## *МАТЕМАТИКА*

# "ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"

**I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ.**

**II. ВЕРОЯТНОСТЬ.**

**II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ.**

**IV. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.**

I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ.

II. ВЕРОЯТНОСТЬ.

III. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ.

IV. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

# СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

***СОБЫТИЕ (ЯВЛЕНИЕ)***

осуществление определенной совокупности условий – испытание

наступление события

| ДОСТОВЕРНОЕ | НЕВОЗМОЖНОЕ | **СЛУЧАЙНОЕ** |
| --- | --- | --- |
| – событие, которое обязательно происходит при осуществлении совокупности условий (или ***<u>испытании</u>***). | – событие, которое заведомо не произойдет при осуществлении данной совокупности условий. | – событие, которое при многократном осуществлении испытаний может либо произойти, либо не произойти. |
| ***И*** → ***С*** | ***И*** $\xrightarrow{\times}$ ***С*** | ***И*** $\xrightarrow{?}$ ***С*** |

I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ.

II. ВЕРОЯТНОСТЬ.

II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ.

IV. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.




# ВЕРОЯТНОСТЬ

**ВЕРОЯТНОСТЬ** – количественная характеристика степени возможности наступления события.

- ***статистическое*** определение вероятности

***n*** – число испытаний

***m*** – число появлений события ***A*** (число благоприятствующих испытаний)

$$\frac{m}{n} = P^*(A)$$

относительная частота события ***A***

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} = P(A)$$

- ***классическое*** определение вероятности

***n*** – число равновозможных несовместных событий

***m*** – число благоприятствующих исходов событию ***A***

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

***Вероятность равна отношению числа благоприятствующих исходов (m) к общему числу исходов (n)***

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} \quad \text{или} \quad P(A)=\frac{m}{n}$$

– число благоприятствующих испытаний — число благоприятствующих исходов

$$0 \le m \le n \Rightarrow 0 \le P(A) \le 1$$

***СОБЫТИЕ***

ДОСТОВЕРНОЕ – событие, которое обязательно происходит при осуществлении совокупности условий (или испытании).

НЕВОЗМОЖНОЕ – событие, которое заведомо не произойдет при осуществлении данной совокупности условий.

СЛУЧАЙНОЕ – событие, которое при многократном осуществлении испытаний может либо произойти, либо не произойти.

$\boldsymbol{И \to С}$ $\boldsymbol{И \not\to С}$ $\boldsymbol{И \xrightarrow{?} С}$

$\boldsymbol{m = n}$ $\boldsymbol{m = 0}$ $\boldsymbol{0 < m < n}$

$\boldsymbol{P = 1}$ $\boldsymbol{P = 0}$ $\boldsymbol{0 < P < 1}$

# ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятность появления одного из нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$$

**НЕСОВМЕСТНЫЕ СОБЫТИЯ** (А) – события, которые ни при каких условиях не могут произойти вместе (на верхней грани игральной кости получить цифру 1 и 2)

**ПРОТОВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ** ( $\overline{A}$) – события, появление одного из которых исключает появление другого (появление четной и нечетной цифры на верхней грани игральной кости)

Систему событий называют **полной**, если при любом испытании наступит одно из событий этой системы (выпадение цифр от 1 до 6 на верхней грани игральной кости)

**УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ:** сумма вероятностей событий, образующих полную систему равна 1.

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k) = 1$$

# *ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ*

Вероятность совместного появления независимых событий равна произведению их вероятностей.

$$P(A\ и\ B) = P(A) \cdot P(B)$$

События называют **НЕЗАВИСИМЫМИ**, если наступление одного не зависит от наступления другого.

Вероятность такого события меньше вероятности каждого отдельного события

I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ.

II. ВЕРОЯТНОСТЬ.

II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ.

IV. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

# СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

**СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА (СВ)** – величина, значение которой зависит от стечения случайных обстоятельств.

- число родившихся мальчиков среди ста новорожденных;
- расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия;
- размер эритроцита;
- число заболевших гриппом;
- частота пульса пациента;
- температура тела.

