КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

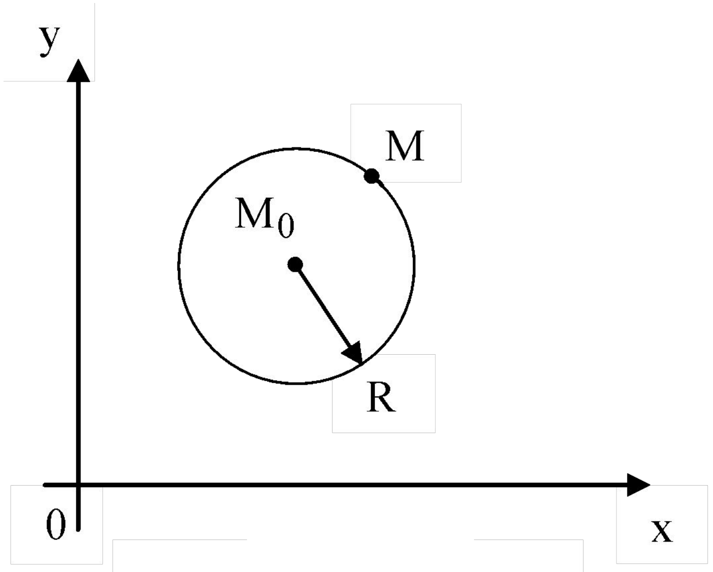
Линия, определяемая уравнением

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + Q = 0,}$$

называется $\boxed{\text{кривой второго порядка}}$.

Пусть на координатной плоскости XOY дана окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ и требуется определить ее уравнение.

Выберем на этой плоскости произвольную точку $M(x; y)$.



Тогда: 1) если точка M лежит на окружности, то

$$\left|\overline{M_0M}\right| = R \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2}$$

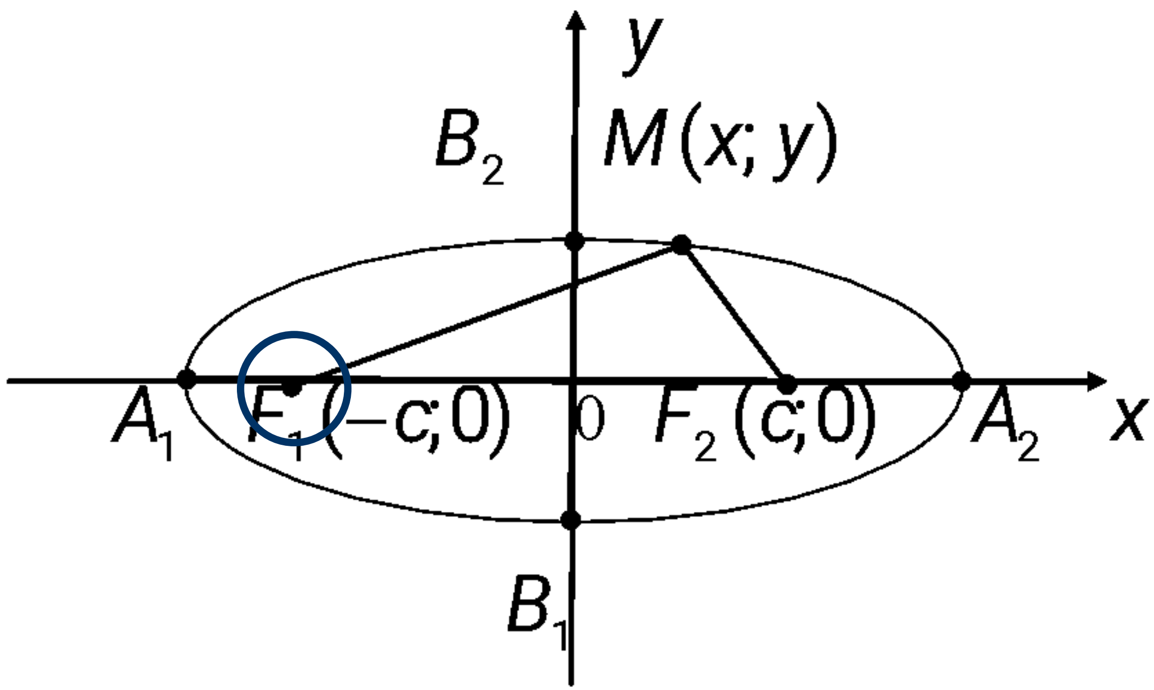
2) если точка M не лежит на окружности, то для внутренних точек круга $\left|\overline{M_0M}\right| < R$, а для внешних точек круга $\left|\overline{M_0M}\right| > R$. Следовательно, для всех точек, не лежащих на окружности,

$$\left|\overline{M_0M}\right| \neq R \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \neq R^2.$$

