

Математические основы теории надежности

Носачев Сергей Викторович

Ст. преподаватель кафедры «АПП»

а. 297

Nosachev-s@yandex.ru



Выхо
д

Содержание

- Литература

- Основные понятия надежности. Классификация отказов. Составляющие надежности
- Количественные показатели безотказности
- Показатели безотказности
- Уравнение связи показателей надежности
- Математические модели теории надежности
- Нормальный закон распределения наработки до отказа
- Законы распределения наработки до отказа



- Надежность систем. Общие понятия и определения
- Надежность основной системы
- Надежность систем с нагруженным резервированием
- Надежность систем с ненагруженным резервированием
- Надежность систем с облегченным и со скользящим резервом



Литература:

1. Байхельт Ф., Франкен П. «Надежность и техническое обслуживание. Математический подход», 1988.
2. Барлоу Р., Прошан Ф. «Математическая теория надежности», 1969.
3. Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К. и др. «Вопросы математической теории надежности», 1983 г.
4. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. «Математические методы в теории надежности» 1965 г.



Введение

Непрерывное совершенствование и развитие техники характеризуется широким использованием различных технических систем во всех сферах автоматизации, управления и промышленного производства.

В связи с этим проблема **надежности** технических систем продолжает оставаться одной из главных проблем.



Надежность является **внутренним свойством системы**.

Уровень надежности устанавливается на этапе проектирования, и на последующих этапах его нельзя повысить без внесения изменений в основную конструкцию.

На этапе проектирования определяется структура системы, которая также влияет на уровень надежности и определяет затраты, необходимые для достижения этого уровня.



**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ
НАДЕЖНОСТИ.
КЛАССИФИКАЦИЯ
ОТКАЗОВ.
СОСТАВЛЯЮЩИЕ
НАДЕЖНОСТИ**



- **Надежность** - свойство объекта выполнять заданные функции, сохраняя во времени и в заданных пределах значения установленных эксплуатационных показателей.
- **Объект** - техническое изделие определенного целевого назначения, рассматриваемое в периоды проектирования, производства, испытаний и эксплуатации. Объектами могут быть различные системы и их элементы
- **Элемент** - простейшая составная часть изделия, в задачах надежности может состоять из многих деталей.
- **Система** - совокупность совместно действующих элементов, предназначенная для самостоятельного выполнения заданных функций.

Понятия элемента и системы трансформируются в зависимости от поставленной задачи. Например, станок, при установлении его собственной надежности рассматривается как система, состоящая из отдельных элементов - механизмов, деталей и т.п., а при изучении надежности технологической линии - как элемент.



- Надежность объекта характеризуется следующими основными **состояниями** и **событиями**
- **Исправность** - состояние объекта, при котором он соответствует всем требованиям, установленным нормативно-технической документацией (НТД).
- **Работоспособность** - состояние объекта, при котором он способен выполнять заданные функции, сохраняя значения основных параметров, установленных НТД.
Основные параметры характеризуют функционирование объекта при выполнении поставленных задач.

Понятие **исправности** шире, чем понятие **работоспособности**. Работоспособный объект обязан удовлетворять лишь тем требованиям НТД, выполнение которых обеспечивает нормальное применение объекта по назначению. Таким образом, если объект неработоспособен, то это свидетельствует о его неисправности. С другой стороны, если объект неисправен, то это не означает, что он неработоспособен.



- **Предельное состояние** - состояние объекта, при котором его применение по назначению недопустимо или нецелесообразно.

Применение (использование) объекта по назначению прекращается в следующих случаях:

- при неустранимом нарушении безопасности;
- при неустранимом отклонении величин заданных параметров;
- при недопустимом увеличении эксплуатационных расходов.

Для некоторых объектов предельное состояние является последним в его функционировании, т.е. объект снимается с эксплуатации, для других - определенной фазой в эксплуатационном графике, требующей проведения ремонтно-восстановительных работ.



В связи с этим, объекты могут быть:

- **невосстанавливаемые**, для которых работоспособность в случае возникновения отказа, не подлежит восстановлению;
- **восстанавливаемые**, работоспособность которых может быть восстановлена, в том числе и путем замены.

К числу невосстанавливаемых объектов можно отнести, например: подшипники качения, полупроводниковые изделия, зубчатые колеса и т.п.

Объекты, состоящие из многих элементов, например, станок, автомобиль, электронная аппаратура, являются восстанавливаемыми, поскольку их отказы связаны с повреждениями одного или немногих элементов, которые могут быть заменены.



- В ряде случаев один и тот же объект в зависимости от особенностей, этапов эксплуатации или назначения может считаться восстанавливаемым или невосстанавливаемым.
- **Отказ** - событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта.
- **Критерий отказа** - отличительный признак или совокупность признаков, согласно которым устанавливается факт возникновения отказа.



Классификация и характеристики ОТКАЗОВ

По *типу* отказы подразделяются на:

- **отказы функционирования** (выполнение основных функций объектом прекращается, например, поломка зубьев шестерни);
- **отказы параметрические** (некоторые параметры объекта изменяются в недопустимых пределах, например, потеря точности станка).

По своей *природе* отказы могут быть:

- **случайные**, обусловленные непредусмотренными перегрузками, дефектами материала, ошибками персонала или сбоями системы управления и т. п.;
- **систематические**, обусловленные закономерными и неизбежными явлениями, вызывающими постепенное накопление повреждений: усталость, износ, старение, коррозия и т.п.



Основные признаки классификации отказов:

- характер возникновения;
- причина возникновения;
- характер устранения;
- последствия отказов;
- дальнейшее использование объекта;
- легкость обнаружения;
- время возникновения.