**X**, **Y**, **Z** – обозначение случайной величины, *x, y, z* – значения случайной величины.

**СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА**

**ДИСКРЕТНАЯ (ДСВ)**

СВ, которая принимает отдельные, изолированные значения (или счетное множество значений).

**НЕПРЕРЫВНАЯ (НСВ)**

СВ, которая может принимать все значения из некоторого промежутка.

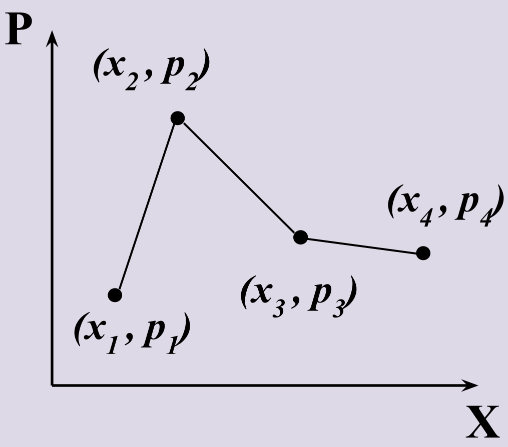
**ДИСКРЕТНАЯ** СВ принимает отдельные, изолированные значения (или счетное множество значений).

Распределение ДСВ представляет собой совокупность ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

| X | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_k$ |

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$$

**УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ**




**МНОГОУГОЛЬНИК РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

Величины, которые описывают случайную величину, называют **ЧИСЛОВЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ** случайной величины.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ** случайной величины равно сумме произведений всех ее возможных значений и их вероятностей.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

| X | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $m$ | $m_1$ | $m_2$ | … | $m_k$ |

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$$

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n} =$$

$$= x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + \ldots + x_k p_k^*$$

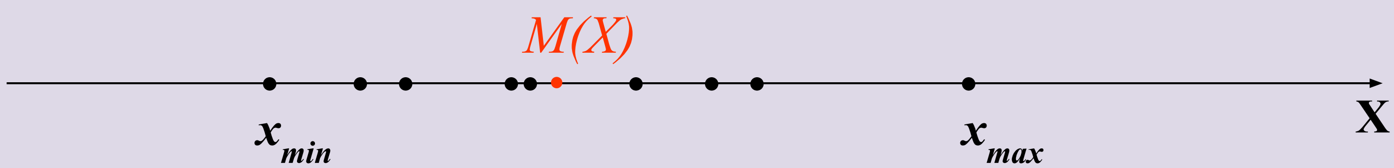
Если $n \to \infty$, то $p^* \approx p$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n} = P(A)$

$$\overline{X} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k = M(X)$$

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

$$M(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

Математическое ожидание примерно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.




$$x_{min} < M(X) < x_{max}$$

Математическое ожидание характеризует расположение распределения.

**ДИСПЕРСИЯ** случайной величины характеризует разброс случайных величин в данном распределении.

По определению, дисперсия равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

$$D(X) = \left[x_1 - M(X)\right]^2 \times p_1 + \left[x_2 - M(X)\right]^2 \times p_2 + \cdots + \left[x_k - M(X)\right]^2 \times p_k = \sum_{i=1}^{k} [x_i - M(X)]^2 p_i$$

Истинной мерой разброса случайной величины в данном распределении является **СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ**

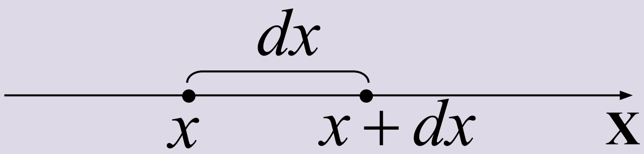
$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

**НЕПРЕРЫВНАЯ** СВ может принимать все значения из некоторого промежутка.

Распределение НСВ задают функцией распределения вероятностей и функцией распределения непрерывной случайной величины.