ЭЛЛИПС

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u> ***<u>Эллипсом</u>*** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Выберем на плоскости две произвольные точки F_1 и F_2 и введем систему координат XOY, как это показано на рисунке. Обозначим через $2c$ расстояние между этими точками, тогда выбранные фокусы F_1 и F_2 будут иметь координаты $F_1(-c;0)$, а $F_2(c;0)$.



Пусть точка $M(x;y)$ произвольная точка плоскости XOY. Предположим, что точка M принадлежит эллипсу. Тогда, если $2a$, где $2a > 2c$, есть сумма расстояний от точки M до точек F_1 и F_2, то по определению эллипса

$$\left|\overline{MF_1}\right| + \left|\overline{MF_2}\right| = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

Избавляясь от иррациональности, уравнение можно привести к виду:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

По условию $2a > 2c > 0$. Тогда $a > c$ и $a^2 > c^2$. Пусть $a^2 - c^2 = b^2$. Подставляя в предыдущее уравнение получим:

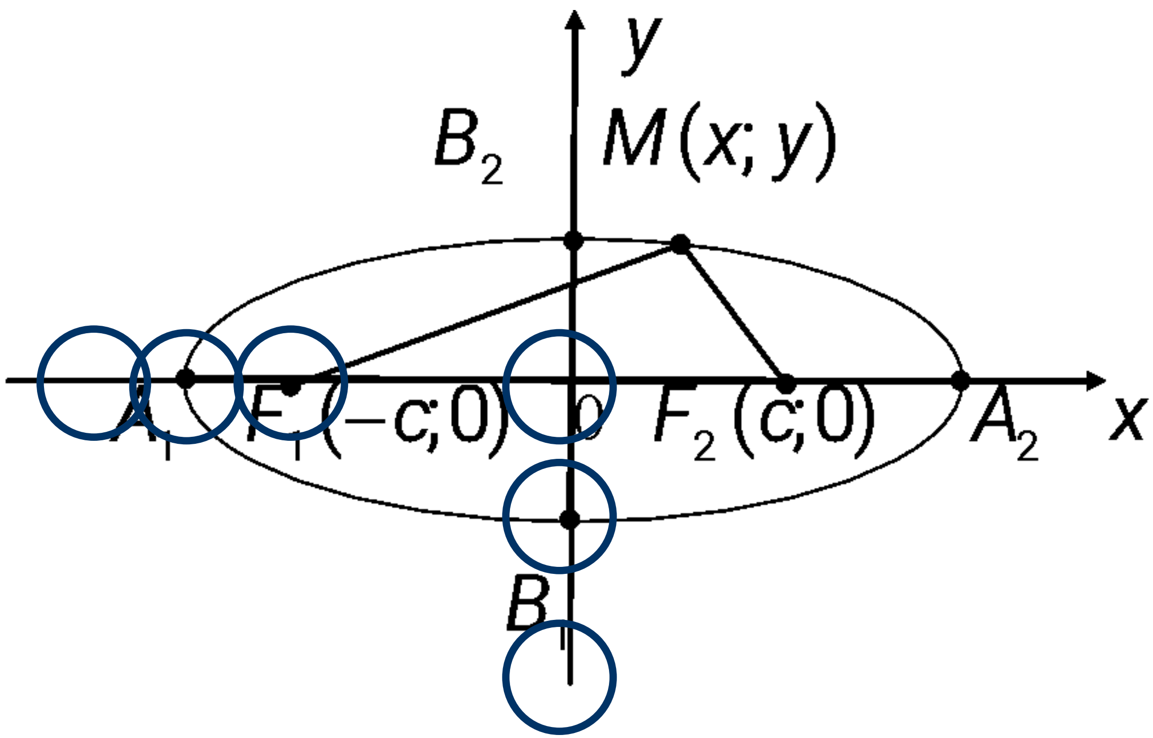
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,}$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

Уравнение эллипса называется его **каноническим уравнением.**

Терминология.

