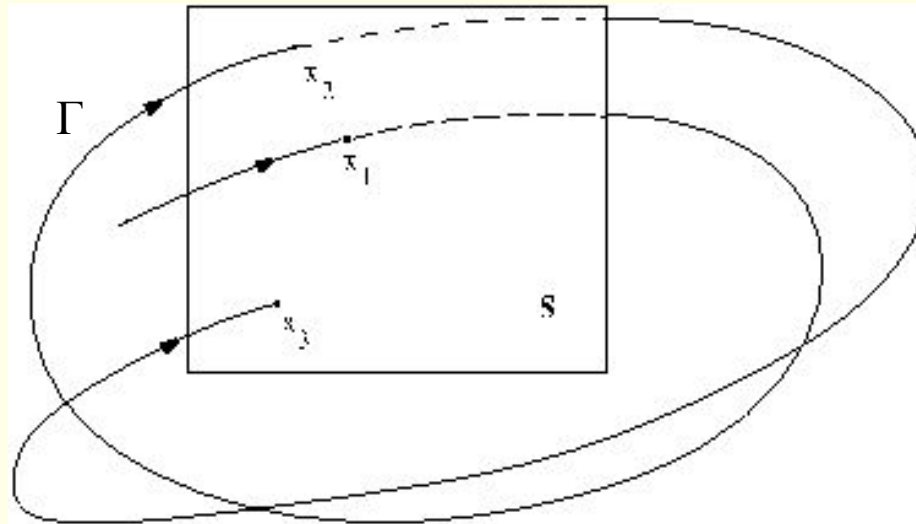
Под **размерностью дискретной системы N (4)** понимают количество независимых переменных состояния (размерность вектора состояния \mathbf{x}). Как и для систем с непрерывным временем, оно соответствует числу уравнений.

Причины существования дискретных динамических систем.

1. Многие процессы в природе имеют дискретный характер. Например, длительность светового дня можно измерить не чаще чем 365 раз в году. Изменение состояния микропроцессора в компьютере подчинено сигналам тактового генератора, а в промежутках между ними его состояние неизменно.

Системы с дискретным временем могут рассматриваться как самостоятельные при описании, например, экологических, экономических и социальных процессов.

2. Если наложить дополнительное условие на модель с непрерывным временем (введение так называемого *сечения Пуанкаре*), то данная модель переходит уже в класс систем с дискретным временем.



Фазовая траектория Γ , характеризующая режим движения некоторой дифференциальной системы, последовательно и трансверсально пересекает поверхность S (размерности $N - 1$), которая называется *секущей Пуанкаре*.

Траектория Γ порождает на секущей некоторое точечное отображение, однозначно (но не взаимно однозначно) ставящее в соответствие любой точке x_n пересечения Γ с S ближайшую следующую за x_n точку x_{n+1} . Полученное дискретное множество x_n на секущей называется *сечением Пуанкаре* для траектории Γ .

Закон соответствия между предыдущей и последующей точками пересечения называется отображением последования или *отображением Пуанкаре*.

В общем случае отображение Пуанкаре задается нелинейным дискретным уравнением, размерность которого равна размерности секущей Пуанкаре.

От любой динамической системы с непрерывным временем можно перейти к соответствующему отображению, которое однозначно задается выбранным дополнительным условием. Однако обратное неверно. Одному и тому же отображению может соответствовать бесконечное количество динамических систем с непрерывным временем, так как существует бесконечное число способов заполнить промежуток между отсчетами времени.

4. Итерирование линейного отображения.

Если не сопоставлять количественно динамику отображения с поведением динамической системы с непрерывным временем, то величина интервалов времени между отсчетами не имеет значения. Достаточно просто перенумеровать значения, которые принимает переменная.

