Задачи с экономическим содержанием

Задачи о вкладах и кредитовании

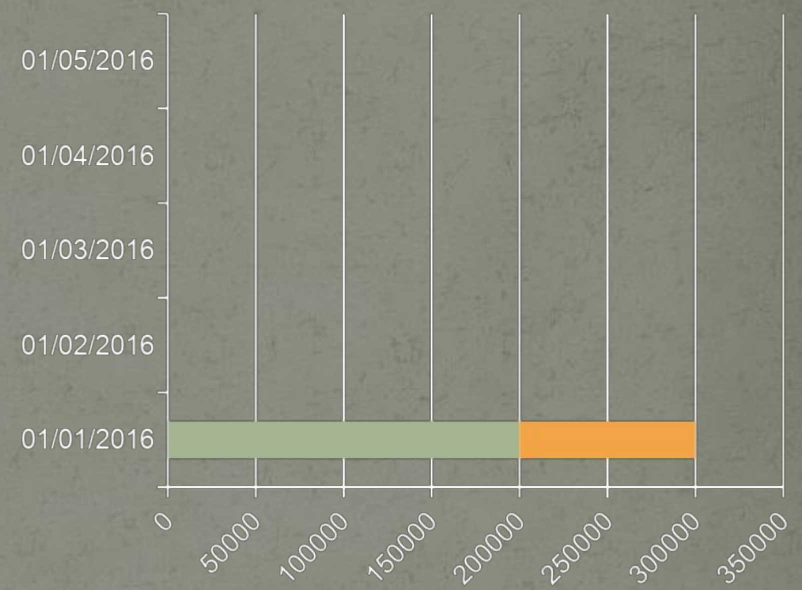
- Проценты по вкладам (депозитам)
- Проценты по кредитам

Задачи оптимизации производства товаов и услуг

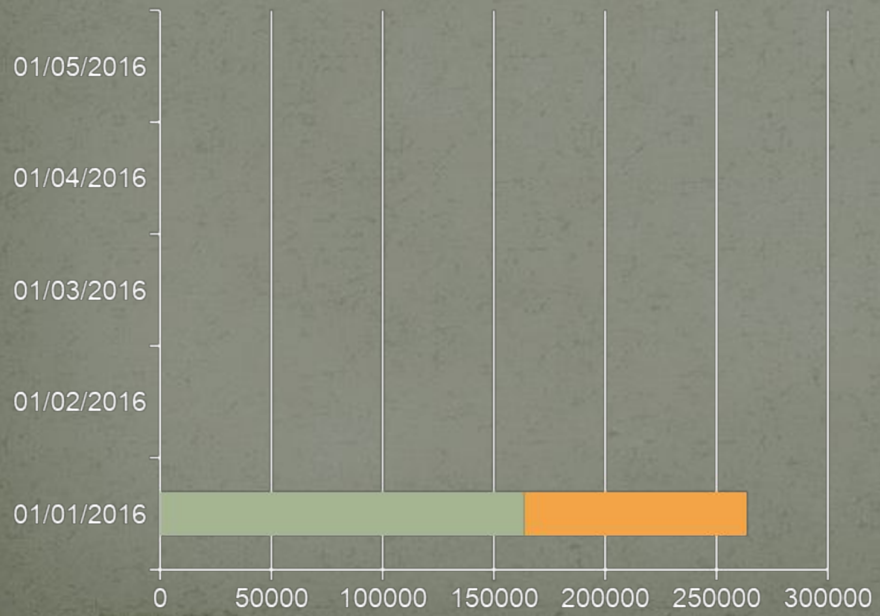
- Логический перебор в задачах оптимизации
- Линейные целевые функции с целочисленными точками экстремума
- Линейные целевые функции с нецелочисленными точками экстремума
- Нелинейные целевые функции с целочисленными точками экстремума
- Нелинейные целевые функции с нецелочисленными точками эстремума

Проценты по кредитам

Дифференцированные платежи



Аннуитетные платежи



Дифференцированные платежи

Пусть S_0 - сумма кредита; n – число платежей, равное числу платежных периодов; k% - годовой процент;

$\frac{S_0}{n}$ - фиксированная сумма

Рассчитаем проценты по кредиту:

$$w_1 = \frac{kS_0}{100};$$

$$w_2 = \left(S_0 - \frac{S_0}{n}\right)\cdot\frac{k}{100} = \frac{kS_0(n-1)}{100n};$$

$$w_3 = \left(S_0 - \frac{2S_0}{n}\right)\cdot\frac{k}{100} = \frac{kS_0(n-2)}{100n};$$

$$w_4 = \left(S_0 - \frac{3S_0}{n}\right)\cdot\frac{k}{100} = \frac{kS_0(n-3)}{100n};$$

$$w_n = \left(S_0 - \frac{(n-1)S_0}{n}\right)\cdot\frac{k}{100} = \frac{kS_0}{100n}.$$

Общая сумма w всех начисленных процентов (переплата) находится по формуле:

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n =$$

$$\frac{kS_0}{100} + \frac{kS_0(n-1)}{100n} + \frac{kS_0(n-2)}{100n} + \frac{kS_0(n-3)}{100n} + \ldots + \frac{kS_0}{100n} =$$

$$\frac{kS_0}{100n}\left(n + \left(n+1\right) + \left(n+2\right) + \left(n+3\right) + \ldots + 1\right) =$$

$$\frac{kS_0}{100n} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{kS_0(n+1)}{200}$$

$$S = S_0 + \frac{kS_0\left(n+1\right)}{200}$$

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:
-1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предудущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно. что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы взятой в кредит. Найдите r%

$$S = S_0 + \frac{kS_0(n+1)}{200}$$

$$S = S_0 + \frac{rS_0(19+1)}{200} = S_0 + \frac{20rS_0}{200} = S_0 + \frac{rS_0}{10} = S_0\left(1 + \frac{r}{10}\right)$$

$$S_0\left(1 + \frac{r}{10}\right) = 1{,}3S_0 \qquad 1 + \frac{r}{100} = 1{,}3 \qquad \frac{r}{100} = 0{,}3$$

$$r = 3\%$$

Аннуитетные платежи

Пусть S_0 - сумма кредита; n – число платежей, равное числу платежных периодов; k% - годовой процент;
X – сумма регулярного платежа
Пусть $m = 1 + \frac{k}{100}$

Запишем суммы долга по истечении каждого платёжного периода:

$$S_1 = S_0 + S_0 \frac{k}{100} - x = S_0\left(1 + \frac{k}{100}\right) - x = S_0 m - x;$$

$$S_2 = S_1 + S_1 \frac{k}{100} - x = S_1 m - x = (S_0 m - x)m - x = S_0 m^2 - xm - x;$$

$$S_3 = S_2 m - x = \left(S_0 m^2 - xm - x\right)m - x = S_0 m^3 - xm^2 - xm - x;$$

$$S_n = S_{n-1} m - x = S_0 m^n - xm^{n-1} - \ldots - xm - x;$$

$$S_n = 0 \Rightarrow S_0 m^n - xm^{n-1} - \ldots - xm - x = 0$$

$$S_0 m^n = xm^{n-1} + \ldots + xm + x$$

$$S_0 m^n = x\left(m^{n-1} + \ldots + m + 1\right)$$

$$S_0 m^n = x \frac{m^n - 1}{m - 1}$$

$$x = \frac{S_0 m^n (m-1)}{m^n - 1}$$

31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 11 028 930 рублей в кредит под 11% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 11%), затем Сергей переводит в банк x рублей. какова должна быть сумма x, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года).

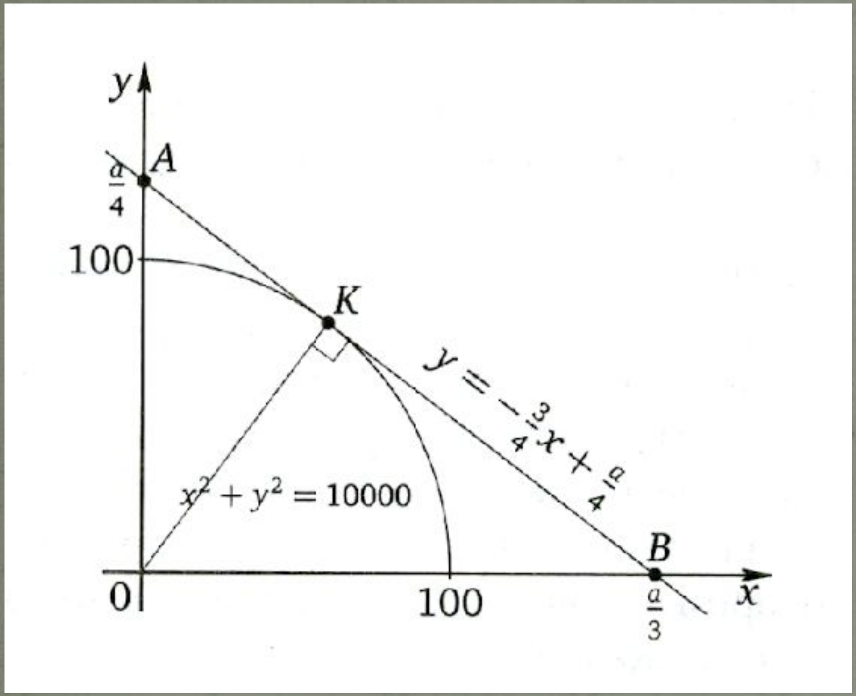
$$x = \frac{S_0 m^n (m-1)}{m^n - 1}$$

$$x = \frac{11028930 \cdot 1{,}11^3 (1{,}11 - 1)}{1{,}11^3 - 1} = 4513182{,}3(p)$$

Нелинейные целевые функции с целочисленными точками экстремума

Пример 17. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Пусть на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, y^2 часов. Тогда за неделю будет произведено 3x + 4y единиц товара, а затраты на оплату труда составят $500\left(x^2+y^2\right)$ рублей.



$$500\left(x^2+y^2\right)=5000000$$

$$x^2+y^2=10000,$$

$$0\le x\le 100, 0\le y\le 100$$

a = 3x + 4y – целевая функция

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{a}{4}$$

уравнение прямой, которая пересекает координатные оси в точках $A\left(0;\frac{a}{4}\right)$ и $B\left(\frac{a}{3};0\right)$.

$$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}=\frac{5a}{12}.$$

$$\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{3}=100\cdot\frac{5a}{12}, \text{ и } a=500.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!