$f(x).$

## Функция плотности вероятности (плотность вероятности)




$dx$ – ширина интервала (промежуток)

$dp$ – вероятность того, что НСВ принимает значения из этого интервала

$$dp = f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{dp}{dx}$$

Плотность вероятности показывает, как изменяется вероятность, отнесенная к интервалу НСВ в зависимости от значения самой величины.

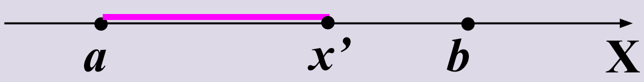
Вероятность того, что СВ принимает какое-либо значение в интервале (***a; b***):

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

**УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ:** $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

<u>Функция распределения НСВ</u> $F(x)$ – функция, определяющая вероятность того, что СВ $X$ примет значения, меньшие $x'$

$$F(x) = P(X < x') = \int_{-\infty}^{x'} f(x)dx$$




$$0 < F(x) < 1$$

**ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ** непрерывной случайной величины.

- ✔ **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ** $$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$
- ✔ **ДИСПЕРСИЯ** $$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$
- ✔ **СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ**

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx \qquad D(X) = \int_{a}^{b} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

| | ДСВ | НСВ |
|---|---|---|
| ОПРЕДЕЛЕНИЕ | СВ, которая принимает отдельные, изолированные значения (или счетное множество значений). | СВ, которая может принимать все значения из некоторого промежутка. |
| РАСПРЕДЕЛЕНИЕ | Совокупность возможных значений и соответствующих им вероятностей. | Плотность вероятности и функция распределения непрерывной случайной величины. |
| УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ | $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ | $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ |
| МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ | $M(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$ | $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ |
| ДИСПЕРСИЯ | $D(X) = \sum_{i=1}^{k} [x_i - M(X)]^2 p_i$ | $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$ |
| СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ | $\sigma = \sqrt{D(X)}$ | |

I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ.

II. ВЕРОЯТНОСТЬ.

II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ.

IV. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

# ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

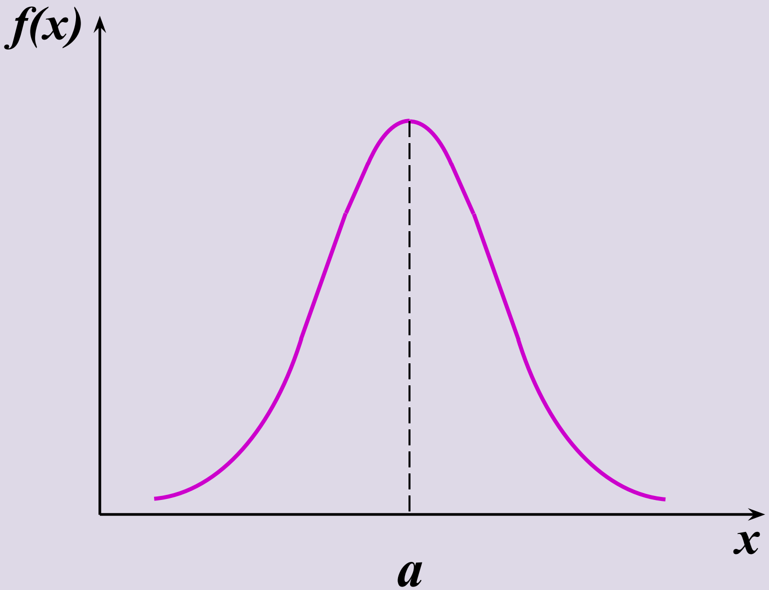
**ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ** – связь между плотностью вероятности и значением случайной величины.