Одномерное отображение можно записать в виде рекуррентного соотношения:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (5)$$

Здесь $f(x_n)$ – это **функция последования**, задающая закон преобразования из предыдущей величины x_n в последующую x_{n+1} . Простейший случай, когда $f(\)$ является константой, $f(x) = a$ приводит к линейному отображению.

Чтобы найти величину x_m , отстоящую на m шагов во времени от x_0 , достаточно m раз применить $f(\)$, сначала к x_0 , а затем каждый раз – к получившейся величине. Применение функции последования на каждом шаге по времени называют *итерацией*, или *итерированием* отображения.

Проделаем процедуру итерирования на примере линейного отображения

$$x_{n+1} = ax_n :$$

$$x_1 = ax_0,$$

$$x_2 = ax_1 = a^2 x_0,$$

$$x_3 = ax_2 = a^3 x_0,$$

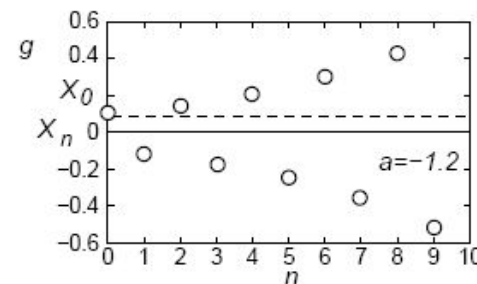
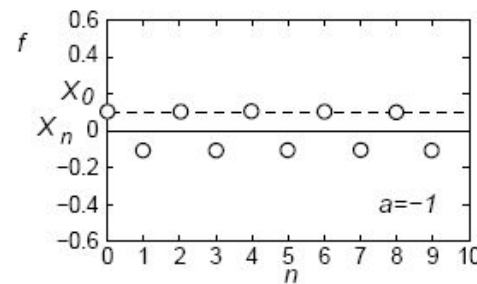
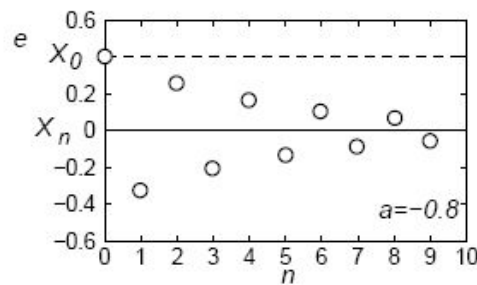
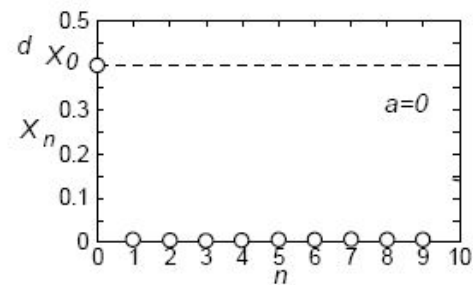
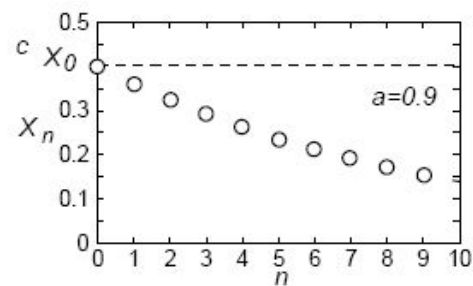
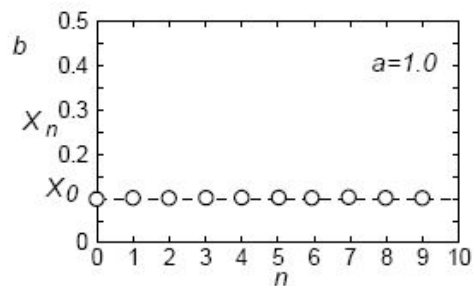
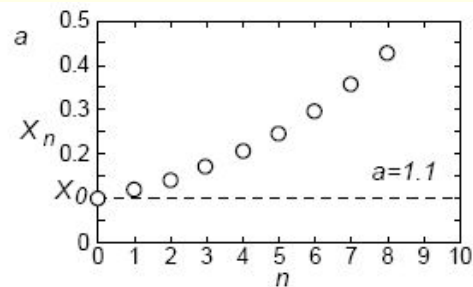
...