Характер возникновения:

- *внезапный отказ* - отказ, проявляющийся в резком (мгновенном) изменении характеристик объекта;
- *постепенный отказ* - отказ, происходящий в результате медленного, постепенного ухудшения качества объекта.
- Внезапные отказы обычно проявляются в виде механических повреждений элементов (трещины - хрупкое разрушение, пробои изоляции, обрывы и т. п.) и не сопровождаются предварительными видимыми признаками их приближения. Внезапный отказ характеризуется независимостью момента наступления от времени предыдущей работы.
- Постепенные отказы - связаны с износом деталей и старением материалов.



Причина возникновения:

- *конструкционный отказ*, вызванный недостатками и неудачной конструкцией объекта;
- *производственный отказ*, связанный с ошибками при изготовлении объекта по причине несовершенства или нарушения технологии;
- *эксплуатационный отказ*, вызванный нарушением правил эксплуатации.

Характер устранения:

- *устойчивый отказ*
- *перемежающийся отказ* (возникающий/исчезающий),
- последствия отказа:
 - *легкий отказ* (легкоустраняемый);
 - *средний отказ* (не вызывающий отказы смежных узлов - вторичные отказы);
 - *тяжелый отказ* (вызывающий вторичные отказы или приводящий к угрозе жизни и здоровью человека).

Дальнейшее использование объекта:

- *полные отказы*, исключающие возможность работы объекта до их: устранения;
- *частичные отказы*, при которых объект может частично использоваться.

Легкость обнаружения:

- *очевидные (явные) отказы*;
- *скрытые (неявные) отказы*.

Время возникновения:

- *прирабочные отказы*, возникающие в начальный период эксплуатации;
- *отказы при нормальной эксплуатации*;
- *износосвые отказы*, вызванные необратимыми процессами износа деталей, старения материалов и пр.



Составляющие надежности

Надежность является *КОМПЛЕКСНЫМ* свойством, включающим в себя в зависимости от назначения объекта или условий его эксплуатации *ряд простых свойств*:

- *безотказность*;
- *долговечность*;
- *ремонтпригодность*;
- *сохраняемость*.
- **Безотказность** - свойство объекта непрерывно сохранять работоспособность в течение некоторой наработки или в течение некоторого времени.
- **Наработка** - продолжительность или объем работы объекта, измеряемая в любых неубывающих величинах (единица времени, число циклов нагружения, километры пробега и т. п.).



- **Долговечность** - свойство объекта сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов.
- **Ремонтопригодность** - свойство объекта, заключающееся в его приспособленности к предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов, поддержанию и восстановлению работоспособности путем проведения ремонтов и технического обслуживания.
- **Сохраняемость** - свойство объекта непрерывно сохранять требуемые эксплуатационные показатели в течение (и после) срока хранения и транспортирования.
- В зависимости от объекта надежность может определяться всеми перечисленными свойствами или частью их. Например, надежность колеса зубчатой передачи, подшипников определяется их долговечностью, а станка - долговечностью, безотказностью и ремонтопригодностью.



Основные показатели надежности

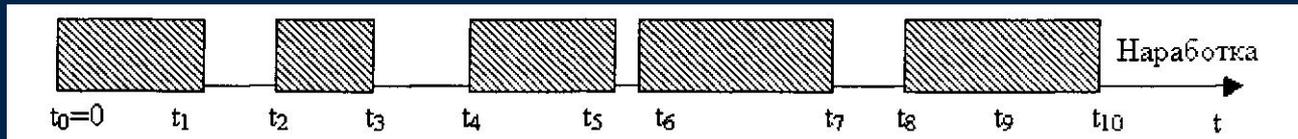
Показатель надежности количественно характеризует, в какой степени данному объекту присущи определенные свойства, обуславливающие надежность. Одни показатели надежности (например, технический ресурс, срок службы) могут иметь размерность, ряд других (например, вероятность безотказной работы, коэффициент готовности) являются безразмерными.

- **Технический ресурс** - наработка объекта от начала его эксплуатации или возобновления эксплуатации после ремонта до наступления предельного состояния. Строго говоря, технический ресурс может быть регламентирован следующим образом: до среднего, капитального, от капитального до ближайшего среднего ремонта и т. п. Если регламентация отсутствует, то имеется в виду ресурс от начала эксплуатации до достижения предельного состояния после всех видов ремонтов.
- Для невосстанавливаемых объектов понятия технического ресурса и наработки до отказа совпадают.



- **Назначенный ресурс** - суммарная наработка объекта, при достижении которой эксплуатация должна быть прекращена независимо от его состояния.
- **Срок службы** - календарная продолжительность эксплуатации (в том числе, хранение, ремонт и т. п.) от ее начала до наступления предельного состояния.

На рис. приведена графическая интерпретация перечисленных показателей, при этом:



$t_0=0$ - начало эксплуатации;

t_1, t_5 - моменты отключения по технологическим причинам;

t_2, t_4, t_6, t_8 - моменты включения объекта;

t_3, t_7 - моменты вывода объекта в ремонт, соответственно, средний и капитальный;

t_9 - момент прекращения эксплуатации;

t_{10} - момент отказа объекта.

Технический ресурс (наработка до отказа)

$$TP = t_1 + (t_3 - t_2) + (t_5 - t_4) + (t_7 - t_6) + (t_{10} - t_8)$$

Назначенный ресурс

$$TH = t_1 + (t_3 - t_2) + (t_5 - t_4) + (t_7 - t_6) + (t_9 - t_8)$$

Срок службы объекта

$$TC = t_{10}$$

Для большинства объектов электромеханики в качестве критерия долговечности чаще всего используется технический ресурс.



**КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ
ПОКАЗАТЕЛИ
БЕЗОТКАЗНОСТИ:
ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ.
ОСНОВНЫЕ
СВЕДЕНИЯ ИЗ
ТЕОРИИ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ**



Наиболее важные показатели надежности невосстанавливаемых объектов - *показатели безотказности*, к которым относятся:

- *вероятность безотказной работы;*
- *плотность распределения отказов;*
- *интенсивность отказов;*
- *средняя наработка до отказа.*

Показатели надежности представляются в двух формах (определениях):

- статистическая (выборочные оценки);
- вероятностная.



Статистические определения (выборочные оценки) показателей получаются по результатам испытаний на надежность.

Допустим, что в ходе испытаний какого-то числа однотипных объектов получено конечное число интересующего нас параметра - наработки до отказа.

Полученные числа представляют собой выборку некоего объема из общей «генеральной совокупности», имеющей неограниченный объем данных о наработке до отказа объекта.

Количественные показатели, определенные для «генеральной совокупности», являются *истинными (вероятностными) показателями*, поскольку объективно характеризуют случайную величину - наработку до отказа.

Показатели, определенные для выборки, и, позволяющие сделать какие-то выводы о случайной величине, являются *выборочными (статистическими) оценками*. Очевидно, что при достаточно большом числе испытаний (большой выборке) оценки *приближаются* к вероятностным показателям.

Вероятностная форма представления показателей удобна при аналитических расчетах, а статистическая - при экспериментальном исследовании надежности.

Для обозначения статистических оценок будем использовать знак "сверху.

Примем следующую **схему испытаний** для оценки надежности. Пусть на испытания поставлено N одинаковых серийных объектов. Условия испытаний идентичны, а испытания каждого из объектов проводятся до его отказа. Введем следующие обозначения:

$T = \{0, t_1 \dots t_N\} = \{t\}$ — случайная величина наработки объекта до отказа;

$N(t)$ - число объектов, работоспособных к моменту наработки t ;

$n(t)$ - число объектов, отказавших к моменту наработки t ;

$\Delta n(t, t + \Delta t)$ - число объектов, отказавших в интервале наработки $[t, t + \Delta t]$;

Δt - длительность интервала наработки.

Поскольку в дальнейшем определение выборочных оценок базируется на математических моделях теории вероятностей и математической статистики, то ниже приводятся основные (минимально необходимые) сведения из теории вероятностей.

Более подробный материал из теории вероятностей читатель может получить в Приложении: «Основные понятия и краткие сведения из теории вероятностей».



Основные сведения о математических моделях расчета в теории вероятностей

Одним из основных понятий является - случайное событие.

Событием называется всякий факт (исход), который в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти.

Каждому из таких событий можно поставить в соответствие определенное число, называемое его **вероятностью** и являющееся мерой возможного совершения этого события.

Теория вероятностей основывается на аксиоматическом подходе и опирается на понятия теории множеств.

Множество - это любая совокупность объектов произвольной природы, каждый из которых называется элементом множества.

- Предположим, что производится некоторый опыт (испытание), результат которого заранее неизвестен. Тогда *множество* Ω всех возможных исходов опыта представляет пространство элементарных событий, а каждый его элемент $\alpha \in \Omega$ (отдельный исход опыта) является *элементарным событием*. Любой набор элементарных событий (любое их сочетание) считается *подмножеством* (частью) множества Ω и является *случайным событием*, т. е. любое событие A - это подмножество множества Ω : $A \subset \Omega$.
- В общем случае, если множество Ω содержит n элементов, то в нем можно выделить 2^n подмножеств (событий).



- **Совместные (несовместные) события** - такие события, появление одного из которых не исключает (исключает) возможности появления другого.
- **Зависимые (независимые) события** - такие события, появление одного из которых влияет (не влияет) на появление другого события.
- **Противоположное событие** относительно некоторого выбранного события A - событие, состоящее в не появлении этого выбранного события (обозначается \bar{A}).
- **Полная группа событий** - такая совокупность событий, при которой в результате опыта должно произойти хотя бы одно из событий этой совокупности.



Аксиомы теории вероятностей

- Вероятность события A обозначается $P(A)$ или $P\{A\}$. Вероятность выбирают так, чтобы она удовлетворяла следующим условиям или аксиомам:

$$P(\Omega) = 1; \quad P(\emptyset) = 0. \quad (1)$$

$$P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) \quad (2)$$

- Если A_i и A_j несовместные события, т. е. $A_i \wedge A_j = \emptyset$, то

$$P(A_i \vee A_j) = P(A_i) + P(A_j) \quad (3)$$

- Где \vee - знак логического сложения событий, \emptyset - пустое множество (отсутствие событий).
- Аксиома (3) обобщается на любое число несовместных событий $\{A_i\}_{i=1}^n$:

$$P \left\{ \bigcap_{i=1}^n A_i \right\} = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (4)$$

- **Частотное определение вероятности любого события A :**

$$P(A) = \frac{m_A}{n} \quad (5)$$

- представляет отношение числа случаев (m_A), благоприятных появлению события A , к общему числу случаев (возможному числу исходов опыта) n .
- При неограниченном возрастании числа n наблюдается статистическое упорядочение, когда частота события A (выборочная оценка) все меньше изменяется и приближается к постоянному значению - **вероятности события A** .

