Теория графов

Ирина Борисовна Просвирнина

- Определения и примеры
- Пути и циклы

Определения и примеры

Хотя обычно **теорию графов** считают одной из современных областей математики, ее начало датируется 1736 годом.

В этом году Леонард Эйлер опубликовал свою первую статью, посвященную тому, что сейчас называют теорией графов.

В статье Эйлер изложил теорию, позволившую решить задачу о мостах Кенигсберга.

Определения и примеры

Эйлер (1707 – 1783) родился в Швейцарии и провел большую часть жизни в России (Санкт Петербург) и Пруссии (Берлин).

Он был одним из самых плодовитых математиков. Собрание его научных трудов составляет более 70 томов.

Определения и примеры

Как и большинство выдающихся математиков того времени, Эйлер внес вклад почти в каждую из отраслей чистой и прикладной математики.

Он также ответственен в большей мере, чем кто-либо другой, за систему современных математических обозначений.

Определения и примеры

- Что такое ‘граф’?
- Интуитивно, граф – это набор точек, называемых ‘вершинами’, и набор линий, называемых ‘ребрами’, при этом каждая линия либо соединяет пару точек, либо соединяет точку саму с собой.
- Пример графа, знакомый каждому, – карта дорог, на которой города являются вершинами, а соединяющие их дороги – ребрами графа.

Определения и примеры

Определение 1

Неориентированный граф (или просто **граф**) состоит из

- конечного непустого множества **вершин** V,
- конечного множества **ребер** E и
- функции $\delta : E \to \mathcal{P}(V)$, сопоставляющей каждому ребру e подмножество $\delta(e)$ множества V, состоящее из одной или двух вершин.

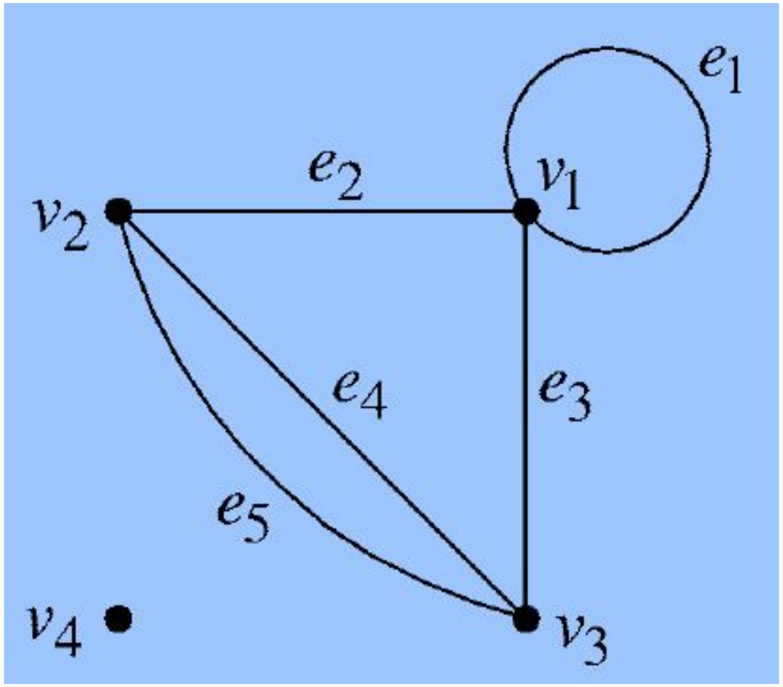
При этом говорят, что ребро e **соединяет** элемент(ы) подмножества $\delta(e)$.

Определения и примеры

Определение 1

- Граф называется **простым**, если в нем нет петель (т. е. ребер вида $\{v, v\}$), и нет кратных ребер (т. е. каждая пара различных вершин соединена не более чем одним ребром).

Определения и примеры



- Рассмотрим граф Γ, изображенный на рисунке.

Γ имеет множество вершин $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и множество ребер $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Функция $\delta : E \to \mathcal{P}(V)$ определена так:

$\delta : e_1 \longmapsto \{v_1\}$

$\delta : e_2 \longmapsto \{v_1, v_2\}$

$\delta : e_3 \longmapsto \{v_1, v_3\}$

$\delta : e_4 \longmapsto \{v_2, v_3\}$

$\delta : e_5 \longmapsto \{v_2, v_3\}$.

Определения и примеры

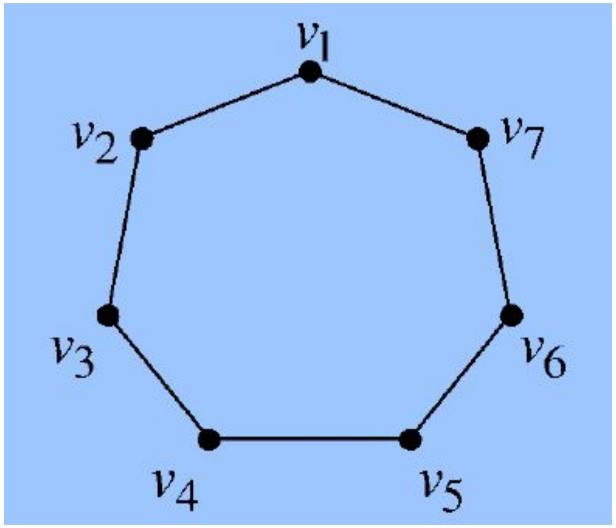
- Граф и диаграмма, изображающая граф – это не одно и тоже.

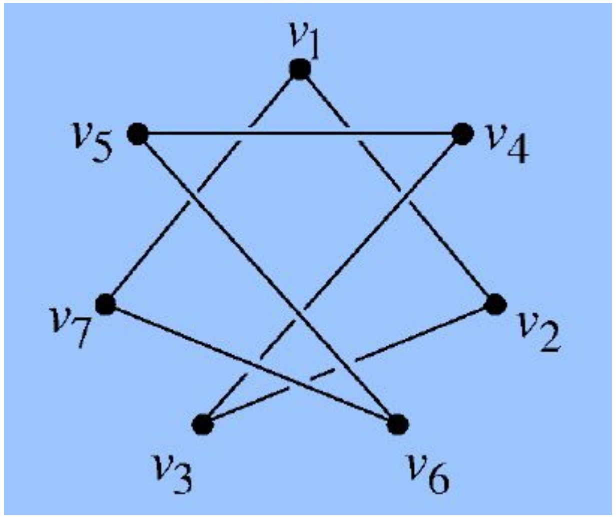
Данный граф можно изобразить с помощью двух совершенно различных диаграмм.

Например, две диаграммы, представленные на рисунке, изображают один и тот же граф.

В этом можно убедиться, построив функцию

$\delta : E \rightarrow \mathcal{P}(V)$





Определения и примеры

Определение 2

- Вершины v и w называются **смежными**, если существует ребро, соединяющее эти вершины. При этом говорят, что каждая из вершин v и w **инцидентна** ребру e, а ребро e **инцидентно** вершинам v и w.
- Ребра $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называются **смежными**, если они имеют хотя бы одну общую вершину.

Определения и примеры

Определение 2

- **Степень** или **валентность,** $\deg(v)$, вершины v – это число ребер, инцидентных v.

(Если не оговорено противное, петля, соединяющая вершину v с самой собой, при подсчете степени вершины v учитывается дважды.)

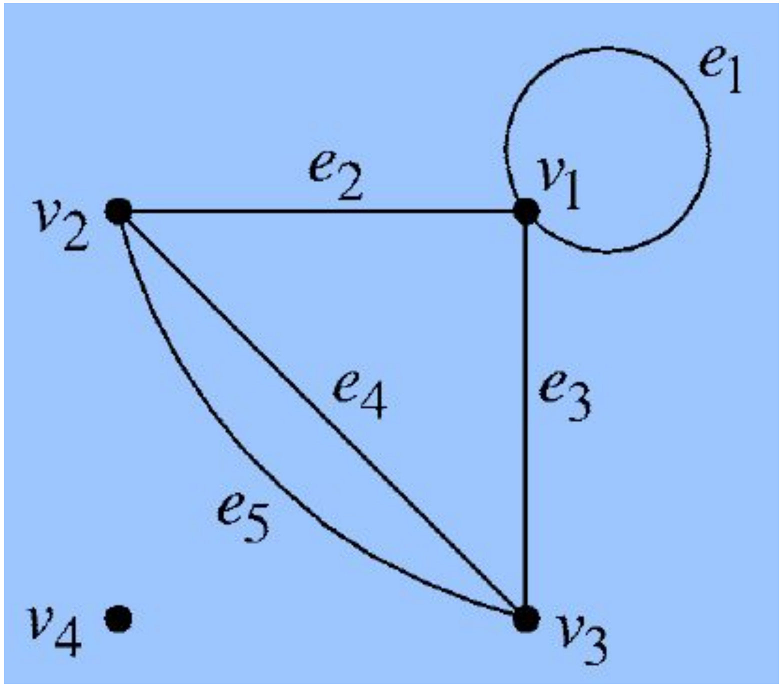
Граф, у которого каждая вершина имеет одну и ту же степень r, называется **регулярным** (степени r) или просто r-**регулярным**.