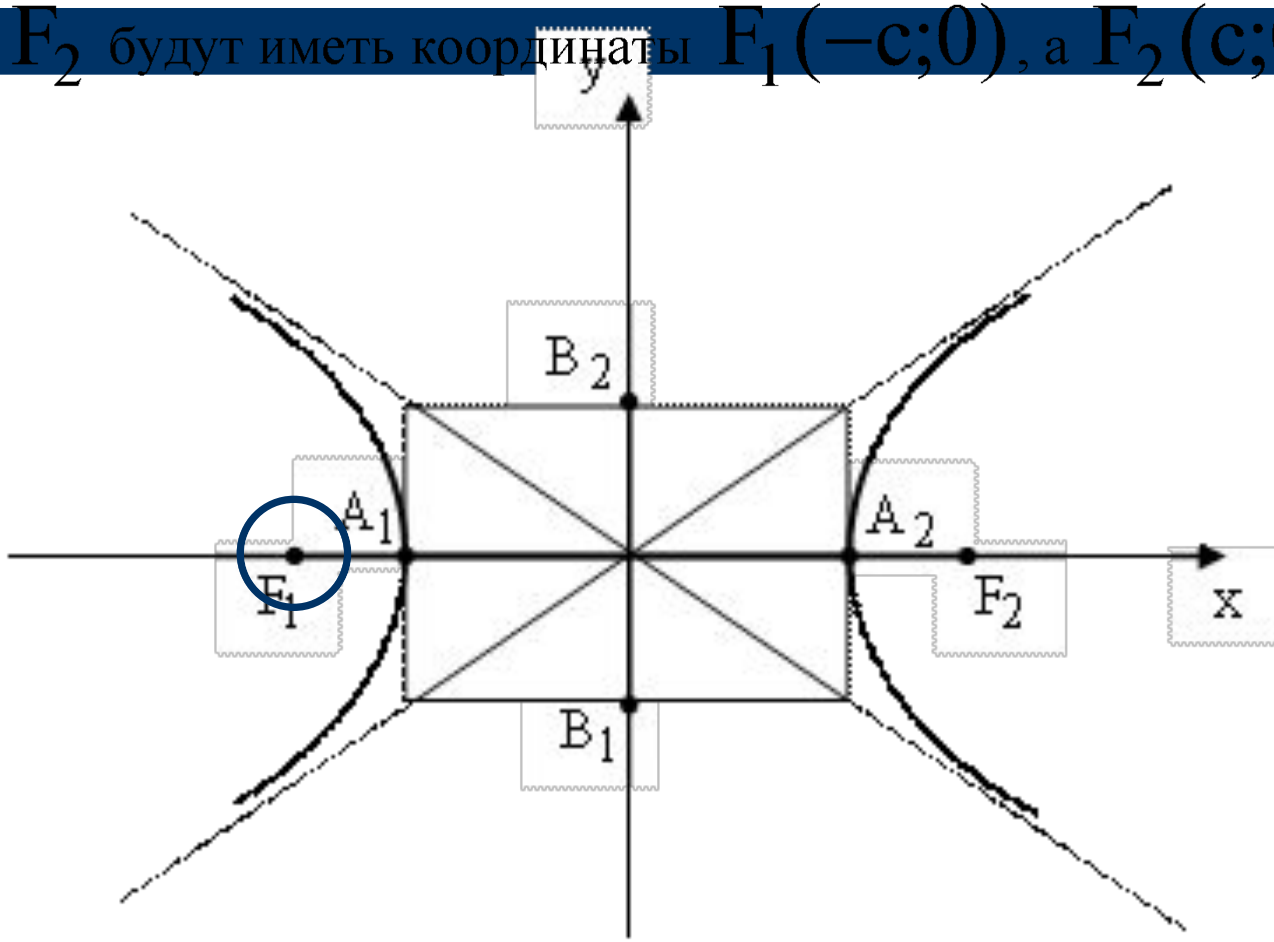
Точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ называются фокусами эллипса. Точки $A_1(-a;0), B_1(0;-b), A_2(a;0), B_2(0;b)$ называются вершинами эллипса. Точка $O(0;0)$ называется центром эллипса. Ось, на которой расположены фокусы эллипса, называется фокальной осью. Оси OX и OY называются осями симметрии эллипса.