Основные правила теории вероятностей

- *Теорема сложения вероятностей.*
- Если A_1, A_2, \dots, A_n - несовместные события и A - сумма этих событий, то вероятность события A равна сумме вероятностей событий A_1, A_2, \dots, A_n :

$$P(A) = P\left\{\bigvee_{i=1}^n A_i\right\} = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (6)$$

- Поскольку противоположные события A и \bar{A} несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (7)$$

▣ **Теорема умножения вероятностей.**

Вероятность произведения двух событий A_1 и A_2 равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, в предположении, что первое событие произошло:

$$P(A_1 \wedge A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1 | A_2) \quad (8)$$

где условная вероятность события A_1 при наступлении события A_2 – вероятность события A_1 , вычисленная в предположении, что событие A_2 произошло:

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cdot A_2)}{P(A_2)} \quad (9)$$

Для любого конечного числа событий теорема умножения имеет вид

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^n A_i\right\} = P(A_1 | A_2 \dots A_n) \cdot P(A_2 | A_3 \dots A_n) \cdot \dots \cdot P(A_{n-1} | A_n) \cdot P(A_n). \quad (10)$$

- Если события A_1 и A_2 независимы, то соответствующие условные вероятности

$$P(A_1 | A_2) = P(A_1); \quad P(A_2 | A_1) = P(A_2),$$

- поэтому теорема умножения вероятностей (8) принимает вид

$$P(A_1 \wedge A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2), \quad (11)$$

- а для конечного числа n независимых событий

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^n A_i\right\} = \prod_{i=1}^n P\{A_i\}. \quad (12)$$

Следствия основных теорем

- Следствия основных теорем - формула полной вероятности (ФПВ) и формула Байеса находят широкое применение при решении большого числа задач.

▣ **Формула полной вероятности.**

Если по результатам опыта можно сделать n исключающих друг друга предположений (гипотез) H_1, H_2, \dots, H_n , представляющих

полную группу несовместных событий (для которой $\sum_i P(i) = 1$), то вероятность события A , которое может появиться только с одной из этих гипотез, определяется:

$$P(A) = P(H_i) \cdot P(A | H_i), \quad (13)$$

где $P(H_i)$ - вероятность гипотезы H_i ;

$P(A | H_i)$ - условная вероятность события A при гипотезе H_i .

Поскольку событие A может появиться с одной из гипотез H_1, H_2, \dots, H_n , то $A = AH_1 \vee AH_2 \vee \dots \vee AH_n$, но H_1, H_2, \dots, H_n несовместны, поэтому

$$P(A) = P(A \wedge H_1) + \dots + P(A \wedge H_n) = \sum_{i=1}^n P(A \cdot H_i)$$

При зависимости события A от появления гипотезы H_i

$$P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A | H_i),$$
 откуда и следует выражение (13).

▣ **Формула Байеса (формула вероятностей гипотез).**

Если до опыта вероятности гипотез H_1, H_2, \dots, H_n были равны

$P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, а в результате опыта произошло событие A , то новые (условные) вероятности гипотез вычисляются:

$$P(A | H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{P(A)}. \quad (14)$$

Доопытные (первоначальные) вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, называются **априорными**, а послеопытные- $P(H_1 | A), \dots, P(H_n | A)$ - **апостериорными**.

Формула Байеса позволяет «пересмотреть» возможности гипотез с учетом полученного результата опыта.

Если после опыта, давшего событие A , проводится еще один опыт, в результате которого может произойти или нет событие A_1 , то условная вероятность этого последнего события вычисляется по (13), в которую входят не прежние вероятности гипотез $P(H_i)$, а новые $P(H_i | A)$:

$$P(A_1 | A) = \sum_{i=1}^n P(H_i | A) \cdot P(A_1 | H_i A). \quad (16)$$

Выражение (16) называют **формулой для вероятностей будущих событий**.

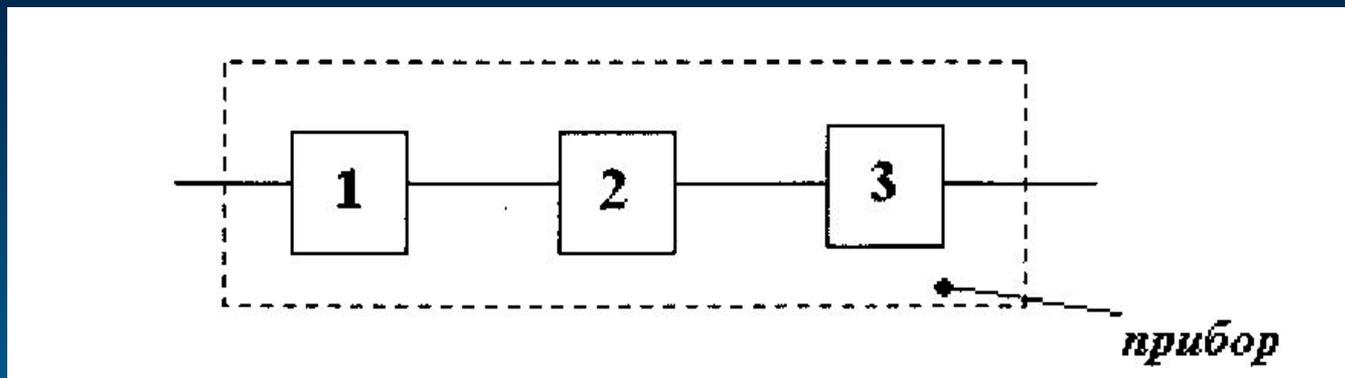
Контрольные вопросы и задачи:

- 1. Перечислите показатели безотказности объекта и поясните, чем отличаются статистическая (выборочные оценки) и вероятностная форма (определения)?
- 2. Поясните «схему испытаний» объекта при определении выборочных оценок показателей безотказности?
- 3. Дайте определение «оценки» вероятности события и объясните условие сходимости оценки и вероятности события?
- 4. Перечислите и поясните основные аксиомы вероятности?
- 5. Перечислите и поясните смысл основных правил (теорем) теории вероятностей?
- 6. Назовите следствия основных теорем теории вероятностей?