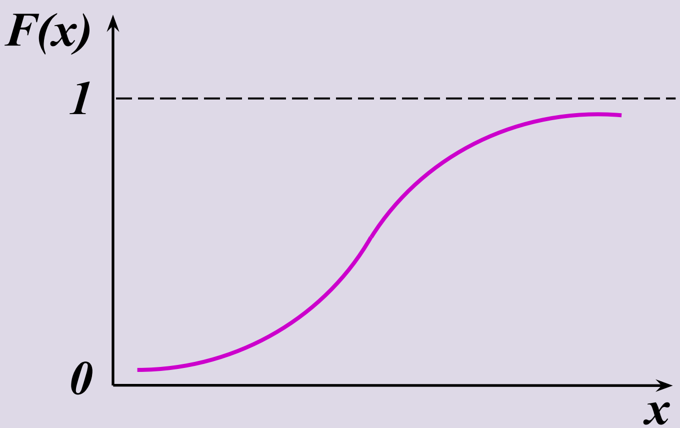
1. Нормальное распределение (распределение Гаусса)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Основные параметры нормального распределения: $a = M(X)$

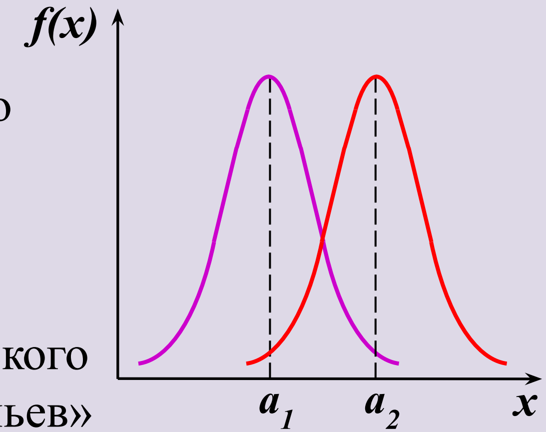
$$\sigma(X)$$



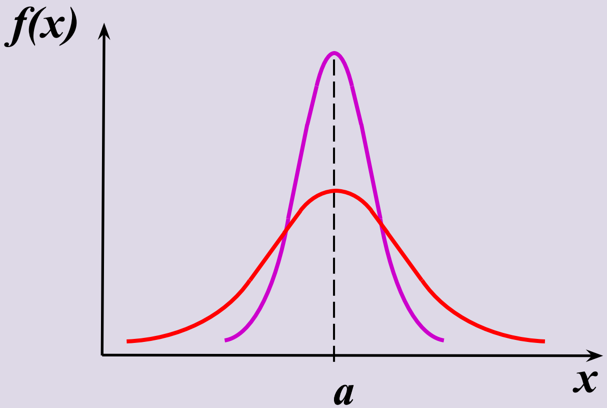



# ОСОБЕННОСТИ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Распределение является симметричным относительно перпендикуляра, проходящего через точку на оси абсцисс, соответствующую математическому ожиданию. Это означает, что случайные величины, равноотстоящие от математического ожидания имеют одинаковую вероятность появления в распределении.




2. При изменении математического ожидания график нормального распределения смещается относительно оси абсцисс




3. Изменение среднего квадратического отклонения влияет на форму «крыльев» распределения. Чем шире размах «крыльев» (больше разброс значений), тем шире размах «крыльев».

4. Площадь под кривой нормального распределения нормирована на 1, т.е. достоверно найти случайную величину в диапазоне значений $[-\infty + \infty]$

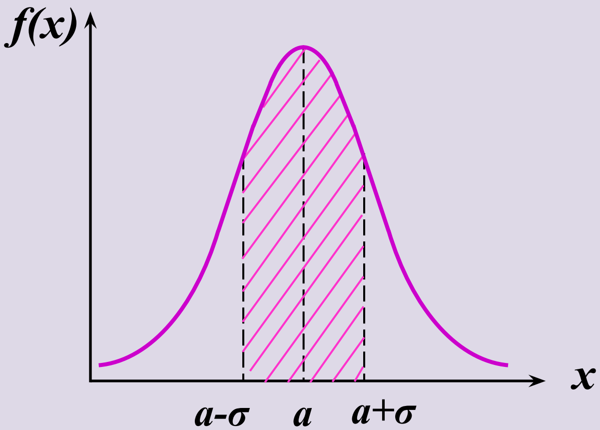
$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

