Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

Случайные события и их вероятности

НЕЗАВИСИМЫЕ ПОВТОРЕНИЯ ИСПЫТАНИЙ. ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ.

Содержание

Часть 3.

3.НЕЗАВИСИМЫЕ ПОВТОРЕНИЯ ИСПЫТАНИЙ. ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ.

ПРИМЕР 5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле

Несколько изменим предыдущий пример: вместо двух разных стрелков по мишени будет стрелять один и тот же стрелок.

- Пример 5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Было произведено 3 независимых друг от друга выстрелов. *Найти вероятность того, что мишень:*

а) будет поражена трижды;

б) не будет поражена;

в) будет поражена хотя бы раз;

г) будет поражена ровно один раз.

Решение примера 5а)

Пример 5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Было произведено 3 независимых друг от друга выстрелов. *Найти вероятность того, что мишень: а) будет поражена трижды;*

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что мишень поражена при первом выстреле. Тогда событие $\bar{A}$ означает промах. По условию $P(A) = 0{,}8$, значит, $P(\bar{A}) = 0{,}2$. Пусть, далее, $B(C)$ — событие, состоящее в том, что мишень поражена при втором (при третьем) выстреле. События A, B, C попарно независимы так же, как независимы события, скажем, AB и C, или $A \cdot \bar{B}$ и $\bar{C}$ и т. п.

а) Мишень будет поражена трижды, если одновременно произошли события A, B, и C, т. е. произошло событие ABC. Поэтому

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}8^3 = 0{,}512.$$

Решение примера 5б)

<u>Пример 5</u>. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Было произведено 3 независимых друг от друга выстрелов. Найти вероятность того, что мишень:

б) не будет поражена;

Решение:

б) Мишень вообще не будет поражена, если одновременно произошли события $\bar{A}$, $\bar{B}$, и $\bar{C}$, т. е. произошло событие $\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$. Поэтому

$$P(\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0{,}2^3 = 0{,}008.$$

Решение примера 5в)

Пример 5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Было произведено 3 независимых друг от друга выстрелов. Найти вероятность того, что мишень:

в) будет поражена хотя бы раз;

Решение:

в) Мишень будет поражена, если произошло или A, или B, или C, т. е. произошло событие $A + B + C$. Однако для вероятности суммы *трех* событий, не являющихся несовместными, у нас не было никакой формулы. Тут удобнее действовать «через отрицание». Событие $\overline{A + B + C}$ заключается в том, что мишень не будет поражена. Это значит, что одновременно происходят события $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, т. е. $\overline{A + B + C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$. Имеем:

$$P(A + B + C) = 1 - P(\overline{A + B + C}) =$$

$$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 1 - 0{,}2^3 = 0{,}992.$$

Решение примера 5г)

Пример 5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Было произведено 3 независимых друг от друга выстрелов. Найти вероятность того, что мишень:

г) будет поражена ровно один раз.

Решение:

г) Событие, состоящее в том, что мишень будет поражена ровно один раз, есть сумма трех событий: $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ (попал только первый выстрел), $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$ (попал только второй выстрел) и $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$ (попал только третий выстрел). Так как эти три события попарно несовместны, то получаем:

$$P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}) +$$
$$+ P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 =$$
$$= 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}096.$$

Заметим

Решение, приведенное в пункте г) примера 5, в конкретном случае повторяет доказательство знаменитой теоремы Бернулли, которая относится к одной из наиболее распространенных **вероятностных моделей**: *независимым повторениям одного и того же испытания с двумя возможными исходами.*

Отличительная особенность многих вероятностных задач состоит в том, что испытание, в результате которого может наступить интересующее нас событие, можно многократно повторять.

Во всей серии повторений важно знать

В каждом из таких повторений нас интересует вопрос о том, произойдет или не произойдет это событие.

А во всей серии повторений нам важно знать, *сколько именно раз может произойти или не произойти это событие*.

Например, игральный кубик бросили десять раз подряд. Какова вероятность того, что «четверка» выпадет ровно 3 раза? Произведено 10 выстрелов; какова вероятность того, что будет ровно 8 попаданий в мишень? Или же какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты «орел» выпадет ровно 4 раза?

