Машины Тьюринга

Сложность вычислений

Если язык L рассматривается как кодировка массовой задачи (или проблемы) P, то задача P называется *разрешимой*, если язык L является разрешимым языком, и *неразрешимой* в противном случае.

Пример проблемы.

Является ли выполнимой формула алгебра высказываний?

В качестве модели алгоритма рассматривается машина Тьюринга T, вычисляющая словарную функцию $f(x)$.

Временной сложностью машины T называется функция $t_T(x)$, значение которой равно числу шагов работы машины T, сделанных при вычислении значения $f(x)$, если $f(x)$ определено, и $t_T(x)$ не определено, если $f(x)$ не определено.

Ленточной сложностью машины T называется функция $s_T(x)$, значение которой равно числу ячеек машины T, используемых при вычислении значения $f(x)$, и $s_T(x)$ не определено, если $f(x)$ не определено.

Говорят, что машина Тьюринга T имеет *полиномиальную временную сложность* $P(n)$ (или «время работы $P(n)$»), если, обрабатывая вход w длины n, T делает не более $P(n)$ переходов и останавливается независимо от того, допущен вход или нет.

Определение. Говорят, что язык L принадлежит *классу* **P**, если он разрешим некоторой детерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

В частности, распознавательная задача принадлежит классу P, если ее язык принадлежит классу P, т.е. эта задача решается с помощью полиномиального алгоритма - некоторой детерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

Пример. Задача вычисления НОД целых чисел принадлежит классу P.

Определение. Язык L принадлежит классу NP, если он разрешим некоторой недетерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

В частности, распознавательная задача принадлежит классу NP, если ее язык принадлежит классу NP, т.е. эта задача решается с помощью полиномиального недетерминированного алгоритма - некоторой недетерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

Полиномиальные сведения

Основной метод доказательства того, что проблему P_2 нельзя решить за полиномиальное время (т.е. $P_2 \notin P$) состоит в сведении к ней за полиномиальное время такой проблемы P_1, что $P_1 \notin P$. Такое преобразование языков называется *полиномиальным сведением*.

Определение. Говорят, что язык L является NP-*трудным*, если для любого языка L' из класса NP существует полиномиальное сведение языка L' к языку L.

Определение. Говорят, что язык L является NP-*полным*, если он принадлежит классу NP и является NP-трудным.

Теорема 1. Если проблема P_1 является NP-трудной и существует полиномиальное сведение проблемы P_1 к проблеме P_2, то проблема P_2 также NP-трудна.

Следствие. Если проблема P_1 является NP-полной и существует полиномиальное сведение проблемы P_1 к проблеме $P_2 \in NP$, то проблема P_2 также NP-полна.

Основные *NP*-полные проблемы

Форма описания NP-полной проблемы:

1. *Название* проблемы и ее аббревиатура.
2. *Вход* проблемы: что и каким образом представляют данные.
3. Искомый *выход:* при каких условиях выходом будет «да».
4. Известная проблема, сведение которой к данной проблеме доказывает NP-полноту последней.

Проблема выполнимости (ВЫП)

Формулы алгебры высказываний строятся из следующих элементов.

1. Пропозициональные переменные, принимающие значения 1 (истина) или 0 (ложь).
2. Бинарные операторы $\wedge, \vee$, обозначающие логические связки И, ИЛИ двух формул.
3. Унарный оператор $\neg$, который обозначает логическое отрицание.
4. Скобки для группирования операторов и операндов, если необходимо изменить порядок старшинства (приоритетов) операторов, принятый по умолчанию (вначале применяется - $\neg$, затем $\wedge$ и, наконец, $\vee$).

Представление экземпляров ВЫП

Используется следующий код.

1. Символы $\wedge$, $\vee$, $\neg$, и скобки (,) представляют самих себя.
2. Переменная X_i представляется символом X с дописанной к нему последовательностью нулей и единиц — двоичной записью числа i.

Таким образом, алфавит Σ проблемы-языка ВЫП содержит всего восемь символов. Все экземпляры ВЫП являются цепочками символов - словами в этом фиксированном конечном алфавите.

<u>Проблема выполнимости</u> (ВЫП)

Вход: слова w в алфавите Σ, кодирующие формулы алгебры высказываний Ф - экземпляры ВЫП.

Выход: значение 1 - ответ «да» - тогда и только тогда, когда закодированная формула алгебры высказываний Ф выполнима.

Проблема выполнимости (ВЫП) формул алгебры высказываний состоит в следующем

- выяснить, выполнима ли данная формула алгебры высказываний Ф?

Теорема Кука. Проблема ВЫП NP-полна.