## ПРАВИЛО «ТРЕХ СИГМ»:

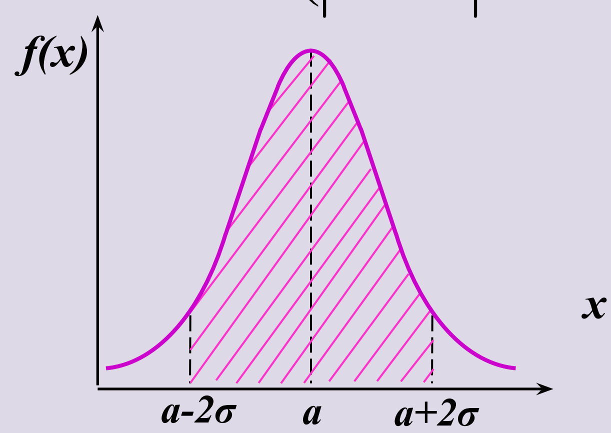
если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

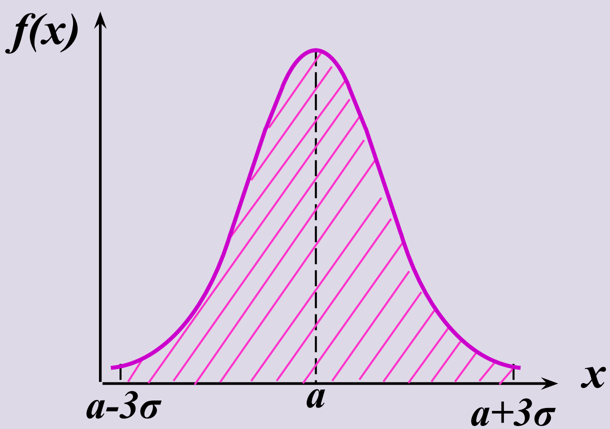
$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$P(|x-a| < \sigma) \approx 0{,}683$$




$$P(|x-a| < 2\sigma) \approx 0{,}954$$



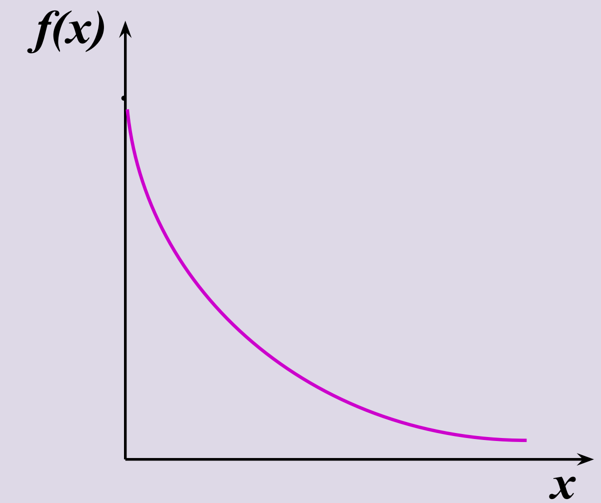

$$P(|x-a| < 3\sigma) \approx 0{,}997$$

# ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

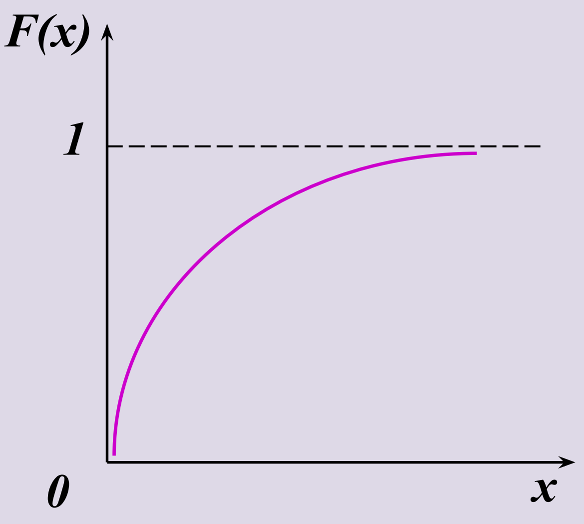
$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

$$M(X) = \frac{1}{\alpha} \qquad \sigma = \frac{1}{\alpha}$$

$$D(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$




$$f(E_p) = \frac{1}{kT} e^{-\frac{E_p}{kT}}$$




$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

# Тема 2. "МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА"

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА** – наука о математических методах систематизации и использования статистических данных для решения научных и практических задач.

**ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ:**

- ✔анализ статистических данных;
- ✔определение вида распределения, которому соответствуют данные;
- ✔составление прогнозов и проверка гипотез.

## I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

**ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ** – большая статистическая совокупность однородных элементов (объектов), обладающих общими признаками.

- не всегда доступны для исследования все объекты;
- подвижные совокупности;
- возможно потребуется уничтожение всех объектов при исследовании;
- большие временные и материальные затраты.

**ВЫБОРОЧНАЯ СОВОКУПНОСТЬ (ВЫБОРКА)** – часть генеральной совокупности, объекты отобранные для исследования.

Требования к выборке:

- ✔ представительная (репрезентативная);
- ✔ случайная;
- ✔ достаточный объем.

**ВЫБОРКА** → большая, $n > 30$

**ВЫБОРКА** → малая, $n \leq 30$

**ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ** → **ВЫБОРОЧНАЯ СОВОКУПНОСТЬ**

$x_1, x_2, \ldots$ и $x_k$ – **ВАРИАНТЫ**;

$n_1, n_2, \ldots$ и $n_k$ – **ЧАСТОТЫ**.

Сумма всех частот равна объему выборки: $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

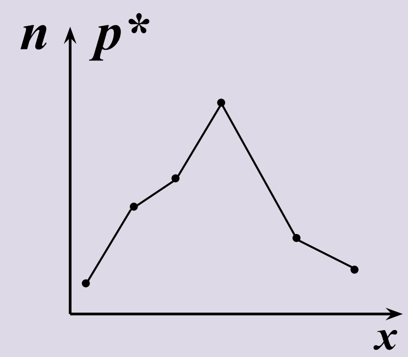
**ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА** – отношение частоты к объему выборки. $p^* = \dfrac{n_i}{n}$

**РАНЖИРОВАННЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ РЯД** – совокупность всех значений в выборке, расположенных в определенном порядке.

**ДИСКРЕТНОЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** или **ВАРИАЦИОННЫЙ РЯД** – совокупность всех вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | … | $x_k$ |
| $n_1$ | $n_2$ | … | $n_k$ |
| $p^*_1$ | $p^*_2$ | … | $p^*_k$ |

**ПОЛИГОН ЧАСТОТ**



# ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

**МОДА** (***Mo***) – варианта, которой соответствует набольшая частота.

**МЕДИАНА** (***Me***) – варианта, которая расположена в середине статистического распределения.

$$Me = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{если } n \text{ – нечетное число;} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & \text{если } n \text{ – четное число.} \end{cases}$$

**ВЫБОРОЧНАЯ СРЕДНЯЯ** ( $\overline{x}_в$) – среднее арифметическое значение вариант статистического распределения.

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i^*$$

## ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

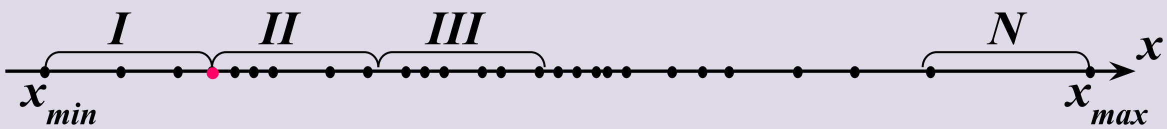
**ВЫБОРОЧНАЯ ДИСПЕРСИЯ** ($D_в$) – среднее арифметическое квадратов отклонения варинт от их среднего значения.

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 p_i^*$$

**ВЫБОРОЧНОЕ СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ** ($\sigma_в$) – корень квадратный из выборочной дисперсии.

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 p_i^*}$$

**НЕПРЕРЫВНОЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** или **ИНТЕРВАЛЬНЫЙ РЯД** – совокупность интервалов, в которых заключены варианты и соответствующих им частот или относительных частот.