$$x_m = ax_{m-1} = a^m x_0.$$

m -кратное применение функции $f()$ обычно обозначают как

$$f^{(m)}(x_0) = f(f(f(\dots f(x_0)\dots))).$$

Рассмотрим примеры фазовых траекторий линейного отображения $x_{n+1} = ax_n$ для различных значений параметра a



При $a > 1$ значение x_n неограниченно увеличивается по закону геометрической прогрессии.

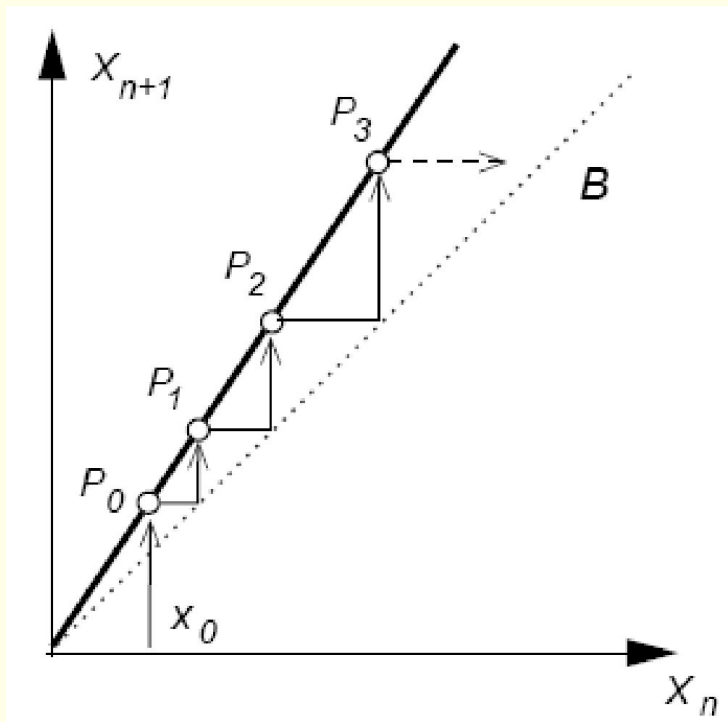
Точное равенство $a = 1$ оставляет x_n неизменным при любых n .

При $0 < a < 1$, величина x_n монотонно убывает, асимптотически стремясь к нулю.

При $a < 0$ процесс итерации приобретает характерную особенность: x_n меняет знак на каждом шаге итерации. По этой причине как схождение процесса итераций к нулю, так и его разбегание в бесконечность приобретают осциллирующий характер.

Графический способ итерирования одномерного отображения.

Диаграмма Ламерея



Пусть x_0 – начальная точка. Отложим это значение по оси абсцисс. Тогда по оси ординат функция последования $x_{n+1} = ax_n$ даст следующее значение x_1 . Графически его можно было бы измерить, например, линейкой и перенести на ось абсцисс как новое начальное значение для следующей итерации. Однако с помощью биссектрисы B , отвечающей условию $x_{n+1} = x_n$, это можно сделать гораздо проще.

Проведя вертикальную линию от значения x_0 , получим точку на графике $P_0(x_0, x_1)$. Отложим от нее горизонтальную линию до пересечения с биссектрисой. Абсцисса точки пересечения

есть x_1 . Вновь проводя вертикальную линию до пересечения с графиком функции последования, получим точку $P_1(x_1, x_2)$. Повторяя процедуру нужное число раз, можно без каких-либо вычислений отслеживать изменение переменной x во времени (с шагом 1).

По отношению к точке x_n , точку x_{n+1} называют ее **образом**, а точку x_{n-1} – **прообразом**.