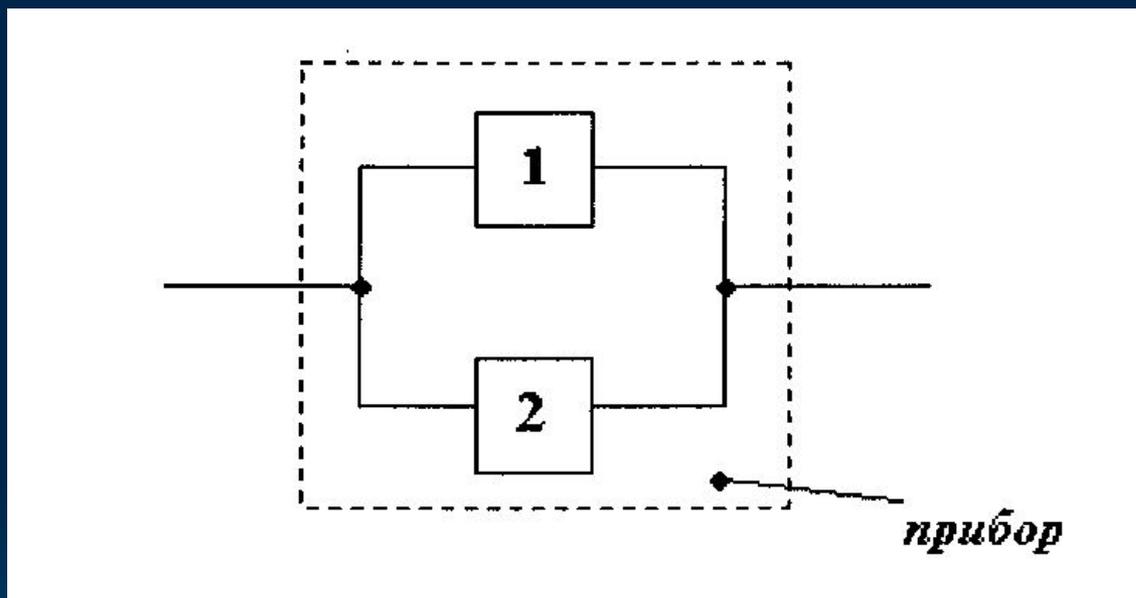


- 7. Прибор может работать в двух режимах: «1» и «2». Режим «1» наблюдается в 80% случаев, режим «2» - в 20% случаев за время работы T . Вероятность того, что прибор откажет при работе в режиме «1» равна 0.1, а вероятность отказа прибора в режиме «2» - 0.7. Найти вероятность отказа прибора за время T ?

- 8. Прибор состоит из 3-х блоков, которые независимо друг от друга могут отказаться. Отказ каждого из блоков приводит к отказу всего прибора. Вероятность того, что за время T работы прибора откажет первый блок, равна 0.2, второй - 0.1, третий - 0.3. Найти вероятность того, что за время T прибор проработает безотказно?



- 9. Прибор состоит из 2-х блоков, дублирующих друг друга. Вероятность того, что за время T каждый из блоков проработает безотказно, равна 0.9. Отказ прибора произойдет при отказе обоих блоков. Найти вероятность того, что за время T прибор проработает безотказно?



ПОКАЗАТЕЛИ БЕЗОТКАЗНОСТИ

- вероятность безотказной работы,
- вероятность отказа,
- плотность распределения (частота) отказов,
- ИНТЕНСИВНОСТЬ ОТКАЗОВ



Вероятность безотказной работы (ВБР)

Статистическая оценка ВБР (эмпирическая функция надежности) определяется:

$$\hat{P}(t) = \frac{N(t)}{N}, \quad (1)$$

отношением числа $N(t)$ объектов, безотказно проработавших до момента наработки t , к числу объектов, исправных к началу испытаний ($t = 0$) - к общему числу объектов N .

Оценку ВБР можно рассматривать как показатель доли работоспособных объектов к моменту наработки t .

Поскольку $N(t) = N - n(t)$, то ВБР по (1)

$$\hat{P}(t) = 1 - \frac{n(t)}{N} = 1 - \hat{Q}(t), \quad (2)$$

Где $\hat{Q}(t) = \frac{n(t)}{N}$ - *оценка вероятности отказа* (ВО).

В статистическом определении оценка ВО представляет эмпирическую функцию распределения отказов.

Так как события, заключающиеся в наступлении или не наступлении отказа к моменту наработки t , являются противоположными, то.

$$\hat{P}(t) + \hat{Q}(t) = 1 \quad (3)$$

Нетрудно убедиться, что ВБР является убывающей, а ВО - возрастающей функцией наработки.

В момент начала испытаний $t = 0$ число работоспособных объектов равно общему их числу $N(t) = N(0) = N$, а число отказавших –

$n(t) = n(0) = 0$, поэтому $\hat{P}(t) = \hat{P}(0) = 1$, а $\hat{Q}(t) = \hat{Q}(0) = 0$;

При наработке $t \rightarrow \infty$ все объекты, поставленные на испытания, откажут, т.е. $N(\infty) = 0$, а $n(\infty) = N$

Поэтому

$$\hat{Q}(t) = \hat{Q}(\infty) = 1$$

$$\hat{P}(t) = \hat{P}(\infty) = 0$$

Вероятностное определение ВБР

$$P(t) = P\{T \leq t\} \quad (4)$$

Таким образом, ВБР есть вероятность того, что случайная величина наработки до отказа T окажется не меньше некоторой заданной наработки t .

