АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

(учебная дисциплина)

Составители

доценты кафедры математики и моделирования ВГУЭС

Шуман Галина Ивановна

Волгина Ольга Алексеевна

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

Элементы векторной алгебры

ВГУЭС

Содержание

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 1. Основные понятия

- **Вектор** – это направленный прямолинейный отрезок, то есть отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Если точка A – начало вектора, а точка B – его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ (у него начало в точке B, а конец в точке A) называется **противоположным** вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{\boldsymbol{a}}$.

ВГУЭС

Начало
Оглавление
Составитель

§ 1. Основные понятия

- Расстояние между началом и концом вектора называется его **длиной или модулем** и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым** вектором и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

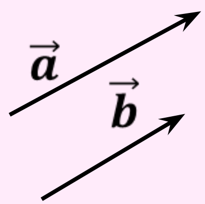
§ 1. Основные понятия

- Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** вектором и обозначается $\vec{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом (орт)** вектора и обозначается $\overrightarrow{a_0}$.

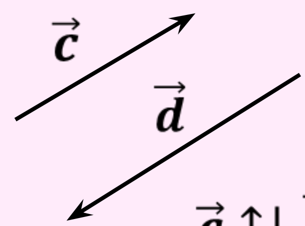
ВГУЭС

§ 1. Основные понятия

- Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, обозначается коллинеарность $\vec{a} \| \vec{b}$. Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) и **противоположно направлены** ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).



$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$



$\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$

ВГУЭС

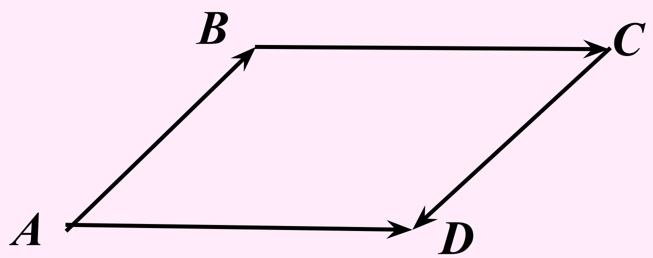
Начало

Оглавление

Составитель

§ 1. Основные понятия

- Два вектора называются равными, если они коллинеарные, одинаково направлены и имеют равные длины.



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \text{ но } \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$$

ВГУЭС

§ 1. Основные понятия

Три вектора в пространстве называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

ВГУЭС

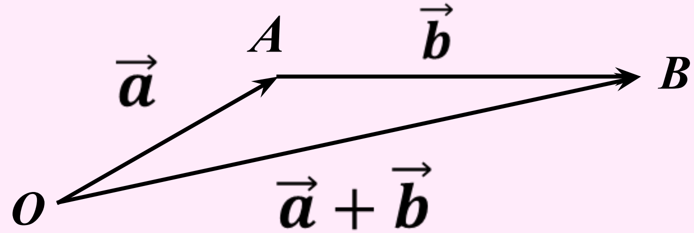
§ 2. Линейные операции над векторами

- Линейными операциями над векторами называют операции сложения, вычитания векторов и умножение вектора на число.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. От точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

ВГУЭС

§ 2. Линейные операции над векторами



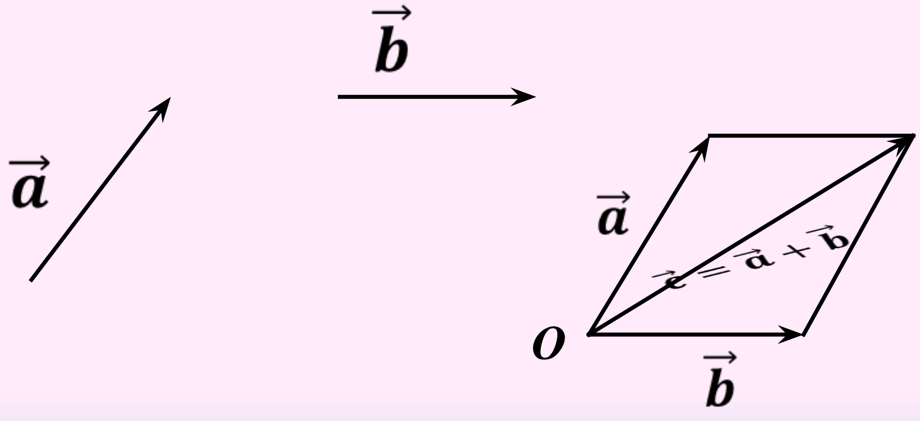
Это правило сложения векторов называют **правилом треугольника**.