Определения и примеры

Определение 2

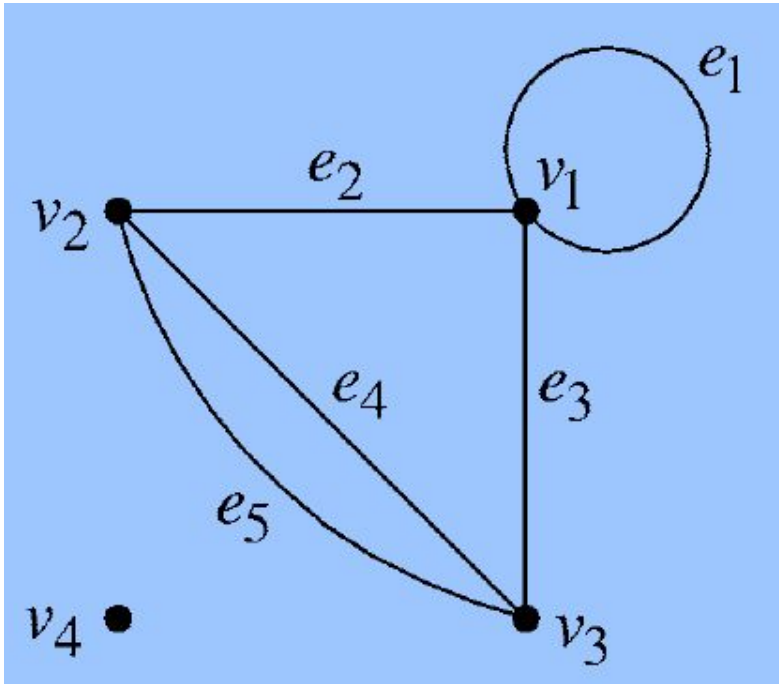
- **Степенная последовательность** графа – это последовательность степеней его вершин, записанных в неубывающем порядке.

Определения и примеры



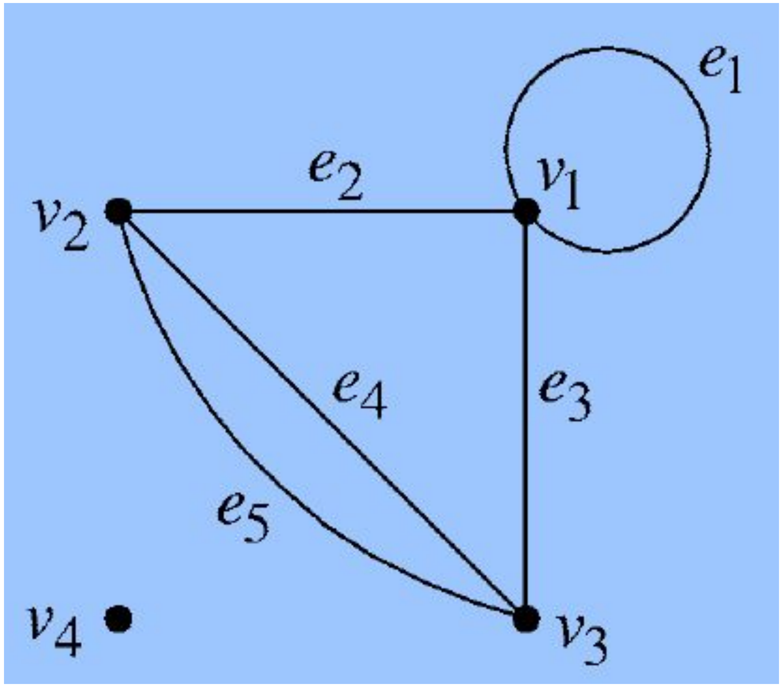
- Вершины v_1 и v_2 являются смежными, так как их соединяет ребро e_2.
- Аналогичным образом, вершины v_1 и v_3 – смежные, так же как и вершины v_2 и v_3.
- Вершина v_4 не является смежной ни с одной из вершин графа.

Определения и примеры



- Ребра e_1, e_2 и e_3 являются смежными, так как они имеют общую вершину v_1.
- Аналогичным образом, ребра e_2, e_4, e_5 являются смежными, так же как и ребра e_3, e_4, e_5.

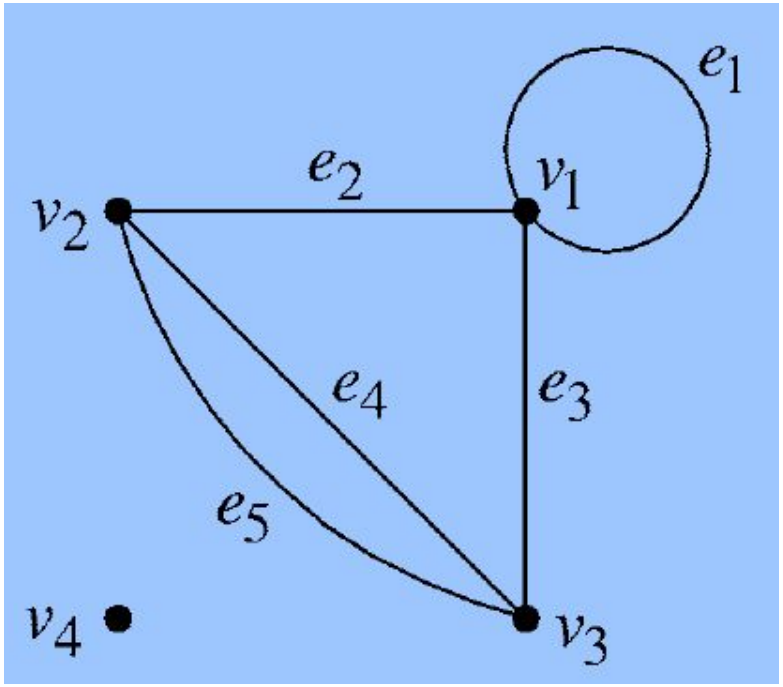
Определения и примеры



Степени четырех вершин приведены в следующей таблице.

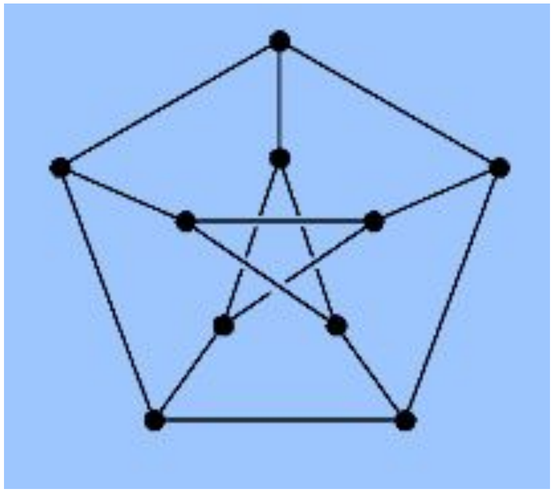
Вершина	Степень
	4
	3
	3
	0

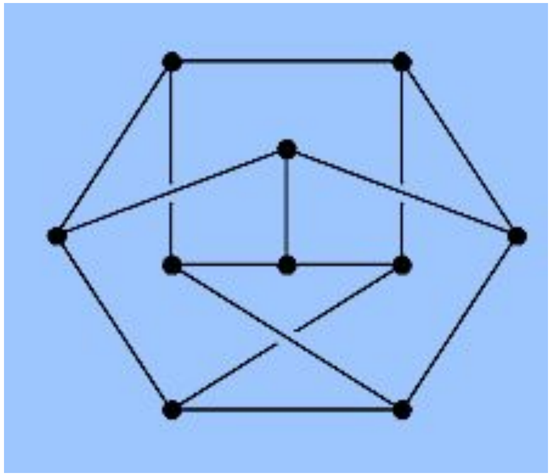
Определения и примеры



- Степенная последовательность графа имеет вид $(0, 3, 3, 4)$.

Определения и примеры





- Граф Петерсена – хорошо известный простой 3-регулярный граф. На рисунке изображены две диаграммы этого графа.
- На диаграмме графа ребра могут пересекаться только в вершинах.

  Однако, на плоскости не всегда возможно нарисовать диаграмму графа с соблюдением этого условия.

  Поэтому на диаграмме графа при необходимости указывают, что одно ребро

Определения и примеры

Определение 3

- **Нулевым графом** (или **вполне несвязным графом**) называется граф с пустым множеством ребер.

  (Диаграмма нулевого графа – это просто набор точек.)

- **Полным графом** называется простой граф, каждая пара различных вершин которого соединена ребром.

Определения и примеры

Определение 3

- **Двудольным графом** называется граф, для множества вершин которого имеется разбиение $\{V_1, V_2\}$, при чем каждое ребро графа соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2.
- **Полный двудольный граф** – это двудольный граф, у которого каждая вершина из V_1 соединена с каждой вершиной из V_2 единственным ребром.

