Лекция N13

Лектор: доц. Лаптева Надежда Александровна

Тема: Правило Лопиталя

Правило Лопиталя используется для раскрытия неопределенностей

$$\left(\frac{0}{0}\right) \text{ или } \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Теорема. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ - функции, дифференцируемые в некотором полуинтервале $(a,b]$, причем $\varphi'(x) \neq 0$.

Пусть при $x \to a+$ обе эти функции стремятся к нулю, или обе стремятся к бесконечности.

В таком случае

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Примеры.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}5\cos 5x=5.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Неопределенность вида $\left(\infty-\infty\right)$

3) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\sec x-\operatorname{tg}x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

Неопределенность вида $\left(0\cdot\infty\right)$

4) $$\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0.$$

Неопределенности вида $\left(1^{\infty}\right),\left(0^{0}\right),\left(\infty^{0}\right)$

5) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+x^{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\infty^{0}\right).$$

$$1+x^{2}\to+\infty;$$

$$\frac{1}{x}\to 0.$$

Обозначим $y=\left(1+x^{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$

Логарифмируя, находим

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right) = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}.$$

Так как при $x \to +\infty$ **числитель и знаменатель стремятся к бесконечности,**

то получаем неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right).$

Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{1} = 0.$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln y = \ln\left(\lim\limits_{x\to\infty} y\right)$ **, то**

$\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} y\right) = 0.$ **Следовательно,** $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1.$

Итак, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}} = 1.$

Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке $[a,b]$.

1. Находим все критические точки функции в интервале (a,b) и вычисляем в них значения функции.

2. Вычисляем значения функции на концах отрезка $[a,b]$.

3. Из всех значений выбираем наибольшее и наименьшее.

<u>Пример.</u> Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x$ **на отрезке** $[-3, 2]$.

Находим критические точки функции в интервале $(-3, 2)$ **:**

$$f'(x) = 3x^2 - 3; \qquad 3x^2 - 3 = 0;$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Находим значения функции в этих точках:

$$f(-1) = 2, \qquad f(1) = -2.$$

Вычисляем значения на концах отрезка:

$$f(-3) = -27 + 9 = 18,$$

$$f(2) = 8 - 6 = 2.$$

$$y_{\text{наиб}} = 2; \quad y_{\text{наим}} = -18.$$

<u>Пример.</u> Построить график функции

$$y(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

1) Область определения: $x > 0.$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

2) Так как в точке $x = 0$ **функция имеет бесконечный разрыв, то прямая** $x = 0$ **(ось** Oy **) является асимптотой.**

Найдем наклонную асимптоту.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0,$$

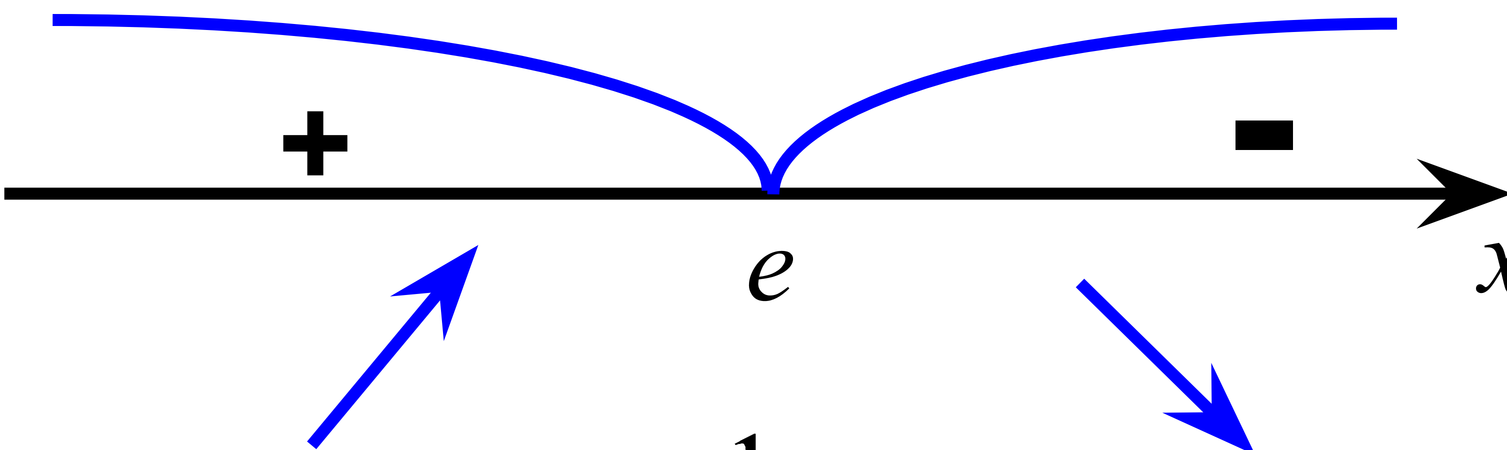
$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