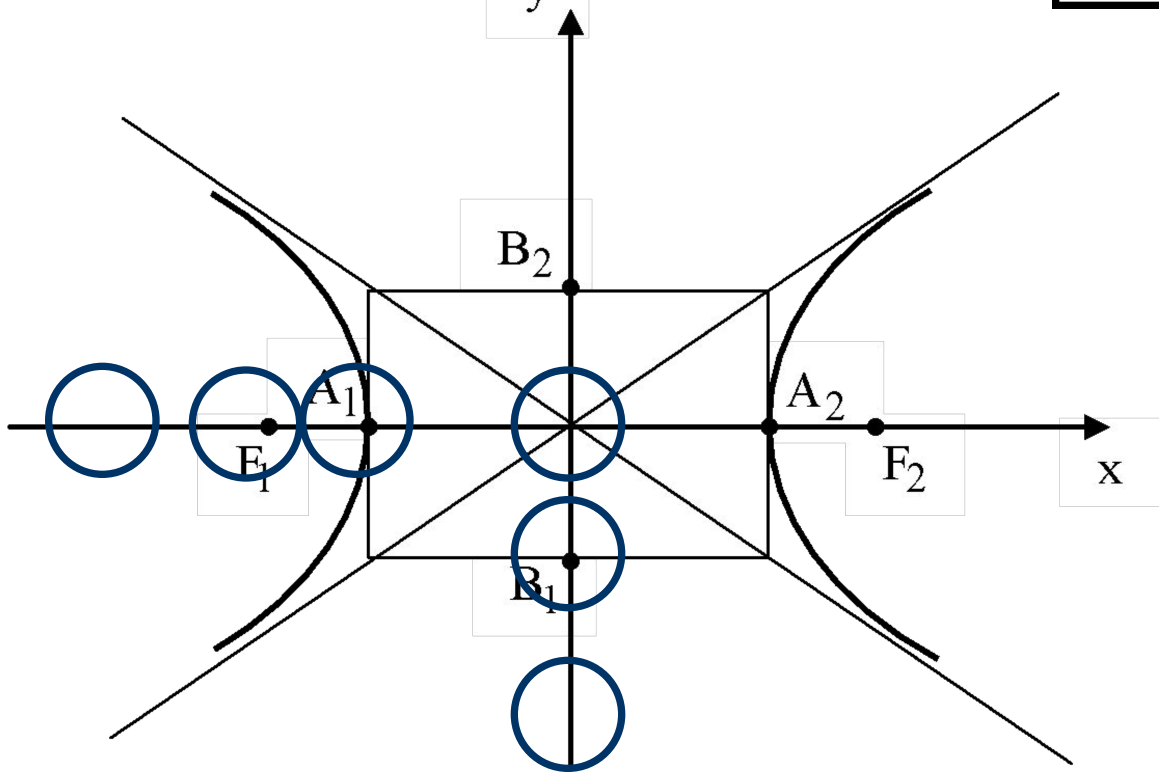
ГИПЕРБОЛА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ***Гиперболой*** называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Выберем на плоскости две произвольные точки F_1 и F_2 и введем систему координат XOY, как это показано на рисунке. Обозначим через $2c$ расстояние между этими точками, тогда выбранные фокусы F_1 и F_2 будут иметь координаты $F_1(-c;0)$, а $F_2(c;0)$.



Терминология. Точки $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ называются ***фокусами гиперболы***. Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ называются ***действительными вершинами гиперболы***, а точки $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ - ***мнимыми вершинами***. Точка $O(0;0)$ ***называется центром гиперболы***. Ось, на которой расположены фокусы, называется ***фокальной осью*** или ***действительной осью***. Ось, на которой расположены мнимые вершины гиперболы, называется ***мнимой осью***.