Определения и примеры

Примеры

- Так как полный граф является простым, то в нем нет петель, и каждая пара различных вершин соединена единственным ребром.

  Полный граф однозначно специфицируется числом своих вершин.

Определения и примеры

Примеры

- Полный граф K_n с n вершинами можно описать следующим образом.

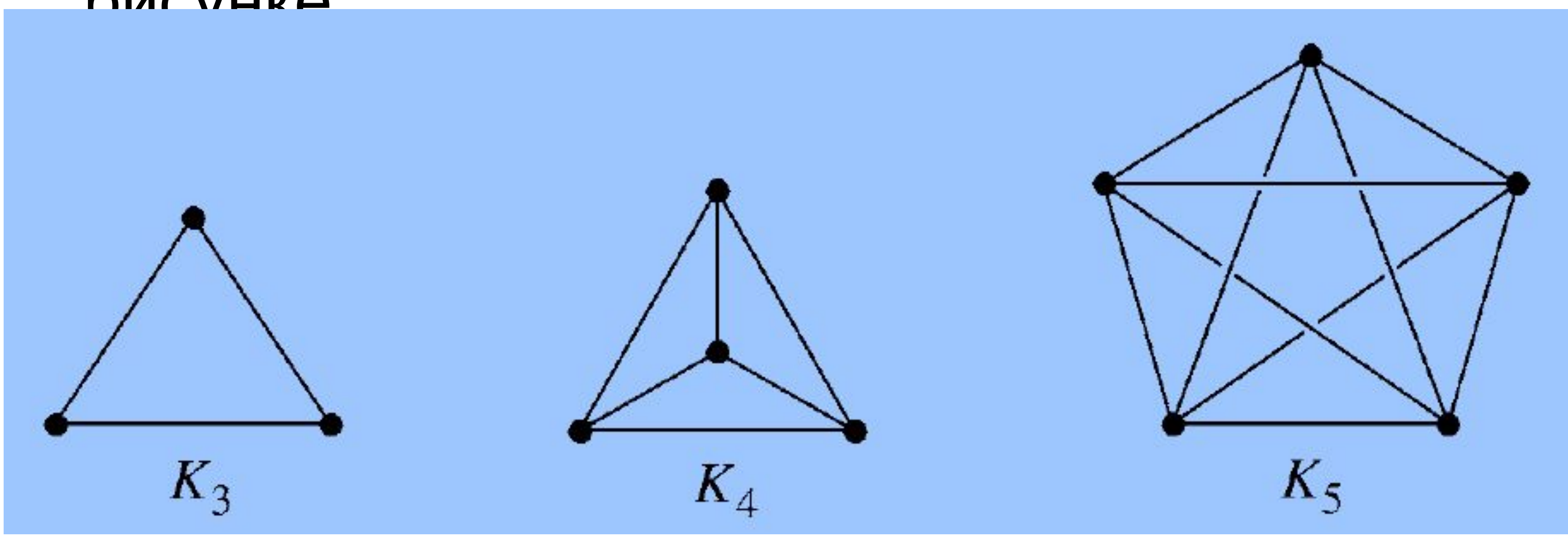
  Он имеет множество вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, множество ребер $E = \{e_{ij}: 1 \leq i < j \leq n\}$ и функцию δ, заданную правилом: $\delta(e_{ij}) = \{v_i, v_j\}$.

  Граф K_n является регулярным степени $n-1$, так как каждая вершина связана единственным ребром с остальными $n-1$ вершинами.

Определения и примеры

Примеры

- Полные графы с тремя, четырьмя и пятью вершинами приведены на следующем рисунке



Определения и примеры

Примеры

- Пусть Γ – двудольный граф, для множества вершин V которого имеется разбиение $\{V_1, V_2\}$.

  Заметим, что Γ не обязан быть простым графом. Требуется только, чтобы каждое ребро соединяло вершину из V_1 с вершиной из V_2. Данные вершины $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$ могут быть либо вообще не соединены ребрами, либо соединены более чем одним ребром.

  Ясно, что в двудольном графе Γ, тем не менее, нет петель.

Определения и примеры

Примеры

- Полный двудольный граф полностью специфицируется числами $|V_1|$ и $|V_2|$.

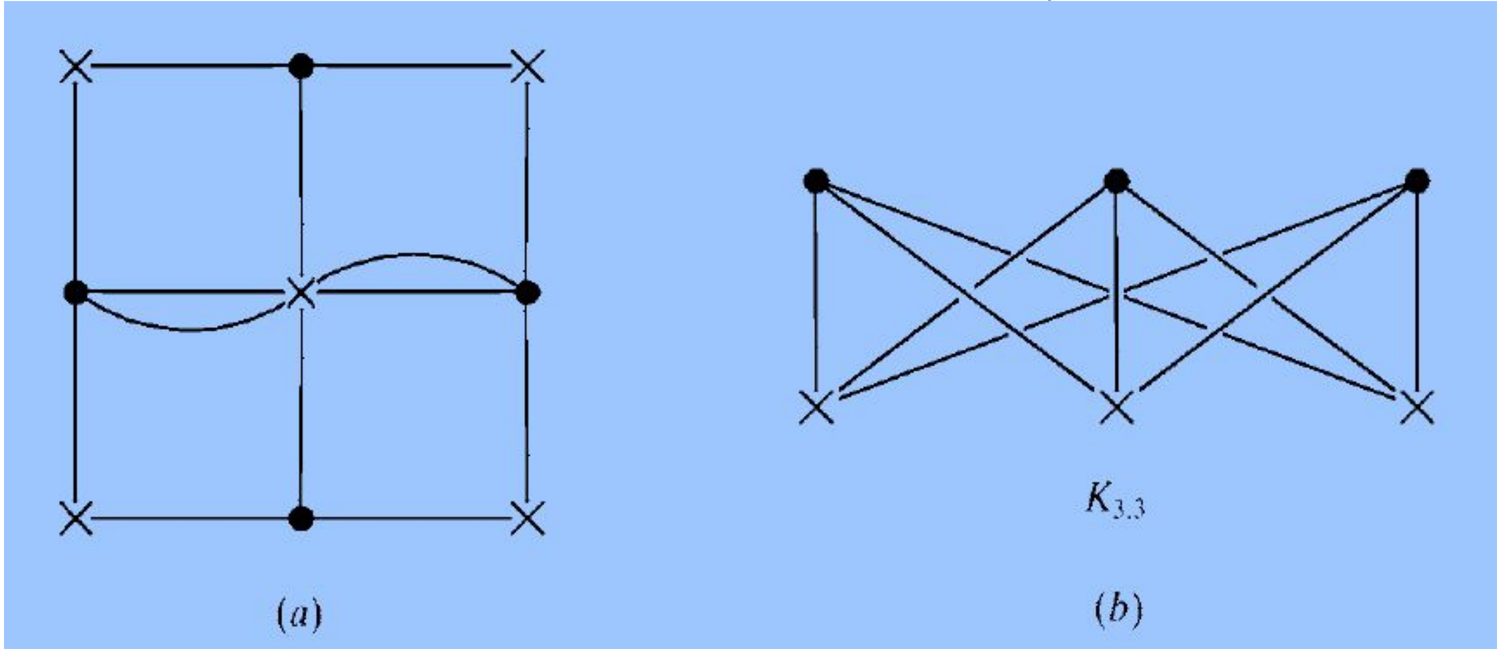
  Если $|V_1| = n$ и $|V_2| = m$, то полный двудольный граф обозначается через $K_{n,m}$ и называется **полным двудольным графом от n и m вершин**.

  Граф $K_{n,m}$ является простым.

Определения и примеры

Примеры

- На рисунке изображены два двудольных графа. В обоих случаях вершины из V_1 представлены закрашенными окружностями, а вершины из V_2 – крестиками. Граф, изображенный на рисунке (b) – это полный двудольный граф $K_{3,3}$.



Определения и примеры

Определение 4

Пусть Γ – граф с множеством вершин $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Матрица смежности графа Γ – это $n \times n$ матрица $A = A(\Gamma)$, состоящая из элементов a_{ij}, равных числу ребер, соединяющих v_i и v_j.