Очевидно, что ВО будет являться функцией распределения случайной величины T и представляет из себя вероятность того, что наработка до отказа окажется меньше некоторой заданной наработки t :

$$Q(t) = Q\{T < t\} \quad (5)$$



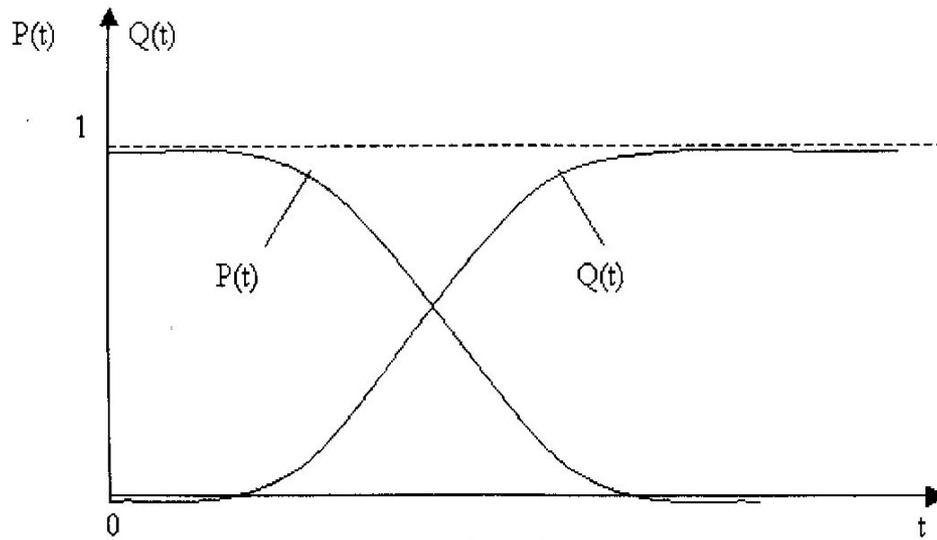


Рис. 1

В пределе, с ростом числа N (увеличение выборки) испытываемых объектов, $\hat{P}(t) \hat{Q}(t)$ сходятся по вероятности (приближаются по значениям) к $P(t)$ и $Q(t)$.

Сходимость по вероятности представляется следующим образом:

$$P \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} | P - \hat{P}(t) = 0 \right\} = 1 \quad (6)$$

Практический интерес представляет определение *ВБР* в *интервале наработки* $[t, t + \Delta t]$, при условии, что объект безотказно проработал до начала t интервала.

Определим эту вероятность, используя теорему умножения вероятностей, и выделив следующие события:

- ▢ $A = \{\text{безотказная работа объекта до момента } t\}$;
- ▢ $B = \{\text{безотказная работа объекта в интервале } \Delta t\}$;
- ▢ $C = AB = \{\text{безотказная работа объекта до момента } t + \Delta t\}$.

Очевидно $P(C) = P(AB) = P(A)P(B|A)$, поскольку события A и B будут зависимыми.

Условная вероятность $P(B|A)$ представляет ВБР $P(t, t + \Delta t)$ в интервале $[t, t + \Delta t]$, поэтому

$$P(B | A) = P(t, t + \Delta t) = \frac{P(C)}{P(A)} = \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)} \quad (7)$$

ВО в интервале наработки $[t, t + \Delta t]$, с учетом (7), равна:

$$Q(t, t + \Delta t) = 1 - P(t, t + \Delta t) = \frac{[P(t) - P(t + \Delta t)]}{P(t)} \quad (8)$$

Плотность распределения (частота) отказов (ПРО)

Статистическая оценка ПРО определяется отношением числа объектов $\Delta n(t, t + \Delta t)$, отказавших в интервале наработки $[t, t + \Delta t]$ к произведению общего числа объектов N на длительность интервала наработки Δt .

$$\hat{f}(t) = \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N \Delta t} \quad [\text{год}^{-1}], \quad (9)$$