Пусть точка $M(x;y)$ произвольная точка плоскости XOY. Предположим, что точка $M(x;y)$ принадлежит гиперболе. Тогда, если $2a$, где $2a < 2c$, есть абсолютная величина разности расстояний от точки M до точек F_1 и F_2, то по определению гиперболы

$$\left|\overline{MF_1}\right| - \left|\overline{MF_2}\right| = \pm 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Избавляясь от иррациональности, уравнение можно привести к виду

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

По условию $2a < 2c$. Тогда $c > a$ и $c^2 > a^2$. Обозначим через b^2 разность $c^2 - a^2$. Подставляя это число в уравнение, получим

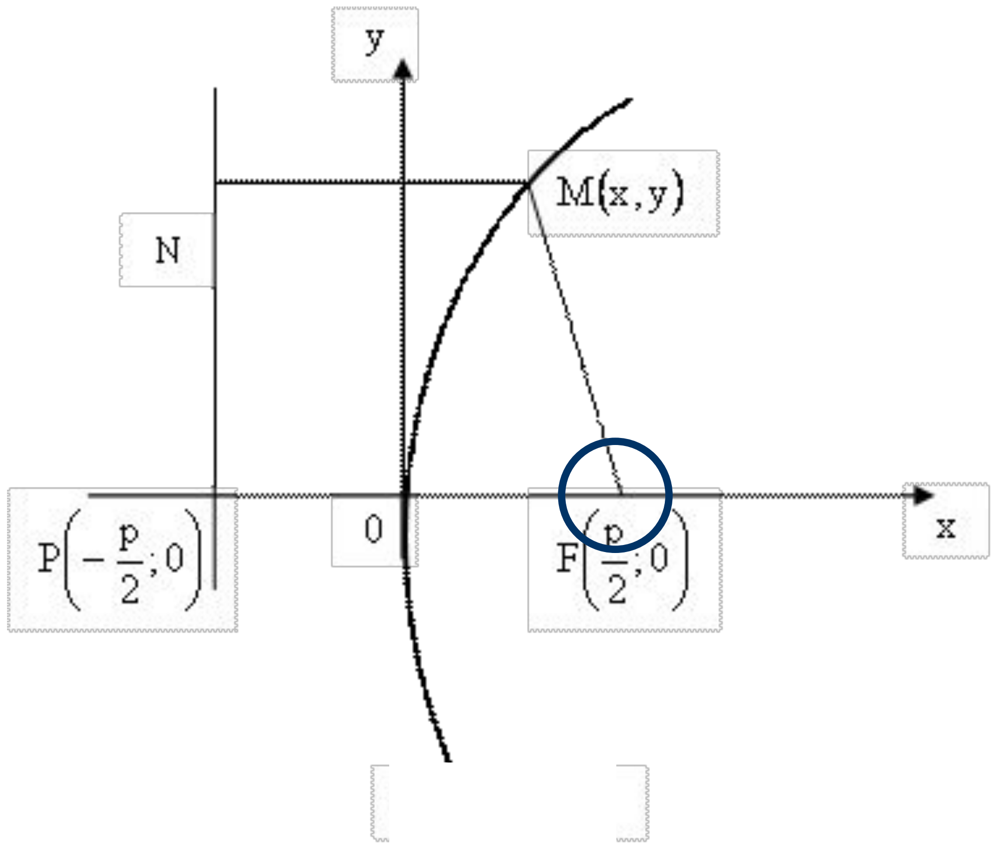
$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \text{ где } b^2 = c^2 - a^2.$$

Получили уравнение искомой гиперболы.
Оно называется каноническим уравнением гиперболы.