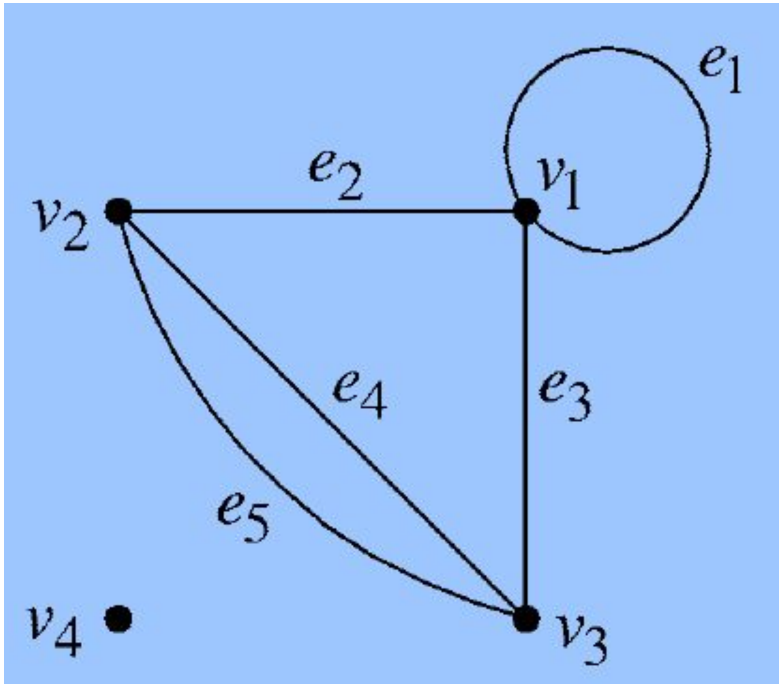
Определения и примеры

- Матрица смежности **симметрична**, так как число ребер, соединяющих v_i и v_j равно числу ребер, соединяющих v_j и v_i.

Определения и примеры

- Степень вершины v_i легко определить с помощью матрицы смежности.
- Если при вершине v_i нет петель, то ее степень равна сумме элементов i-го столбца (или i-ой строки) матрицы смежности.
- Так как при вычислении степени вершины v_i каждая петля, инцидентная данной вершине, учитывается дважды, то, суммируя элементы i-го столбца (или i-ой строки) матрицы смежности, диагональный элемент a_{ii} следует умножить на 2.

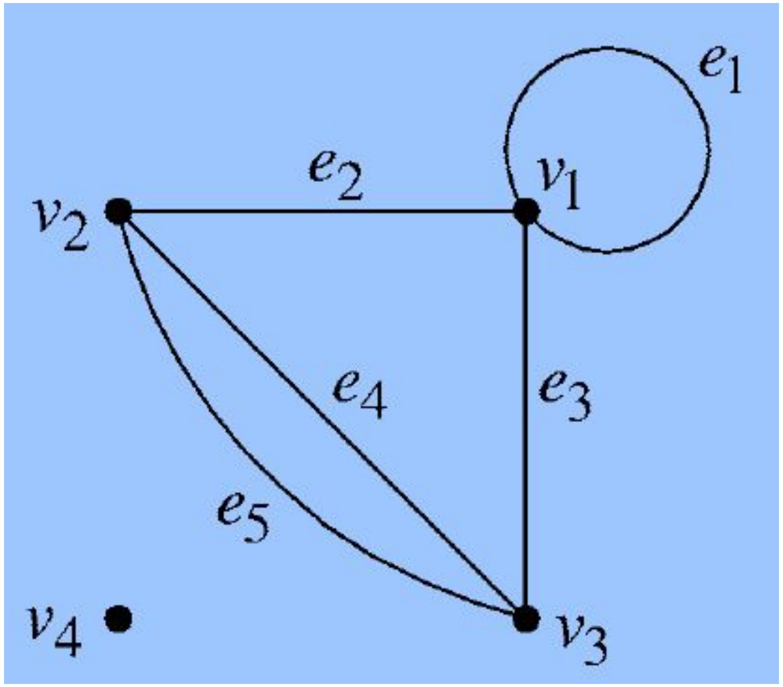
Определения и примеры



- Матрица смежности A графа, изображенного на рисунке, имеет вид

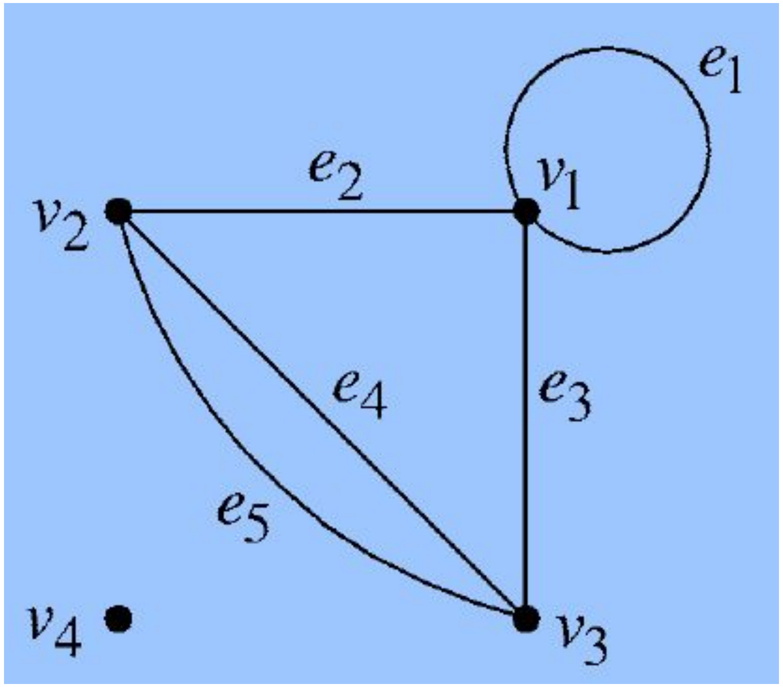
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Определения и примеры



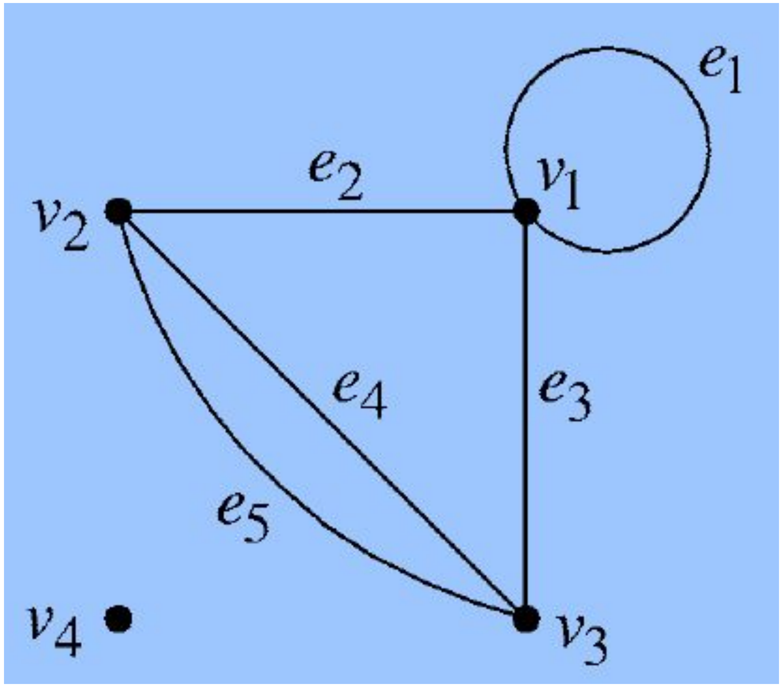
- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- Заметим, что $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, и нумерация строк и столбцов матрицы A соответствует зафиксированному порядку вершин.

Определения и примеры



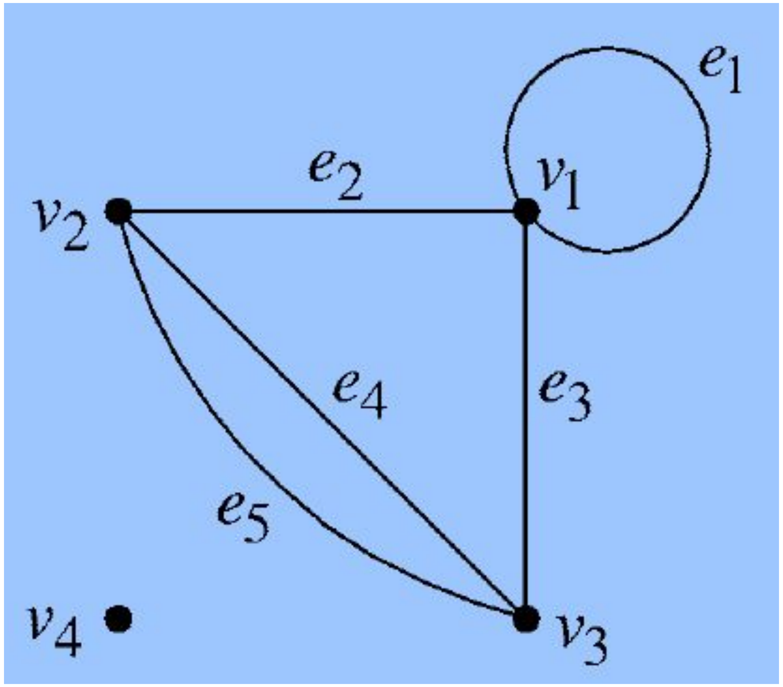
- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- Два свойства графа немедленно следуют из вида матрицы A.
- Во-первых, строение главной диагонали показывает, что у графа имеется только одна петля – из вершины v_1 в саму себя.