ВГУЭС

§ 2. Линейные операции над векторами

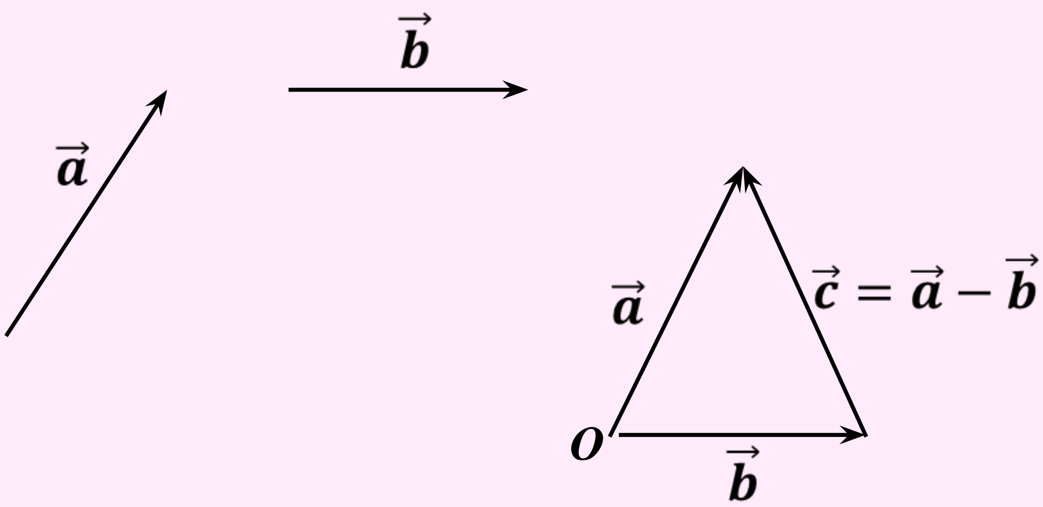
Правило треугольника можно применять для любого конечного числа складываемых векторов.

Сумму двух векторов можно построить и по **правилу параллелограмма**.



§ 2. Линейные операции над векторами

- **Разностью** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.



§ 2. Линейные операции над векторами

- Таким образом, если на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных из общей точки O, построить параллелограмм $OACB$, то вектор $\overrightarrow{OC}$, совпадающий с **одной диагональю, равен сумме** $\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$, а второй $\overrightarrow{BA}$, **совпадающий с другой диагональю, - разности** $\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$**.**

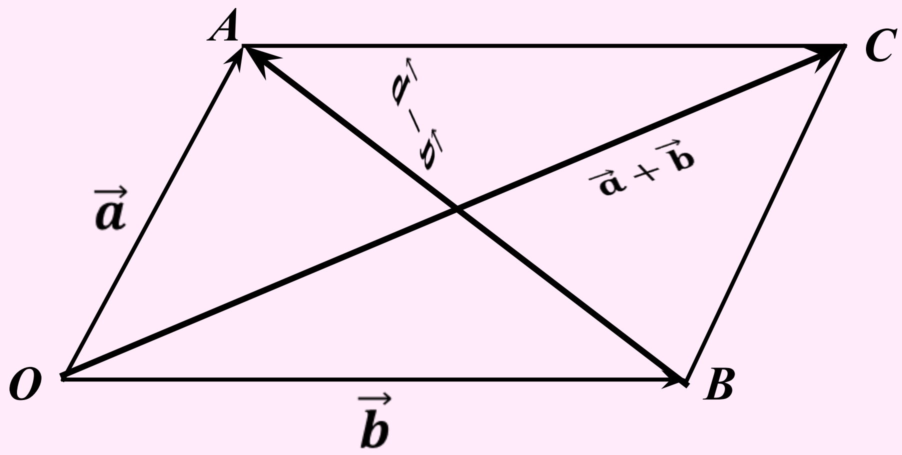
ВГУЭС

§ 2. Линейные операции над векторами

Начало

Оглавление

Составитель



ВГУЭС

§ 2. Линейные операции над векторами

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ (скаляр) называется вектор $\lambda\vec{a}$, который имеет длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

ВГУЭС

§ 2. Линейные операции над векторами

- Из определения следует: два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **коллинеарны тогда и только тогда**, когда имеет место равенство $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$:

$$\boldsymbol{\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}.}$$

ВГУЭС

§ 2. Линейные операции над векторами

- Линейные операции над векторами обладают следующими **свойствами**:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c};$