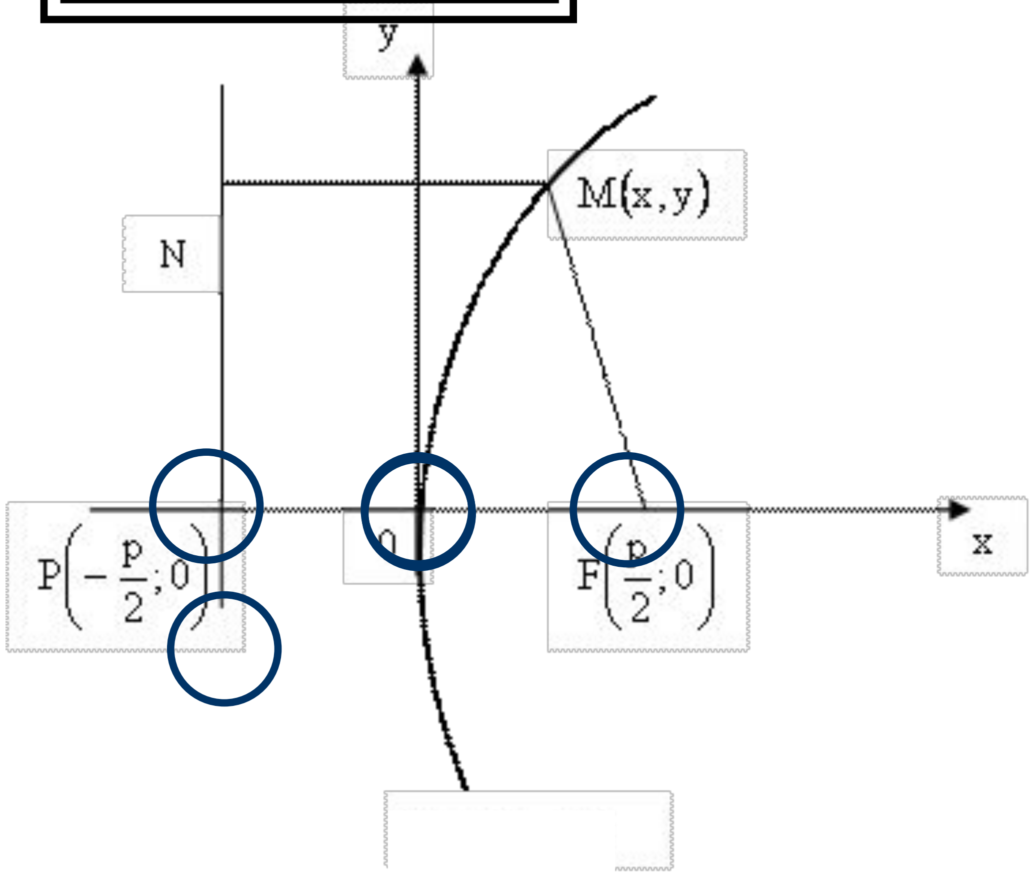
ПАРАБОЛА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Выберем на плоскости произвольную точку F и произвольную прямую (NP), не проходящую через эту точку. Назовем точку F фокусом, а прямую (NP) директрисой. Обозначим расстояние от точки F до прямой (NP) через p и построим систему координат XOY так, как это изображено на рисунке.



Терминология, Точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ называется ***фокусом параболы.*** Точка $O(0;0)$ называется ***вершиной параболы***. Прямая $x=-\frac{p}{2}$ называется ***директрисой.*** Ось, на которой расположен фокус, называется ***фокальной осью***. Расстояние p от фокуса до директрисы называется ***параметром параболы.***



Пусть точка $M(x;y)$ произвольная точка плоскости XOY. Предположим, что точка M лежит на параболе. Тогда, по определению этой кривой $\left|\overline{MF}\right| = \left|\overline{MN}\right|$, где $(MN)\perp(NP)$. Точка N по построению имеет координаты $N\left(-\frac{p}{2};y\right)$. Следовательно, равенство $\left|\overline{MF}\right| = \left|\overline{MN}\right|$ запишется в виде

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2} \Leftrightarrow x+\frac{p}{2} = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

Освобождаясь от иррациональности, получим

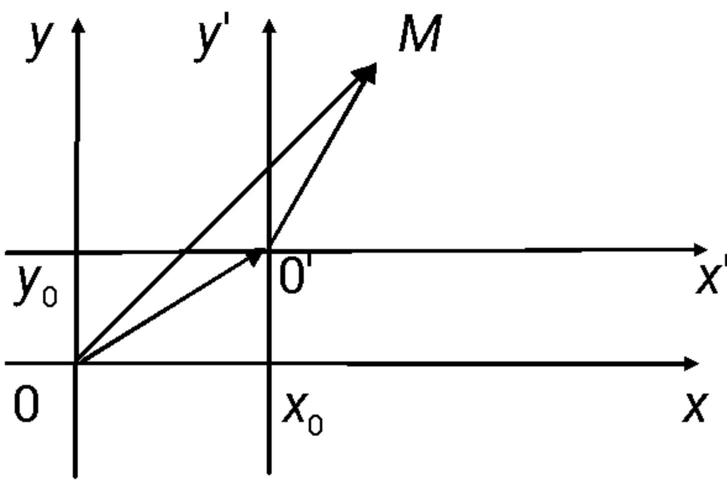
$$x^2+px+\frac{p^2}{4} = x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2 \Leftrightarrow \boxed{y^2 = 2px.}$$

Пусть точка M не лежит на параболе. Тогда $\left|\overline{MF}\right| \neq \left|\overline{MN}\right|$. Следовательно, и $y^2 \neq 2px$.