Определения и примеры



- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- Во-вторых, последняя нулевая строка (или столбец) показывает, что v_4 является **изолированной вершиной**, которая не соединена ребром ни с одной из вершин графа (включая саму себя).

Определения и примеры



- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычислим степени вершин с помощью матрицы A:

$\deg(v_1) = 2 \times 1 + 1 + 1 = 4$

$\deg(v_2) = 1 + 2 = 3$

$\deg(v_3) = 1 + 2 = 3$

$\deg(v_4) = 0.$

Определения и примеры

Примеры

- Матрица смежности нулевого графа с n вершинами – $n \times n$ нулевая матрица $O_{n\times n}$, так как у нулевого графа нет ребер.

Определения и примеры

Примеры

- Матрица смежности полного графа – матрица с нулями на главной диагонали (так как нет петель) и единицами на остальных позициях (так как каждая пара различных вершин соединена единственным ребром).

Определения и примеры

Определение 5

Граф Σ называют **подграфом** графа Γ и пишут: $\Sigma \leq \Gamma$, если $V_\Sigma \subseteq V_\Gamma$, $E_\Sigma \subseteq E_\Gamma$ и $\delta_\Sigma(e) = \delta_\Gamma(e)$ для каждой вершины e из Σ.

Определения и примеры

- Условие: $\delta_\Sigma(e) = \delta_\Gamma(e)$ для каждого ребра e из Σ, – означает, что ребра подграфа Σ должны соединять те же вершины, которые они соединяют в графе Γ.

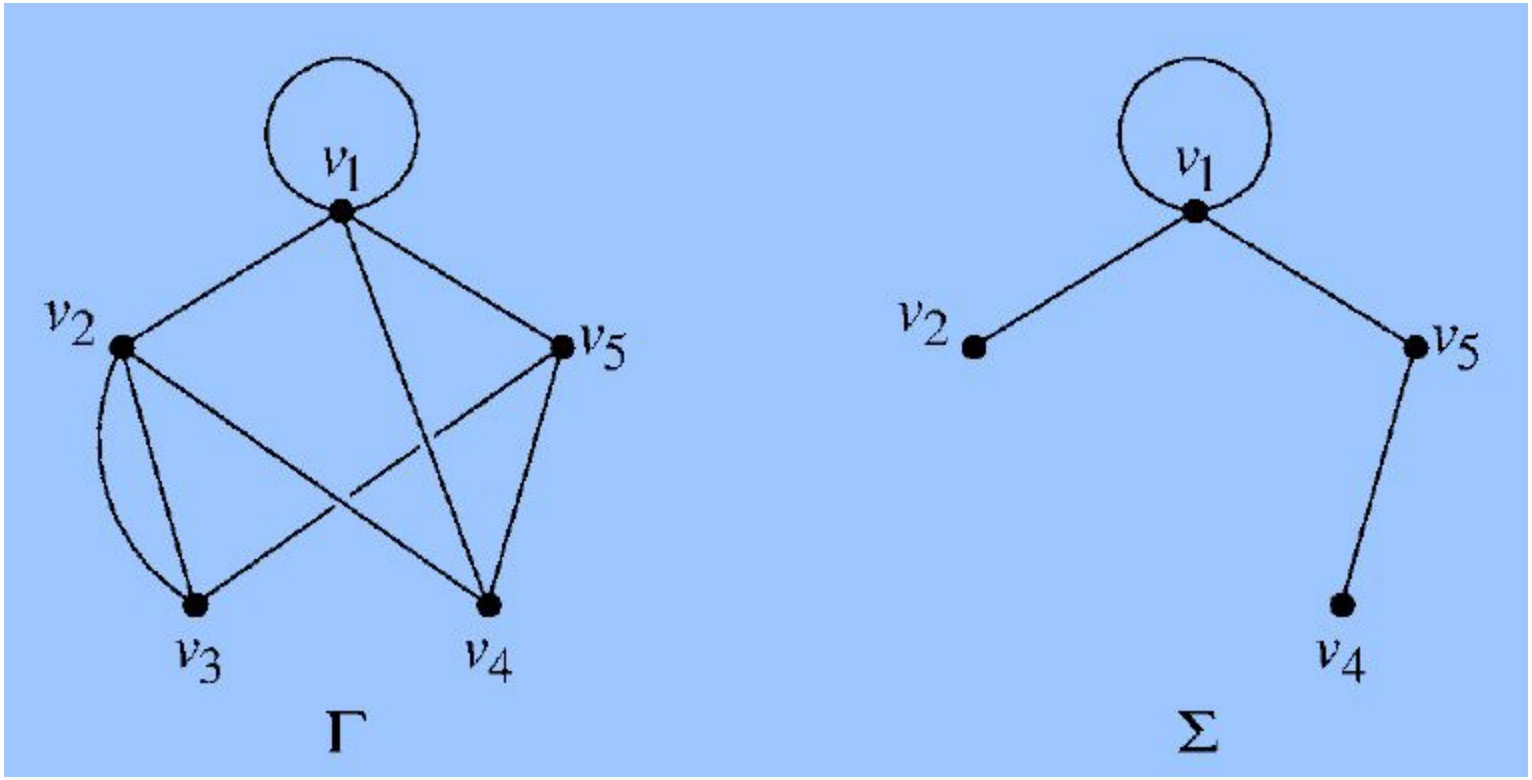
На интуитивном уровне Σ является подграфом графа Γ, если диаграмму графа Σ можно получить из диаграммы графа, удаляя вершины и/или ребра из диаграммы графа Γ.

Конечно, если мы удаляем вершину, то мы должны удалить все ребра, инцидентные данной вершине.

Определения и примеры

Пример

Граф Σ является подграфом графа Γ.



Пути и циклы

- По аналогии с дорожной картой мы можем рассматривать различные типы ‘путешествий’ в графе.
- Например, если граф представляет сеть дорог, связывающих различные города, то можно задаться следующим вопросом.

  Можно ли совершить путешествие, которое начинается и заканчивается в одном и том же городе, посетив при этом каждый город только один раз и проезжая по каждой дороге не более одного раза.
- Как всегда, начнем с определений.

Пути и циклы

Определение 6

- **Последовательность ребер длины n** в графе Γ – это последовательность (не обязательно различных) ребер $e_1, e_2, \dots, e_n$, таких, что e_i и e_{i+1} являются смежными для $i = 1, 2, \dots, n-1$.

  Последовательность ребер определяет последовательность вершин (опять, не обязательно различных) $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$, где $\delta(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$.

  Мы говорим, что v_0 – **начальная вершина** и v_n – **конечная вершина** последовательности ребер.

Пути и циклы

Определение 6

- **Путь** – это последовательность ребер, в которой все ребра различны.

  Если к тому же и все вершины различны (возможно, кроме $v_0 = v_n$), то путь называется **простым**.
- Последовательность ребер называется **замкнутой**, если $v_0 = v_n$.

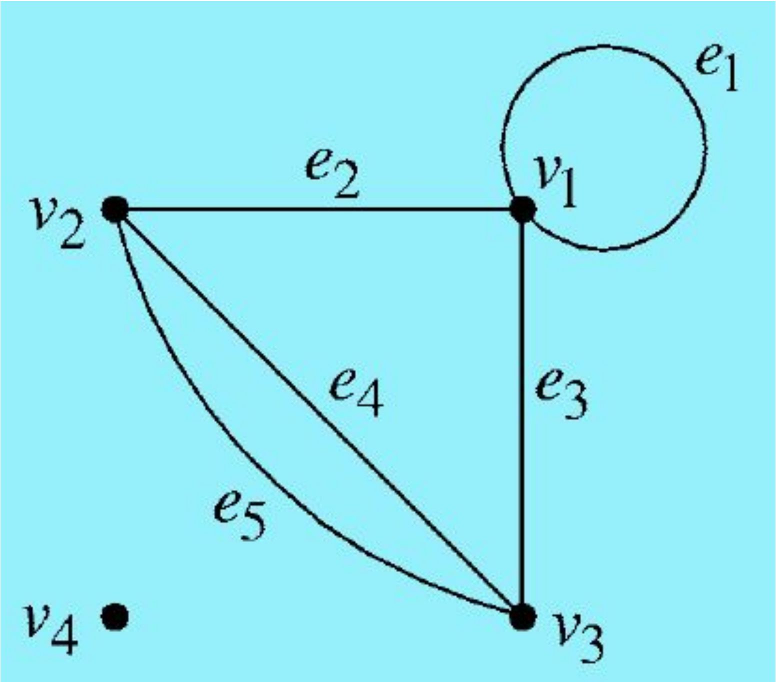
  Простой замкнутый путь, состоящий по крайней мере из одного ребра, называется **циклом**.

Пути и циклы

- Последовательность ребер графа – это произвольная последовательность ребер, которую можно начертить на диаграмме графа, не отрывая карандаша от бумаги.