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0};$

ВГУЭС

§ 2. Линейные операции над векторами

- **4)** $\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a} = \lambda_2(\lambda_1\vec{a});$

  5) $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a};$

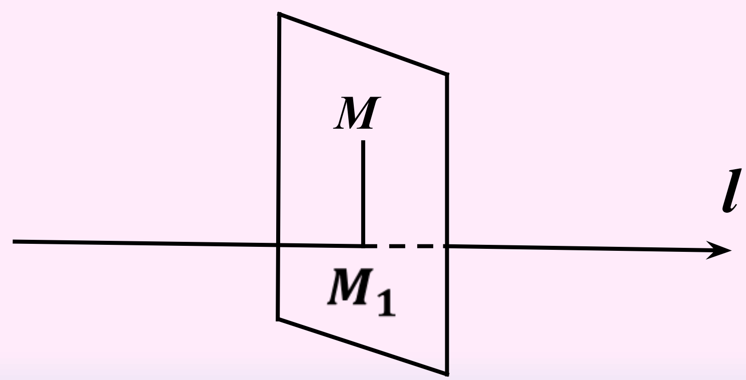
  6) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b};$

  7) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$

§ 3. Проекция вектора на ось

- Пусть в пространстве задана ось $\boldsymbol{l}$, то есть направленная прямая.

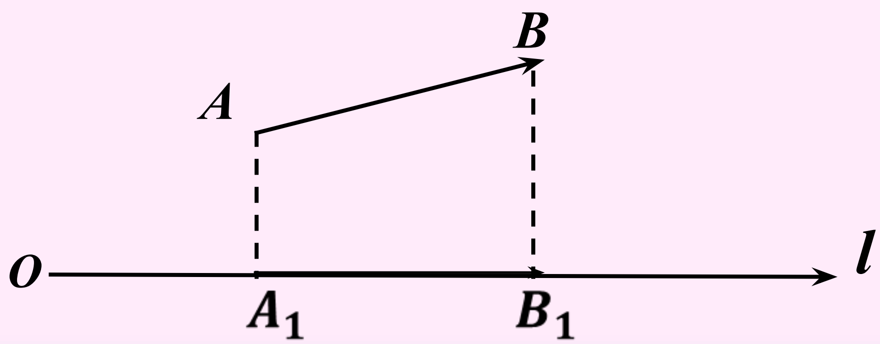
Проекцией точки M на ось l называется основание перпендикуляра M_1, опущенного из точки M на ось.



ВГУЭС

§ 3. Проекция вектора на ось

- Пусть $\overrightarrow{AB}$ - произвольный вектор ($\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$). Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала A и конца B вектора $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ называется **составляющей вектора** $\overrightarrow{AB}$ по оси l и обозначается $\overrightarrow{A_1B_1} = \text{сост}_l\overrightarrow{AB}$.



Начало

Оглавление

Составитель

§ 3. Проекция вектора на ось

- **Проекцией** вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l сонаправлены, отрицательное число -$\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены и 0, если $\overrightarrow{AB} \perp l$.

  Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l обозначается $\boldsymbol{np_l\overrightarrow{AB}}$.

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 3. Проекция вектора на ось

- **Основные свойства проекций:**

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, то есть

$$np_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Следствие 1. Проекция вектора на ось положительна, если вектор образует с осью острый угол, отрицательна, если этот угол – тупой, и равна нулю, если этот угол – прямой.

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 3. Проекция вектора на ось

- **Следствие 2.** Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось $np_l(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b} + np_l\vec{c}$.

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 3. Проекция вектора на ось

- **3.** При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, то есть $np_l(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot np_l\vec{a}$.

Заметем, что проекция вектора на ось l и его составляющая связаны соотношением

$$\boldsymbol{cocm_l\vec{a} = np_l\vec{a} \cdot \overrightarrow{l_0}}.$$

ВГУЭС

§ 4. Координаты вектора

- Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy и Oz единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно, $\vec{a}$ - произвольный вектор. Обозначим

$$пр_x\vec{a} = a_x,\ пр_y\vec{a} = a_y,\ пр_z\vec{a} = a_z,$$

тогда $\boldsymbol{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}.$

§ 4. Координаты вектора

- Полученная формула является основной в векторном исчислении и называется **разложением вектора по ортам координатных осей**. Числа a_x, a_y, a_z называются **координатами** вектора $\vec{a}$, то есть координаты вектора – это его проекции на соответствующие координатные оси.