Якоб Бернулли объединил примеры и вопросы

- Швейцарский математик начала XVIII века Якоб Бернулли объединил примеры и вопросы такого типа в единую вероятностную схему.
- Пусть вероятность случайного события А при проведении некоторого испытания равна Р(А). Будем рассматривать это испытание как испытание *только с двумя возможными исходами:* один исход состоит в том, что событие А произойдет, а другой исход состоит в том, что событие А не произойдет, т. е. произойдет событие $\bar{A}$. Для краткости назовем первый исход (наступление события А) «успехом», а второй исход (наступление события $\bar{A}$) «неудачей». Вероятность Р(А) «успеха» обозначим р, а вероятность $P(\bar{A})$ «неудачи» обозначим q. Значит, $q = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$.

ТЕОРЕМА 3 (теорема Бернулли)

Теорема 3 (теорема Бернулли). **Пусть $P_n(k)$ — вероятность наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания.**

Тогда $P_n(k)= C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где p — вероятность «успеха», а $q=1-p$ — вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

Эта теорема (мы приводим ее без доказательства) имеет огромное значение и для теории, и для практики.

ПРИМЕР 6.

- Пример 6. В каждом из пунктов а) — г) определить значения ***n***, ***k***, ***p***, ***q*** и выписать (без вычислений) выражение для искомой вероятности $P_n(k)$.

а) Чему равна вероятность появления ровно 7 «орлов» при 10 бросаниях монеты?

б) Каждый из 20 человек независимо называет один из дней недели. «Неудачными» днями считаются понедельник и пятница. Какова вероятность того, что «удач» будет ровно половина?

в) Бросание кубика «удачно», если выпадает 5 или 6 очков. Какова вероятность того, что ровно 5 бросаний из 25 будут «удачными»?

г) Испытание состоит в одновременном бросании трех различных монет. «Неудача»: «решек» больше, чем «орлов». Какова вероятность того, что будет ровно три «удачи» среди 7 бросаний?

Решение 6а)

- Пример 6. В каждом из пунктов а) — г) определить значения ***n, k, p, q*** и выписать (без вычислений) выражение для искомой вероятности ***$P_n(k)$***.

а) Чему равна вероятность появления ровно 7 «орлов» при 10 бросаниях монеты?

Решение:

а) $n = 10$, $k = 7$, $p = q = 0{,}5$,

$$P_{10}(7) = C_{10}^{7} \cdot 0{,}5^{7} \cdot 0{,}5^{3} = C_{10}^{7} \cdot 0{,}5^{10}.$$

Решение 6б)

- <u>Пример 6</u>. В каждом из пунктов а) — г) определить значения ***n, k, p, q*** и выписать (без вычислений) выражение для искомой вероятности ***$P_n(k)$***.

б) Каждый из 20 человек независимо называет один из дней недели. «Неудачными» днями считаются понедельник и пятница. Какова вероятность того, что «удач» будет ровно половина?

Решение:

б) $n = 20$, $k = 10$. Вероятность «удачи» равна доле «удачных» дней среди всех дней недели, т. е. $p = \frac{5}{7}$, $q = \frac{2}{7}$. Значит,

$$P_{20}(10) = C_{20}^{10} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{10} \left(\frac{2}{7}\right)^{10} = C_{20}^{10} \cdot \frac{10^{10}}{7^{20}}.$$

Решение 6в)

- <u>Пример 6</u>. В каждом из пунктов а) — г) определить значения ***n*, *k*, *p*, *q*** и выписать (без вычислений) выражение для искомой вероятности $P_n(k)$.

в) Бросание кубика «удачно», если выпадает 5 или 6 очков. Какова вероятность того, что ровно 5 бросаний из 25 будут «удачными»?

Решение:

в) $n = 25$, $k = 5$. **«Удачные» результаты 5 и 6 составляют треть количества всех возможных результатов: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Значит,** $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$, **и потому**

$$P_{25}(5) = C_{25}^{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{20} = C_{25}^{5} \cdot \frac{2^{20}}{3^{25}}.$$

Решение 6г)

- <u>Пример 6</u>. В каждом из пунктов а) — г) определить значения ***n, k, p, q*** и выписать (без вычислений) выражение для искомой вероятности ***$P_n(k)$***.

г) Испытание состоит в одновременном бросании трех различных монет. «Неудача»: «решек» больше, чем «орлов». Какова вероятность того, что будет ровно три «удачи» среди 7 бросаний?