  Ребра в ней могут повторяться, она может обходить петли по нескольку раз и т. д.
- Поскольку определение последовательности ребер носит слишком общий характер и эта конструкция редко используется, то мы определили путь.

Пути и циклы



- Пусть Γ – граф, изображенный на рисунке; примеры последовательностей ребер в Γ:

1) e_1, e_3, e_4, e_5, e_3;

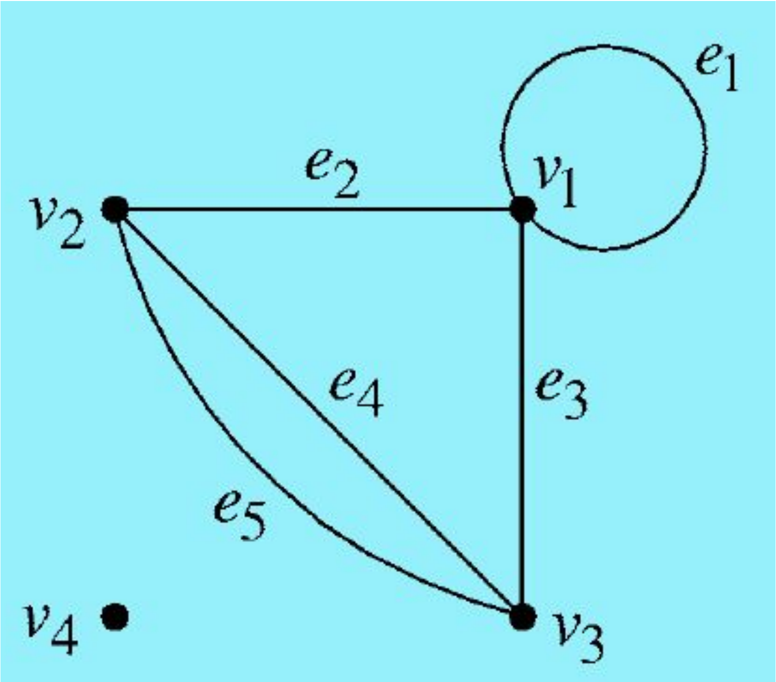
2) e_3, e_3;

3) e_2, e_3, e_4;

4) e_4, e_3;

5) e_4, e_5, e_2.

Пути и циклы



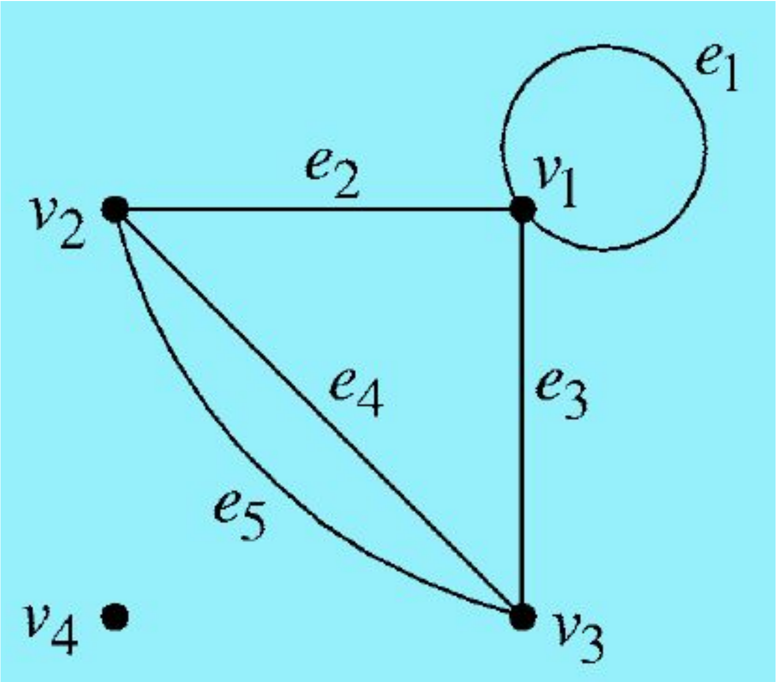
- **1) e_1, e_3, e_4, e_5, e_3**

Последовательность 1) – это замкнутая последовательность ребер, начинающаяся и заканчивающаяся в v_1.

Она определяет последовательность вершин $v_1, v_1, v_3, v_2, v_3, v_1$.

Эта последовательность ребер не является путем, так как ребро e_3 в ней встречается дважды.

Пути и циклы



- **2) e_3, e_3**

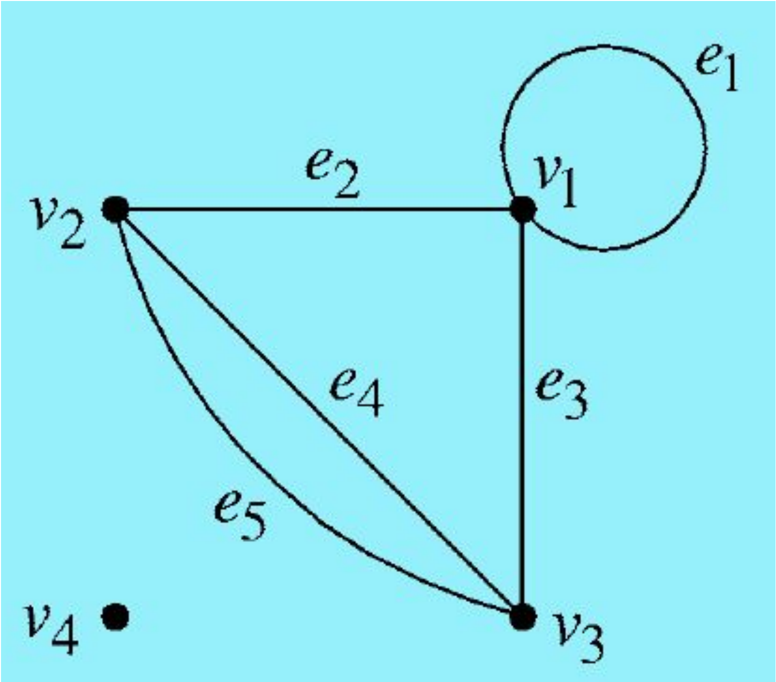
Последовательность 2) также замкнута, но она может начинаться (и заканчиваться) либо в v_1, либо в v_3.

Соответствующая последовательность вершин – это либо v_1, v_3, v_1, либо v_3, v_1, v_3.

Такая неоднозначность всегда имеет место в последовательности вида $e_i, e_i, \ldots, e_i$, где e_i не является петлей.

Это снова не путь.

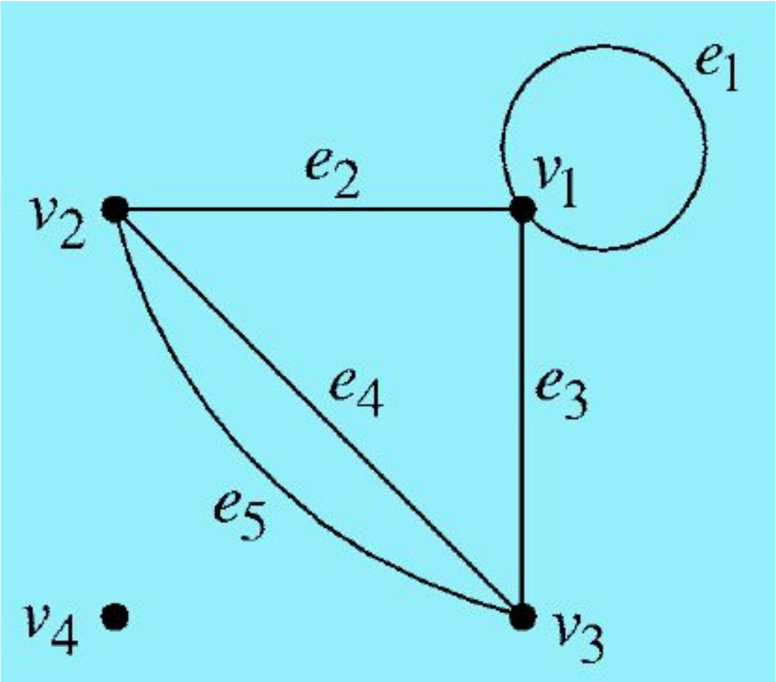
Пути и циклы



- **3) e_2, e_3, e_4**

Последовательность 3) является циклом: она начинается и заканчивается в вершине v_2, и ни одно ребро и ни одна вершина (кроме самой вершины v_2) не повторяются.