$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

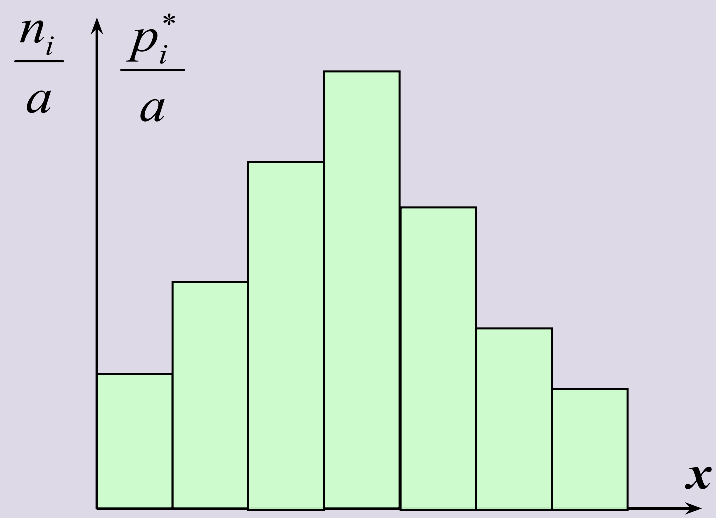
$$N \approx 1 + 3{,}3\lg n$$

$$\Delta x = a = \frac{R}{N}$$

| $[x_{I_{\min}}; x_{I_{\max}})$ | $[x_{II_{\min}}; x_{II_{\max}})$ | $[x_{III_{\min}}; x_{III_{\max}})$ | $\cdots$ | $[x_{N_{\min}}; x_{N_{\max}}]$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_I$ | $n_{II}$ | $n_{III}$ | $\cdots$ | $n_N$ |
| $p_I^*$ | $p_{II}^*$ | $p_{III}^*$ | $\cdots$ | $p_N^*$ |

**ГИСТОГРАММА**

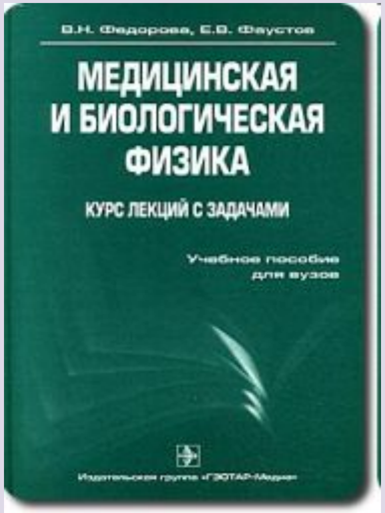
– совокупность смежных прямоугольников, построенных на одной прямой, основания которых одинаковы и равны ширине интервала, а высоты равны отношение частоты или относительной частоты к ширине интервала.




МЕДИЦИНСКАЯ
И БИОЛОГИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
ДРОФА


ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ
М.Е. Блохина
И.А. Эссаулова
Г.В. Мансурова
РУКОВОДСТВО
К ЛАБОРАТОРНЫМ
РАБОТАМ
ПО МЕДИЦИНСКОЙ
И БИОЛОГИЧЕСКОЙ
ФИЗИКЕ
ДРОФА


ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ
А.Н. Ремизов
А.Г. Максина
СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО МЕДИЦИНСКОЙ
И БИОЛОГИЧЕСКОЙ
ФИЗИКЕ
ДРОФА


В.Н. Федорова, Е.В. Фаустов
МЕДИЦИНСКАЯ
И БИОЛОГИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
КУРС ЛЕКЦИЙ С ЗАДАЧАМИ
Учебное пособие
для вузов
Издательская группа «ГЭОТАР-Медиа»


В.Н. ФЕДОРОВА, Л.А. СТЕПАНОВА
КРАТКИЙ КУРС
МЕДИЦИНСКОЙ И БИОЛОГИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ
С ЭЛЕМЕНТАМИ РЕАБИЛИТОЛОГИИ
ЛЕКЦИИ И СЕМИНАРЫ