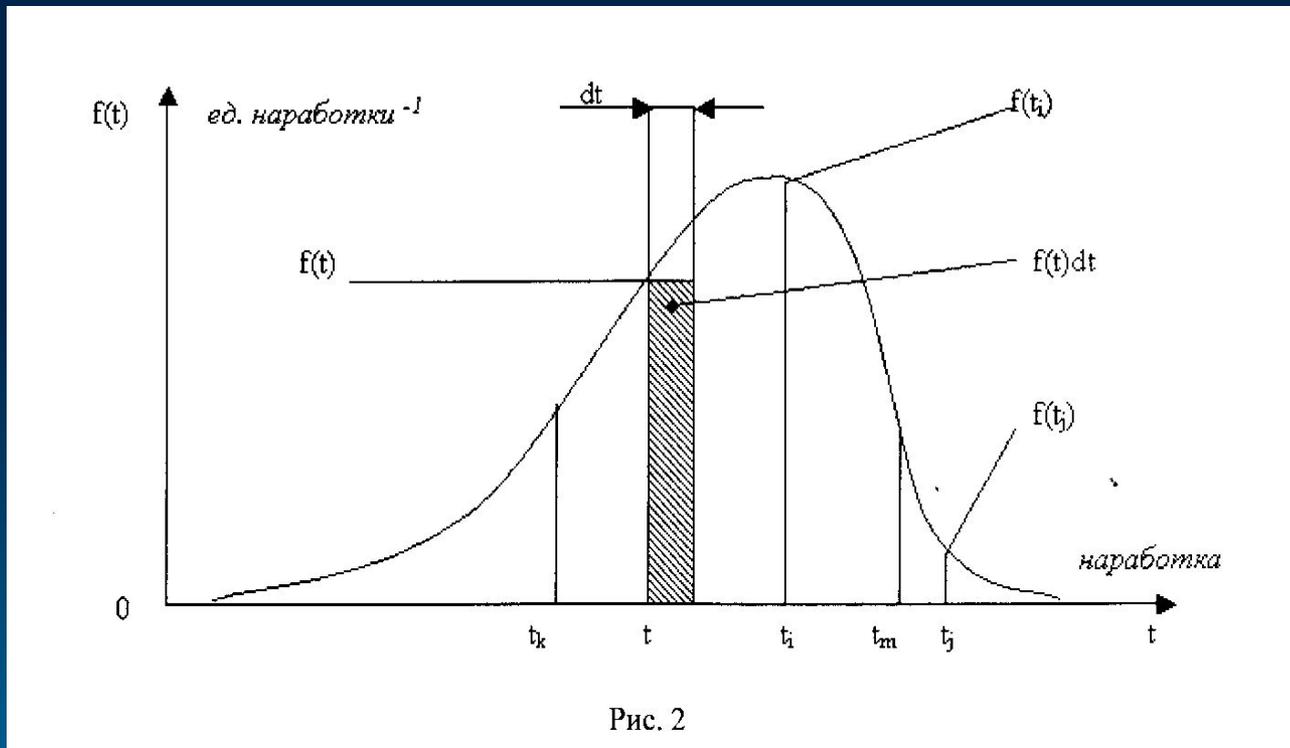
- Поскольку $\Delta n(t, t + \Delta t) = n(t + \Delta t) - n(t)$, где $n(t + \Delta t)$ - число объектов, отказавших к моменту наработки $t + \Delta t$, то оценку ПРО можно представить:

$$\hat{f}(t) = \frac{\Delta n(t, t + \Delta t) - n(t)}{N \Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [\hat{Q}(t + \Delta t) - \hat{Q}(t)] = \frac{\hat{Q}(t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (10)$$

где $Q(t, t + \Delta t)$ - оценка ВО в интервале наработки, т. е. приращение ВО за Δt .

Оценка ПРО представляет «частоту» отказов, т. е. число отказов за единицу наработки, отнесенное к первоначальному числу объектов.

Вероятностное определение ПРО следует из (10) при стремлении интервала наработки и увеличения объема выборки $N \rightarrow \infty$ ПРО по существу является плотностью распределения (плотностью вероятности) случайной величины T наработки объекта до отказа. Поскольку $Q(t)$ является неубывающей функцией своего аргумента, то $f(t) > 0$. Один из возможных видов графика $f(t)$ приведен на рис. 2.



Как видно из рис.2, ПРО $f(t)$ характеризует частоту отказов (или приведенную ВО), с которой распределяются конкретные значения наработок всех N объектов (t_1, \dots, t_N) , составляющие случайную величину наработки T до отказа объекта данного типа.

Допустим, в результате испытаний установлено, что значение наработки t_j присуще наибольшему числу объектов. О чем свидетельствует максимальная величина $f(t_j)$.

Напротив, большая наработка t_j была зафиксирована только у нескольких объектов, поэтому и частота $f(t_j)$ появления такой наработки на общем фоне будет малой.



Отложим на оси абсцисс некоторую наработку t и бесконечно малый интервал наработки шириной dt , примыкающий к t .

Тогда вероятность попадания случайной величины наработки T на элементарный участок шириной dt (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) равна:

$$P\{T \in (t, t + dt)\} = P\{t < T < (t + dt)\} \approx f(t)dt \quad (12)$$

где $f(t)dt$ - элемент ВО объекта в интервале $[t, t + dt]$ (геометрически это площадь заштрихованного прямоугольника, опирающегося на отрезок dt).



Аналогично вероятность попадания наработки T в интервал $[t_k, t_m]$ равна:

$$P\{T \in (t_k, t_m)\} \approx \sum_{t_i \in (t_k, t_m)} f(t_i) dt_i \approx \int_{t_k}^{t_m} f(t) dt, \quad (13)$$

что геометрически интерпретируется площадью под кривой $f(t)$, опирающейся на участок $[t_k, t_m]$.

ВО и ВБР можно выразить в функции ПРО.

Поскольку $Q(t) = P\{T < t\}$, то используя выражение (13), получим

$$Q(t) = P\{0 < T < t\} = P\{T \in (0, t)\} = \int_0^t f(t)dt, \quad (14)$$

расширение интервала слева до нуля вызвано тем, что T не может быть отрицательной.

Т.к.

$$P(t) = P\{T \geq t\},$$

То

$$P(t) = P\{t \leq T < \infty\} = \int_t^{\infty} f(t)dt \quad (15)$$

Очевидно, что $Q(t)$ представляет собой площадь под кривой $f(t)$ слева от t , а $P(t)$ - площадь под $f(t)$ справа от t . Поскольку все, полученные при испытаниях значения наработок лежат под кривой $f(t)$, то

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \int_0^t f(t)dt + \int_t^{\infty} f(t)dt = Q(t) + P(t) = 1. \quad (16)$$



3. Интенсивность отказов (ИО)

Статистическая оценка ИО определяется

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N(t) \Delta t} \cdot \frac{N}{N} \quad [\text{год}^{-1}], \quad (17)$$

отношением числа объектов $\Delta n(t, t + \Delta t)$, отказавших в интервале наработки $[t, t + \Delta t]$ к произведению числа $N(t)$ работоспособных объектов в момент t на длительность интервала наработки Δt .