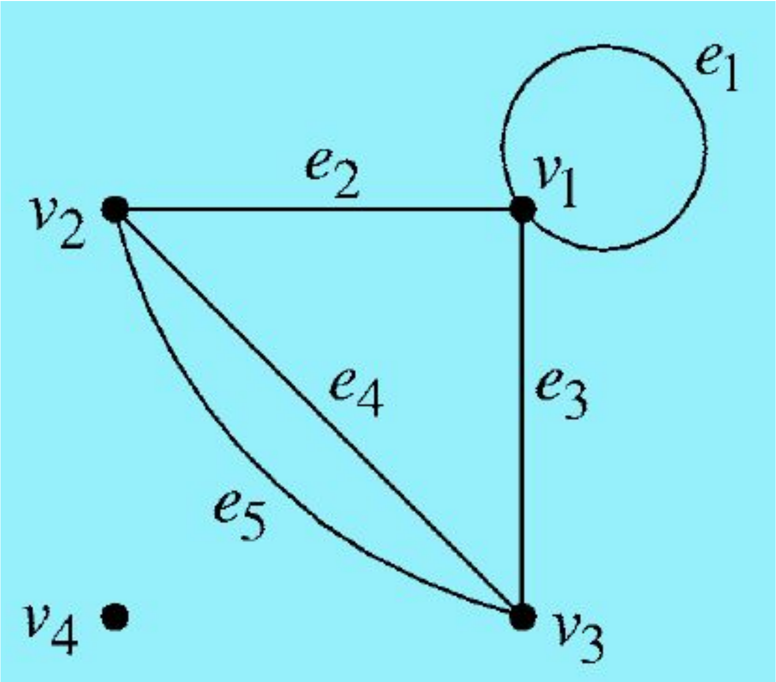
Пути и циклы



- **4) e_4, e_3**

Последовательность 4) является простым путем из вершины v_2 в вершину v_1.

Пути и циклы

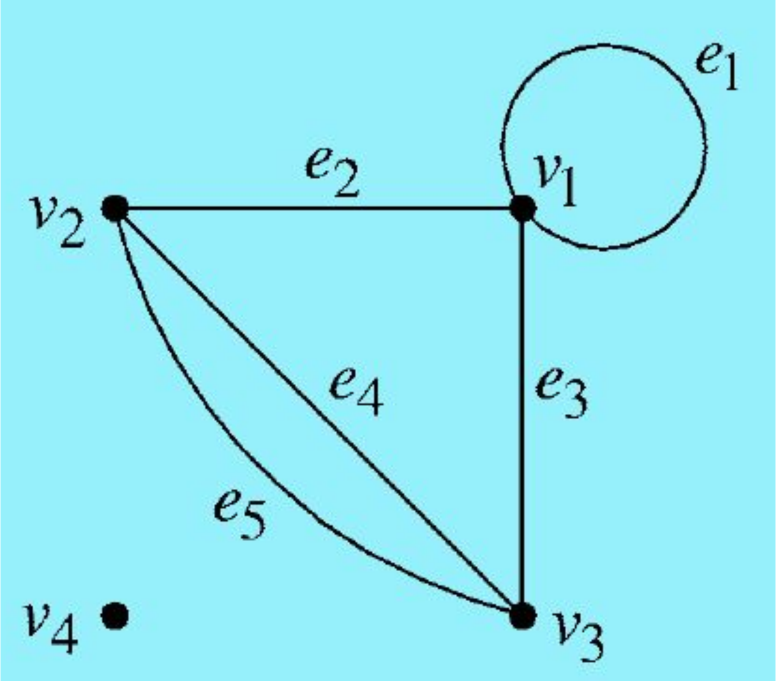


- **5)** $\boldsymbol{e_4, e_5, e_2}$

Последовательность 5) является путем с начальной вершиной v_2 и конечной вершиной v_1.

Этот путь не является простым, так как в ассоциированной последовательности вершин вершина v_2 встречается дважды.

Пути и циклы



- Пусть Γ – граф, изображенный на рисунке. Матрица смежности Γ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i, j)-элемент матрицы A – это число ребер, соединяющих вершины v_i и v_j,

т. е. (что то же самое) число последовательностей ребер длины 1, соединяющих вершины v_i и v_j.

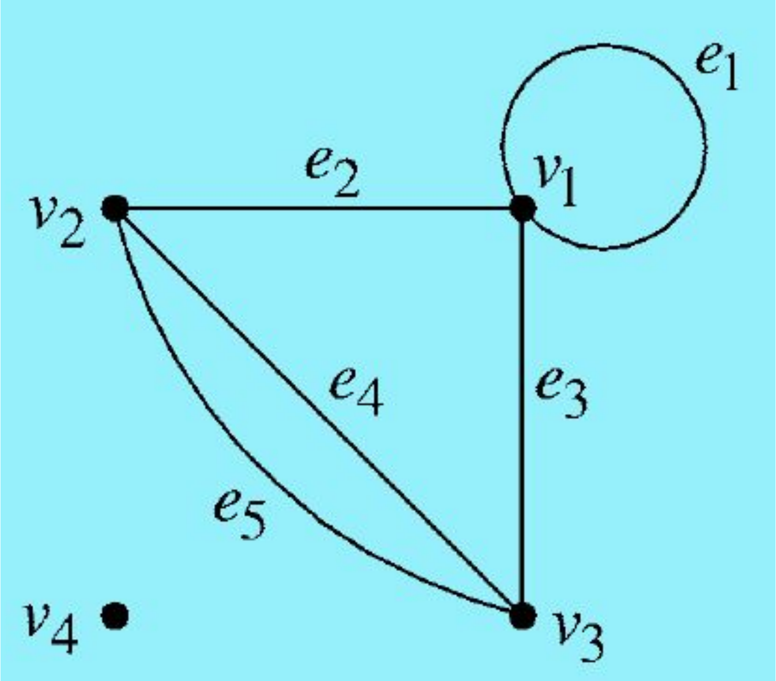
Пути и циклы

- Вычислим квадрат матрицы смежности

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

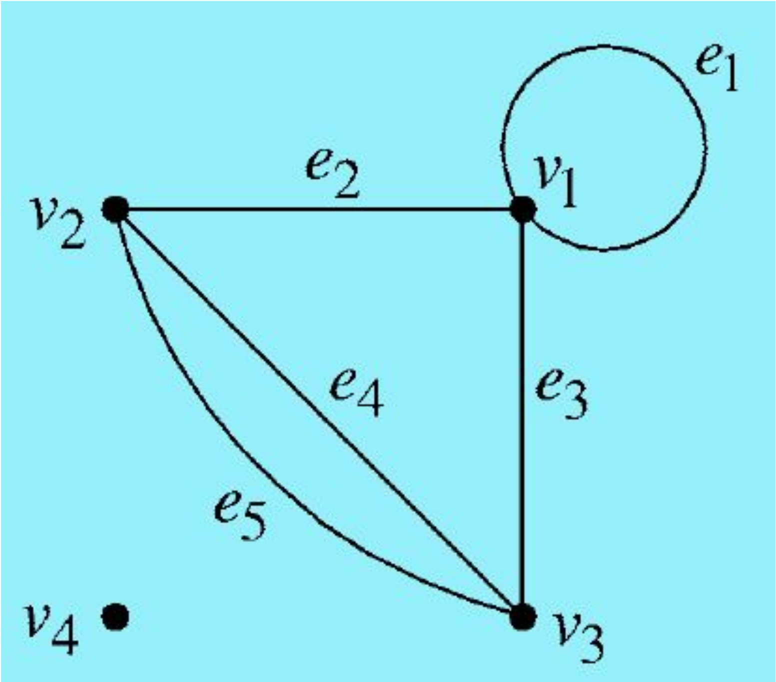
Пути и циклы



- $$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В A^2 (i, j)-элемент равен числу последовательностей ребер длины 2, соединяющих вершины v_i и v_j.

Пути и циклы



- $$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Например, $(2, 2)$-элемент равен 5.

Имеется 5 последовательностей ребер длины 2, соединяющих v_2 с v_2:

e_2, e_2; e_4, e_4; e_5, e_5; e_4, e_5; e_5, e_4.

? В матрице A^2 (i, j)-элемент равен числу последовательностей ребер длины 2, соединяющих v_i и v_j.

- **(i, j)-элемент** из A^2 получается 'умножением' i-ой строки на j-ый столбец матрицы A, т. е.
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}.$$
- r-ое слагаемое этой суммы: $\boldsymbol{a_{ir} a_{rj}}$ – это произведение **числа ребер, соединяющих v_i и v_r**, на **число ребер, соединяющих v_r и v_j**; другими словами, $\boldsymbol{a_{ir} a_{rj}}$ – это число последовательностей ребер длины 2, соединяющих v_i и v_j и проходящих через v_r.
- Суммируя по всем k, получим число всех последовательностей ребер длины 2, соединяющих v_i и v_j.