§ 4. Координаты вектора

- Модуль вектора (длина вектора) равен квадратному корню из суммы квадратов координат (проекцией) этого вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Пусть вектор образует с осями Ox, Oy, Oz углы α, β, γ соответственно. По свойству проекции вектора на ось имеем

$$a_x = |\vec{a}| \cos\alpha, a_y = |\vec{a}| \cos\beta, a_z = |\vec{a}| \cos\gamma.$$

Начало

Оглавление

Составитель

§ 4. Координаты вектора

- Или, что то же самое,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются **направляющими косинусами вектора**.

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1,$$

то есть сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.

ВГУЭС

§ 4. Координаты вектора

Начало

Оглавление

Составитель

- Заметим, что координатами единичного вектора $\overrightarrow{a_0}$ являются числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, то есть

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a_0}}(\boldsymbol{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma}).$$

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 4. Координаты вектора

- Из свойств проекций (а координаты вектора – это его проекции на оси координат) следует: если $\vec{a}(a_x, a_y, a_z), \vec{b}(b_x, b_y, b_z), \alpha \in R$, то

1) $\vec{a} = \vec{b}$ тогда и только тогда, когда

$$a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$$

- равные векторы имеют соответственно равные координаты;

ВГУЭС

§ 4. Координаты вектора

- **2)** $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}$

 - при сложении векторов соответствующие координаты складываются, при вычитании – вычитаются;

3) $\alpha \cdot \vec{a} = \{\alpha \cdot a_x;\ \alpha \cdot a_y;\ \alpha \cdot a_z\}$

 - при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число;

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 4. Координаты вектора

- **4)** $\vec{\boldsymbol{a}} \| \vec{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow \vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$, то есть

$a_x = \alpha b_x, a_y = \alpha b_y, a_z = \alpha b_z$ или

$$\frac{\boldsymbol{a_x}}{\boldsymbol{b_x}} = \frac{\boldsymbol{a_y}}{\boldsymbol{b_y}} = \frac{\boldsymbol{a_z}}{\boldsymbol{b_z}}$$

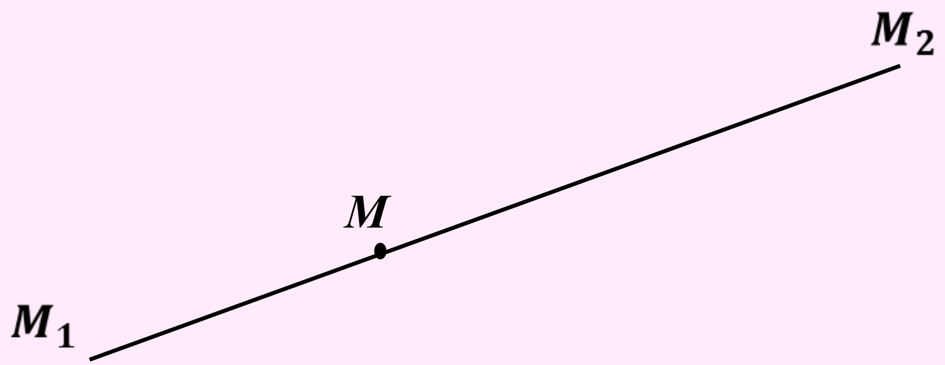
условие коллинеарности двух векторов в координатной форме.

ВГУЭС

§ 4. Координаты вектора

- Говорят, что точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda > 0$, если $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, или

$$M_1M = \lambda \cdot MM_2$$



где $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M(x; y; z)$.

§ 4. Координаты вектора

- Векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ коллинеарны $\overrightarrow{M_1M} \| \overrightarrow{MM_2}$, поэтому $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. После преобразований получим **формулы вычисления координат точки** $\boldsymbol{M}$, делящей отрезок в данном отношении λ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Начало

Оглавление

Составитель

§ 4. Координаты вектора

Если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$, тогда

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2}}{\mathbf{2}}$$

ВГУЭС

§ 5. Скалярное произведение векторов

- Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$) называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a}\vec{b}$.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi, \text{ где } \varphi = (\vec{a} \hat{} \vec{b}).$$

ВГУЭС

§ 5. Скалярное произведение векторов

- Пусть заданы два вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Тогда

$$\boldsymbol{\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

ВГУЭС

§ 5. Скалярное произведение векторов

- **Свойства скалярного произведения:**

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}=\vec{0}$, или $\vec{b}=\vec{0}$, или $\vec{a}\perp\vec{b}$;

5) $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$ - скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

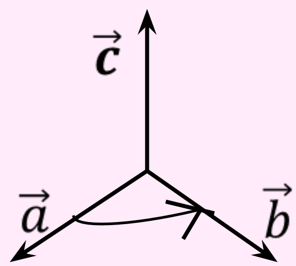
Начало

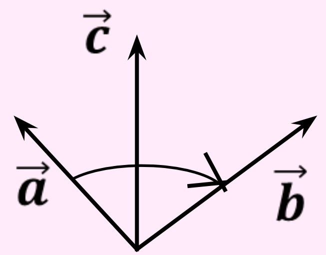
Оглавление

Составитель

§ 6. Векторное произведение векторов

- Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если смотреть с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой.