Сравнивая (9) и (17) можно отметить, что ИО несколько полнее характеризует надежность объекта на момент наработки t , т. к. показывает частоту отказов, отнесенную к фактически работоспособному числу объектов на момент наработки t .

Вероятностное определение ИО получим, умножив и поделив правую часть выражения (17) на N

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N(t)\Delta t} \cdot \frac{N}{N} = \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N\Delta t} \cdot \frac{N}{N(t)}.$$

- С учетом (10), оценку ИО $\hat{\lambda}(t)$ можно представить

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\hat{Q}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\hat{P}(t)},$$

- Откуда при стремлении $\Delta t \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ получаем

$$\hat{\lambda}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{Q}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\hat{P}(t)} = \frac{dQ(t)}{dt} \cdot \frac{1}{P(t)} = \frac{f(t)}{P(t)}, \quad (18)$$

- Возможные виды изменения ИО $\lambda(t)$ приведены на рис.3

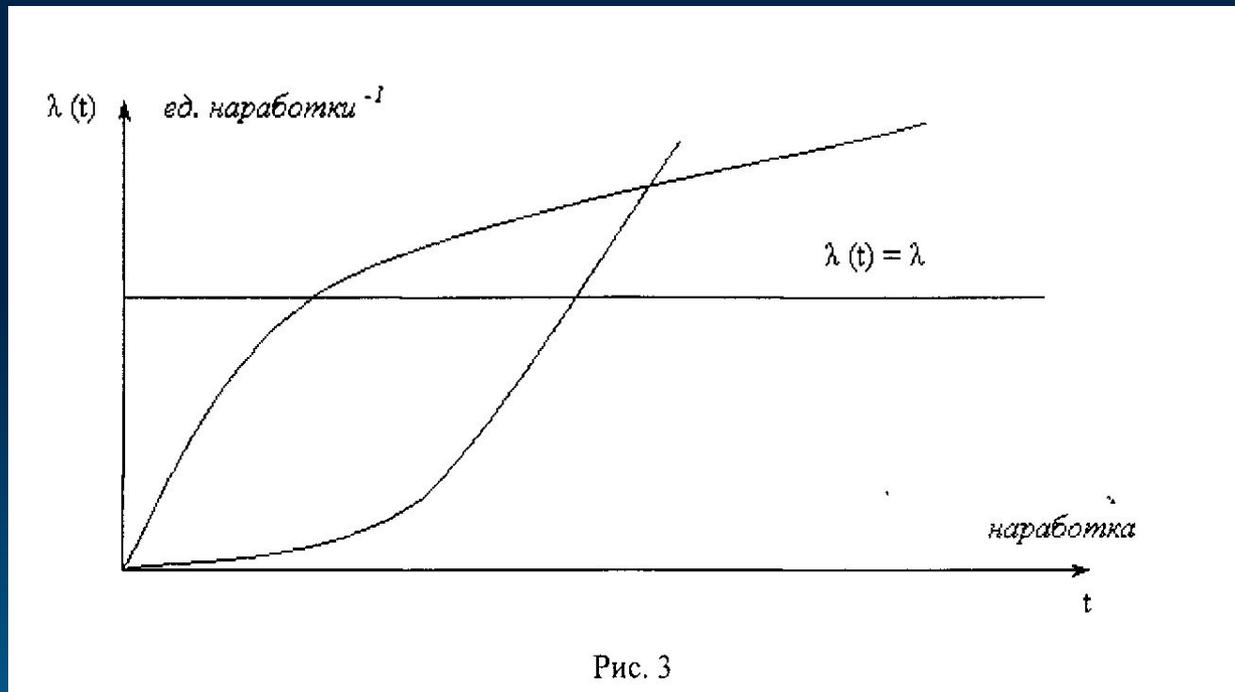


Рис. 3

Контрольные вопросы и задачи:

1. Перечислите показатели безотказности объекта и поясните в чем отличия статистических оценок от вероятностной формы их представления?
2. Дайте определение вероятности безотказной работы (ВБР) объекта и поясните ее смысл?
3. Чем отличается ВБР объекта к наработке t от ВБР в интервале наработки $[t, t + \Delta t]$?
4. Дайте определение плотности распределения отказов (ПРО) и поясните ее смысл при оценке надежности объекта?
5. Дайте графическую интерпретацию понятий ВБР и вероятности отказов (ВО)?
6. Дайте определение интенсивности отказов (ИО) и поясните ее смысл при оценке надежности объекта?



7. По результатам испытаний $N=100$ однотипных элементов определить показатели безотказности для заданных наработок t_i , если известно, что число отказавших элементов $n(t_i)$ к моментам наработки составляет:

| | |
|----------------------|---------------|
| $t_1 = 100\text{ч}$ | $n(t_1) = 5$ |
| $t_2 = 150\text{ч}$ | $n(t_2) = 8$ |
| $t_3 = 200\text{ ч}$ | $n(t_3) = 11$ |
| $t_4 = 250\text{ч}$ | $n(t_4) = 15$ |
| $t_5 = 300\text{ ч}$ | $n(t_5) = 21$ |

Построить графики расчетных показателей

$$\hat{P}(t_i), \hat{Q}(t_i), \hat{f}(t_i), \hat{\lambda}(t_i)?$$