Решение: г) n = 7, k = 3. «Удача» при одном бросании состоит в том, что «решек» выпало меньше, чем «орлов». Всего возможны 8 результатов: РРР, РРО, РОР, ОРР, РОО, ОРО, ООР, ООО (Р — «решка», О — «орел»). Ровно в половине из них «решек» меньше «орлов»: РОО, ОРО, ООР, ООО. Значит,

$p = q = 0{,}5;\ P_7(3) = C_7^3 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^4 = C_7^3 \cdot 0{,}5^7.$

Теорема Бернулли позволяет…

Теорема Бернулли позволяет установить связь между статистическим подходом к определению вероятности и классическим определением вероятности случайного события. Чтобы описать эту связь, вернемся к терминам § 50 о статистической обработке информации. Рассмотрим последовательность из n независимых повторений одного и того же испытания с двумя исходами — «удачей» и «неудачей». Результаты этих испытаний составляют ряд данных, состоящий из некоторой последовательности двух вариант: «удачи» и «неудачи». Проще говоря, имеется последовательность длины n, составленная из двух букв У («удача») и Н («неудача»). Например, У, У, Н, Н, У, Н, Н, Н, ..., У или Н, У, У, Н, У, У, Н, Н, У, ..., Н и т. п. Подсчитаем кратность и частоту варианты У, т. е. найдем дробь **k/n**, где **k** - количество «удач», встретившихся среди всех **n** повторений. Оказывается, что при неограниченном возрастании n частота k/n появления «успехов» будет практически неотличимой от вероятности p «успеха» в одном испытании. Этот довольно сложный математический факт выводится именно из теоремы Бернулли.

ТЕОРЕМА 4. При большом числе независимых повторений

ТЕОРЕМА 4. При большом числе независимых повторений одного и того же испытания частота появления случайного события А со все большей точностью приближенно равна вероятности события А: **k/n≈ P(A).**

Например, при n > 2000 с вероятностью, большей чем 99%, можно утверждать, что абсолютная погрешность **|k/n— P(A)|** приближенного

равенства **k/n≈ P(A)** будет меньше 0,03. Поэтому при социологических

опросах достаточно бывает опросить около 2000 случайно выбранных людей (респондентов). Если, допустим, 520 из них положительно ответили на заданный вопрос, то **k/n=520/2000=0,26** и практически достоверно, что для любого большего числа опрошенных такая частота будет находиться в пределах от 0,23 до 0,29. Это явление называют явлением *статистической устойчивости*.

Итак, *теорема Бернулли и следствия из нее позволяют*

Для учителя

Заключительный в этой главе §54 «Случайные события и их вероятности» наиболее объемен и не столь однороден по содержанию, как другие параграфы. Он состоит из четырех пунктов.

1. Использование комбинаторики для подсчета вероятностей.

2. Произведение событий. Вероятность суммы двух событий. Независимость событий.

3. Независимые повторения испытаний. Теорема Бернулли и статистическая устойчивость.

4. Геометрическая вероятность.

Пункт 4 §54 о статистической устойчивости, несомненно, является центральным в основах современной теории вероятностей. Однако сделать его столь же центральным в школьном курсе «Алгебра и начала математического анализа» и доказательно изложенным в непрофильной старшей школе, на наш взгляд, не представляется возможным. Для детальной проработки этой темы следовало бы ввести отдельный учебный предмет. Мы ограничиваемся схематичной прорисовкой основных моментов. Сначала (пример 5) мы продолжаем пример 4 из предыдущего пункта, заменив двух стрелков на одного, делающего три выстрела. Затем формулируем теорему Бернулли о вычислении вероятности наступления k успехов при n независимых повторениях одного и того же испытания с двумя исходами. В примере 6 демонстрируем, как теорема Бернулли «работает» в конкретных ситуациях. Наконец, сообщаем простейшую форму закона больших чисел (теорема 4): при большом числе независимых повторений одного и того же испытания частота появления случайного события A со все большей точностью приближенно равна вероятности события A: $\frac{k}{n} \approx P(A)$. Этот факт устанавливает связь между статистическим подходом к определению вероятности как частоте появления события в серии независимых повторений одного и того же испытания и классическим определением вероятности случайного события. Подчеркнем, что статистический подход связан с проведением и повторением испытания в реальности, а классическое определение относится к модели этой реальности. Грубо говоря, явление статистической устойчивости показывает, что модель эта является «правильной», т. е. со все большей точностью соответствующей реальным явлениям и событиям.