Итак, согласно определения уравнения плоской кривой, полученное уравнение является уравнением искомой параболы. Оно называется каноническим уравнением параболы, а число $p > 0$ называется ее параметром.

УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОСЯМИ СИММЕТРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМ КООРДИНАТ

Рассмотрим предварительно одну из частных задач преобразования системы координат. Пусть на плоскости введены две прямоугольные декартовые системы координат XOY и $X'O'Y'$ с центрами в точках O и O' и соответственно параллельными осями координат



Пусть точка O' в системе XOY имеет координаты $(x_0; y_0)$. Выберем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через $(x; y)$ и $(x'; y')$ в соответствующих системах XOY и $X'O'Y'$. Поставим задачу установления формул связи между координатами точки M в старой (XOY) и новой $(X'O'Y'$ системах координат. Очевидно, что в системе XOY вектор $\overline{OO'} = \{x_0; y_0\}$, вектор $\overline{OM} = \{x; y\}$. В системе $X'O'Y'$ вектор $\overline{O'M} = \{x'; y'\}$.

Согласно правилу сложения векторов

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

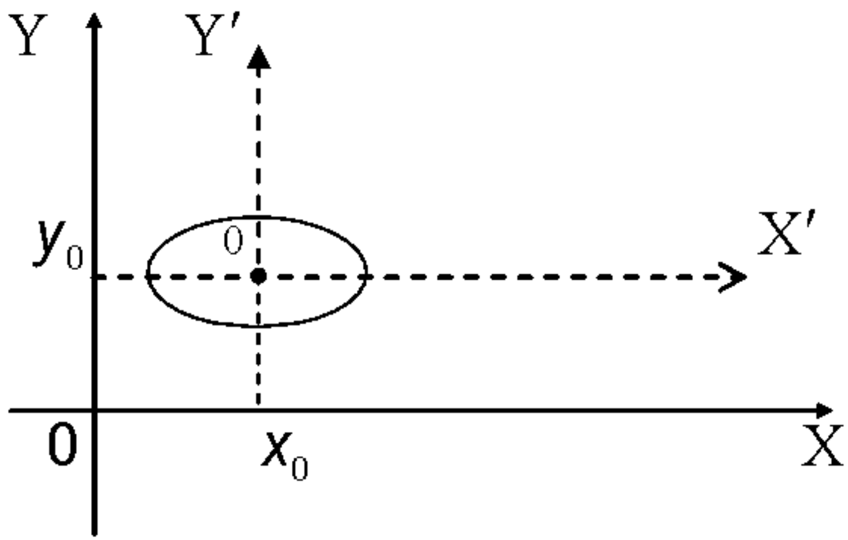
Формулы, связывающие между собой старые и новые координаты точки плоскости, называются формулами параллельного переноса системы координат. Пусть теперь на плоскости XOY задан эллипс с полуосями a и b, центр которого находится в точке $O'(x_0; y_0)$, а оси симметрии параллельны осям координат OX и OY. Требуется найти уравнение эллипса. Введем новую систему координат $X'O'Y'$ с помощью параллельного переноса системы XOY, расположив ее начало координат в центре эллипса. Тогда в новой системе $X'O'Y'$ каноническое уравнение эллипса запишется в виде

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Тогда $x' = x - x_0, y' = y - y_0$.

Тогда в заданной системе координат XOY, уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$



Полученное уравнение является уравнением эллипса с полуосями a и b, центром в точке $O'(x_0; y_0)$ и осями симметрии, параллельными координатным осям.

Решая аналогичным образом задачу относительно уравнения гиперболы, с центром в точке $O'(x_0; y_0)$, с осями симметрии параллельными осям координат, с действительной полуосью равной a, мнимой равной b, получим уравнение

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Аналогично найдем, что уравнение параболы, ось симметрии которой параллельна оси абсцисс, вершина которой находится в точке $O'(x_0; y_0)$, а ее параметр равен p, имеет вид

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0).$$

Если же ось параболы параллельна оси ординат, то

$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0).$$