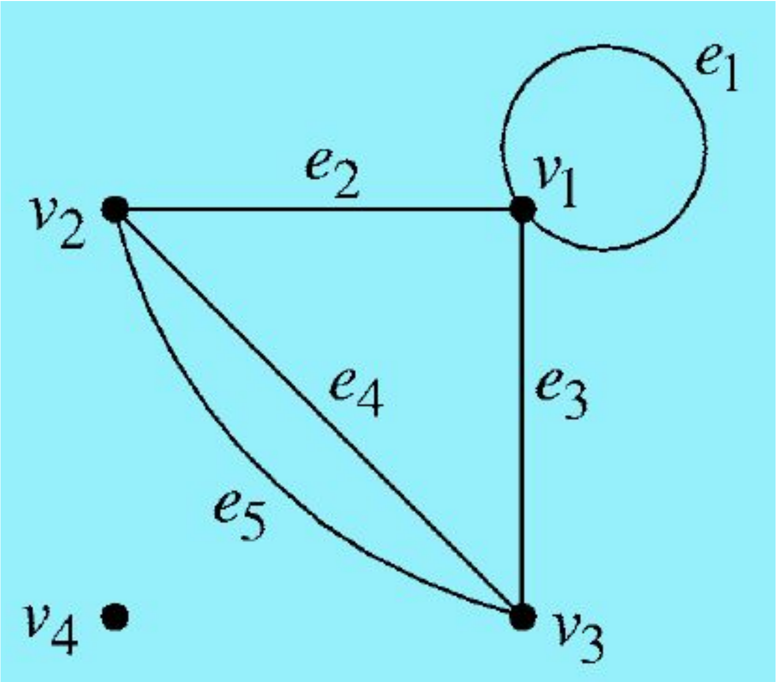
Пути и циклы

- Вычислим куб матрицы смежности

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & 13 & 0 \\ 9 & 13 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пути и циклы

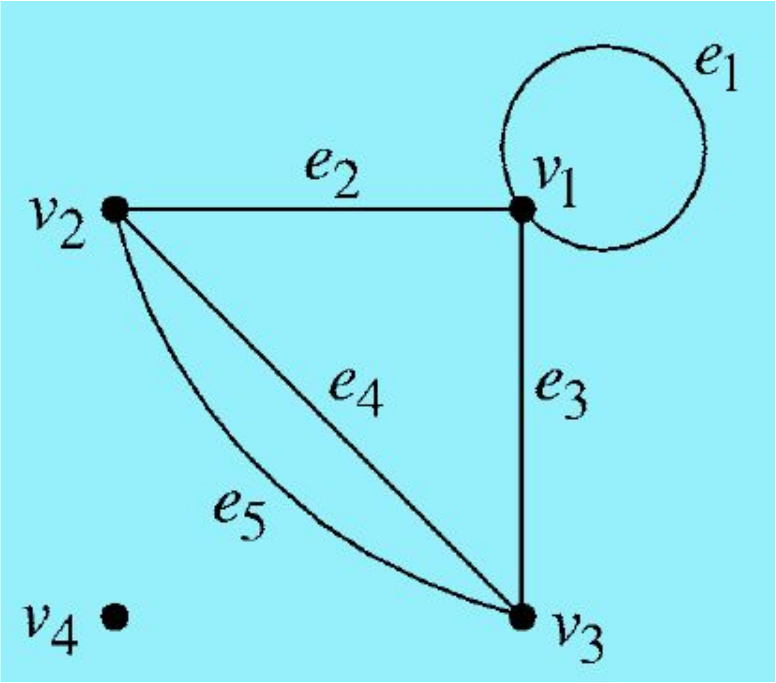


- $$A^3 = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & 13 & 0 \\ 9 & 13 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Например, $(1, 2)$-элемент равен 9.

Имеется 9 последовательностей ребер длины 3, соединяющих v_1 и v_2.

Пути и циклы



- Имеется девять последовательностей ребер длины 3, соединяющих вершины v_1 и v_2:

1) $e_1, e_1, e_2;$
2) $e_2, e_2, e_2;$
3) $e_1, e_3, e_4;$
4) $e_1, e_3, e_5;$
5) $e_3, e_3, e_2;$
6) $e_2, e_4, e_4;$
7) $e_2, e_5, e_5;$
8) $e_2, e_4, e_5;$
9) $e_2, e_5, e_4.$

Пути и циклы

Теорема 1

Пусть Γ – граф с множеством вершин $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ и матрицей смежности A.

(i, j)- элемент матрицы A^n равен числу последовательностей ребер длины n, соединяющих v_i и v_j.

Доказательство

Теорема может быть доказана методом математической индукции. Индуктивный шаг проводится аналогично разобранному выше случаю.■

Пути и циклы

На интуитивном уровне ясно, что некоторые графы являются ‘единым целым’, а другие состоят из нескольких частей.

Объясним эту ситуацию, используя понятие пути.

Пути и циклы

Определение 7

Граф называется **связным**, если для любых двух его различных вершин существует путь, связывающий эти вершины.

Пути и циклы

- Произвольный граф разбивается на несколько связных подграфов, называемых его **(связными) компонентами**.

Компоненты можно определить формально как максимальные связные подграфы.

Другими словами, Γ_1 является компонентой графа Γ, если Γ_1 – связный подграф графа Γ, и если Γ_1 не является собственным подграфом любого другого ***связного*** собственного подграфа графа Γ.

Это второе условие выражает значение термина «максимальный связный подграф»; оно утверждает, что если Σ – связный собственный подграф графа Γ, такой, что $\Gamma_1 \leq \Sigma$, то $\Sigma = \Gamma_1$. Таким образом, не существует ***связного*** *собственного* подграфа графа Γ, который ‘больше’, чем Γ_1.

Пути и циклы

Компоненты графа – это его связные ‘куски’.

В частности, связный граф имеет только одну компоненту.

Разложение графа на связные компоненты часто бывает очень полезным.

Обычно проще доказывать результаты для связных графов, а потом переносить доказанные свойства на произвольные графы, рассматривая по очереди все их связные компоненты.

Пути и циклы

- Имеется альтернативный способ определения компонент графа Γ.

Определим отношение R на V_Γ следующим образом:

vRw тогда и только тогда, когда v и w можно соединить путем в Γ.

Если трактовать пустой путь как путь, не содержащий ребер, то легко видеть, что R является отношением эквивалентности.

Пути и циклы

- vRw тогда и только тогда, когда v и w можно соединить путем в Γ.

? R является отношением эквивалентности.

Пути и циклы

- Единственная трудность состоит в ***доказательстве транзитивности отношения*** $\boldsymbol{R}$.

Если P – путь из u в v, а Q – путь из v в w, тогда последовательность ребер ‘путь P, за которым следует путь Q’ – это последовательность ребер из u в w. Однако, эта последовательность ребер может и не быть путем, так пути P и Q могут состоять из одинаковых ребер.

В этом случае из последовательности ребер следует удалить некоторые ребра, чтобы построить искомый путь из u в w. ■

Пути и циклы

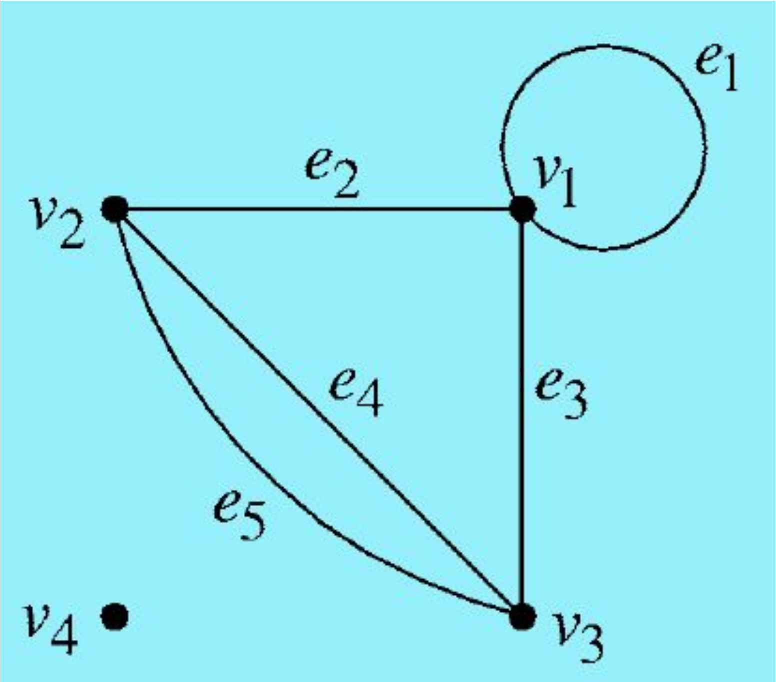
- vRw **тогда и только тогда, когда** v **и** w **можно соединить путем в** Γ.

Пусть $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ – разбиение множества вершин графа Γ на классы эквивалентности относительно R.

Построим подграфы Γ_i с множествами вершин V_i, ребрами которых являются те ребра графа Γ, которые соединяют вершины из множества V_i.

Эти подграфы Γ_i являются компонентами графа Γ.

Пути и циклы



- **Пример**

Граф, изображенный на рисунке, имеет две компоненты, одна из которых является нулевым графом с множеством вершин $\{v_4\}$.

Пути и циклы

- **Пример**

Часто по диаграмме графа Γ легко определить число его компонент. Однако, так бывает не всегда.

Например, оба графа, изображенные на рисунке, имеют две компоненты, хотя для графа (b) это не столь очевидно.