ВГУЭС

§ 6. Векторное произведение векторов

- Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который:

1) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;

2) имеет длину $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b})$;

3) векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 6. Векторное произведение векторов

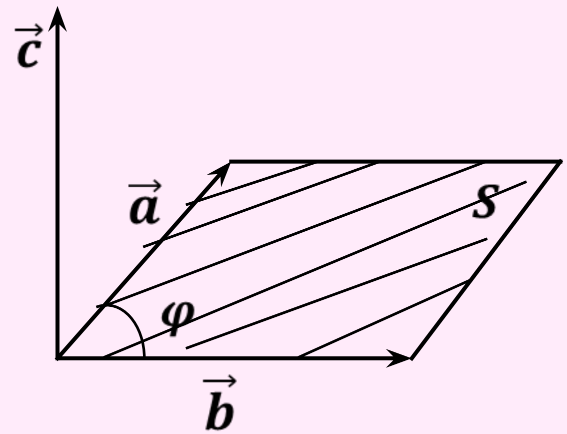
- Векторное произведение обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$, то есть $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

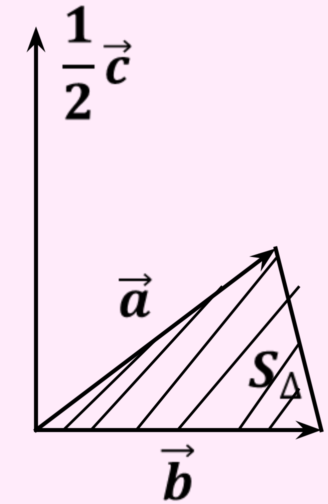
Из условия (2) следует, что длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах:

$$\boldsymbol{S_{пар}} = |\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}|, \boldsymbol{S}_{\Delta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} |\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}|.$$

ВГУЭС

§ 6. Векторное произведение векторов





§ 6. Векторное произведение векторов

Начало

Оглавление

Составитель

Свойства векторного произведения:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) $(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;

4) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} = \vec{0}$, или $\vec{b} = \vec{0}$, или $\vec{a} \| \vec{b}$;

5) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 6. Векторное произведение векторов

- Пусть заданы два вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тогда векторное произведение этих векторов может быть найдено с помощью определителя третьего порядка

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

ВГУЭС

§ 7. Смешанное произведение векторов

- **Смешанным** или векторно-скалярным произведением трех векторов (обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$) называется произведение вида $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Пусть заданы векторы $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ и $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - это вектор, равный

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 7. Смешанное произведение векторов

- $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k},$$

а вектор $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$, тогда скалярное произведение векторов $(\vec{a}\times\vec{b})$ и $\vec{c}$ имеет вид

ВГУЭС

§ 7. Смешанное произведение векторов

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{a_z} \\ \boldsymbol{b_x} & \boldsymbol{b_y} & \boldsymbol{b_z} \\ \boldsymbol{c_x} & \boldsymbol{c_y} & \boldsymbol{c_z} \end{vmatrix}$$ – **смешанное произведение**

трех векторов в координатной форме.

ВГУЭС

§ 7. Смешанное произведение векторов

- **Свойства смешанного произведения:**

1) смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, то есть $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$;

2) смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов - сомножителей, то есть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;

ВГУЭС

§ 7. Смешанное произведение векторов

Начало
Оглавление
Составитель

- **3)** смешанное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны, то есть

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{векторы } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ -}$$

компланарны ($\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$);

ВГУЭС

§ 7. Смешанное произведение векторов

- **4)** смешанное произведение трех векторов с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах. Можно записать:

$$\boldsymbol{V}_{\text{пар}-\text{да}} = \left|\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{c}}\right|.$$

Объем тетраэдра (треугольной пирамиды), построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равен

$$\boldsymbol{V}_{\text{тетр}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\left|\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{c}}\right|.$$