(при нахождении пределов мы воспользовались правилом Лопиталя)

Итак, $k=b=0$ **и** $y=0$ **- горизонтальная асимптота.**

3) **Находим** $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

$$1-\ln x=0;\qquad \ln x=1;\qquad x=e.$$



$$y_{\max}=\frac{1}{e}\approx 0{,}37.$$

4) Находим

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\cdot(1-\ln x)}{x^4}=$$

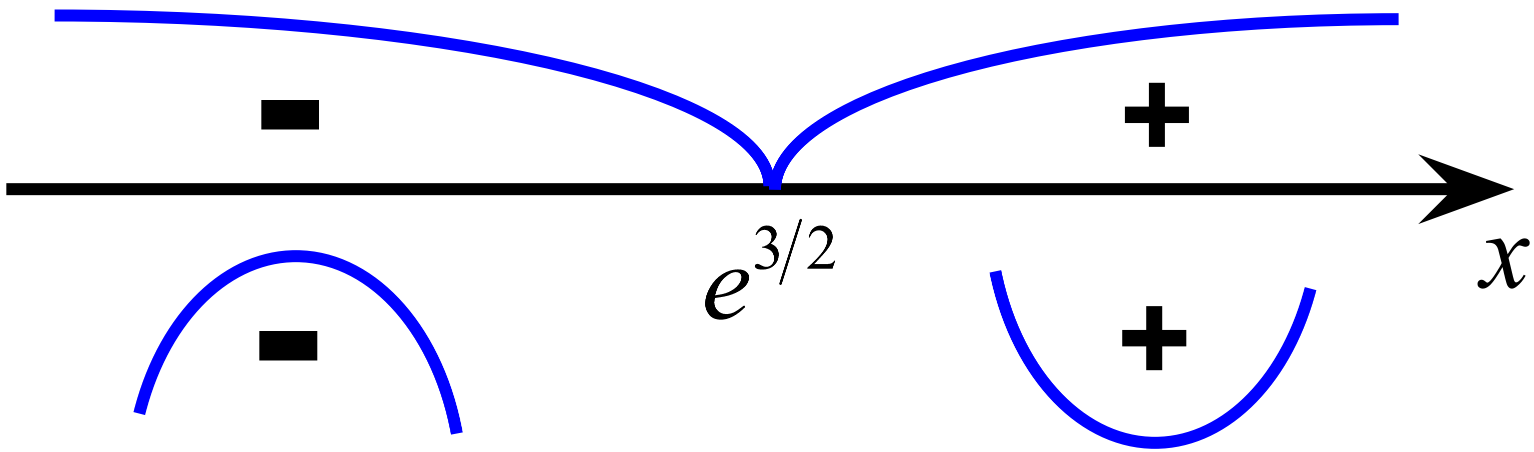
$$=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-1-2(1-\ln x)}{x^3}=$$

$$=\frac{2\ln x-3}{x^3}.$$

$$f''(x) = 0; \quad 2\ln x - 3 = 0;$$

$$\ln x = \frac{3}{2}; \qquad x = e^{3/2}.$$

Определяем знак $f''(x)$.



Точка перегиба $y = \dfrac{3}{2e^{3/2}} \approx 0{,}33.$

Строим график функции