Планиметрические задачи на ЕГЭ

Дополнительный теоретический материал

- В треугольнике со сторонами *a, b, c* расстояние от вершины *A* до точек касания вписанной окружности сторон, содержащих эту вершину, равно $\frac{b+c-a}{2}$
- Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований (средней линии).

- Если окружность касается стороны *BC* треугольника *ABC* и продолжений сторон *AB* и *AC*, то расстояние от *A* до точки касания окружности с прямой *AB* равно полупериметру треугольника *ABC*
- Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.
- Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.

- Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.
- При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.
- При внешнем касании центры окружностей расположены на линии центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем – по одну сторону.
- Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов R и r $(R \geq r)$ равно $R+r$ при внешем касании и $R-r$ при внутреннем.

- Пересекающиеся в точка *A* и *B* окружности имеют общую хорду *AB.*

- Общая хорда перпендикулярна линии центров и делится ею пополам.

- Медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника

- Диагональ параллелограмма разбивает его на два равновеликих треугольника.
- Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям).
- Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.

- Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие, отсекает от него треугольник, подобный данному.
- Если *p* - полупериметр треугольника, r_a - радиус вневписанной окружности, касающейся стороны равной *a*, то $S = (p-a)r_a$
- Расстояние между центрами вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей находится по формуле

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

Опорные задачи

- Отрезок общей внешней касательной к двум окружностям радиусов *R* и *r* равен $2\sqrt{Rr}$
- Пусть в треугольнике *ABC* проведены высоты *AK*, и *CM*, тогда треугольник *BKM* подобен данному с коэффициентом подобия, равным |cos B|
- Пусть *O* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*, тогда

$$\angle AOC = \frac{\angle B}{2} + 90^\circ$$

$$\angle AOB = \frac{\angle C}{2} + 90^\circ$$

$$\angle COB = \frac{\angle A}{2} + 90^\circ$$

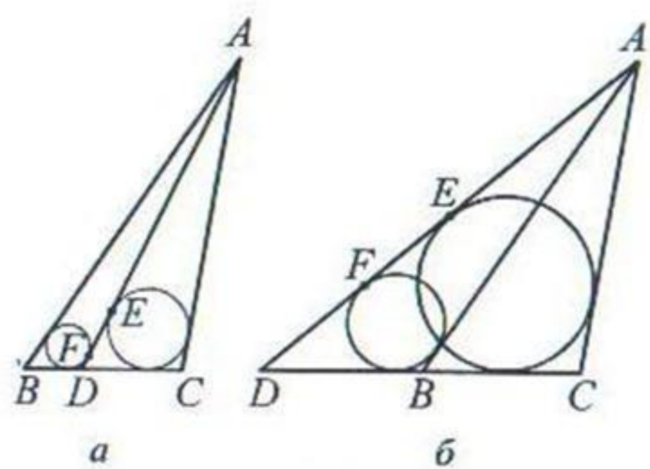
- В *треугольнике ABC AB =12, BC = 5, CA = 10. Точка D лежит на прямой BC так, что BD : DC = 4:9. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.*
- *В треугольнике со сторонами а, Ь, с расстояние от вершины А до точек касания вписанной окружности сторон, содержащих эту вершину, равно* $\frac{b+c-a}{2}$

Решение

Пусть $AD = d$, $BD = x$, $DC = y$.

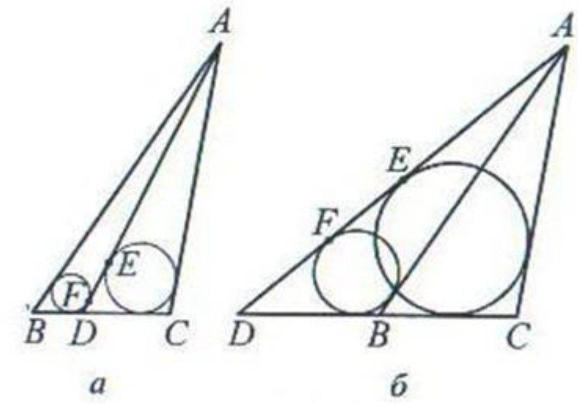
Тогда для окружности вписанной в треугольник ADC имеем

$$DE = \frac{d+y-10}{2}$$



А для окружности вписанной в треугольник *ADB*

$$DF = \frac{d + x - 12}{2}$$



Поскольку в условии сказано, что точка *D* лежит на прямой *BC*, то существует два ее положения, при которых будет выполняться условие *BD: DC* = 4:9. Соответственно, существует два рисунка, удовлетворяющих условию задачи.

1. Пусть точка *D* лежит на отрезке *BC* (рис.а). Тогда $x = \frac{20}{13}, y = \frac{45}{13}$ Значит,

$$EF = |DE - DF| = \left|\frac{d + y - 10}{2} - \frac{d + x - 12}{2}\right| = \frac{51}{26}$$

2. Пусть точка *D* лежит вне отрезка *BC* (рис. б). Тогда

x = 4, y = x + BC = = 9. Значит, $EF = |DE - DF| = \frac{7}{2}$

Случай расположения точки *D* правее точки *C* невозможен.

Замечание. Так как в решении не исследовано расположение точек *E* и *F* на отрезке *AD,* то при вычислении длины отрезка *EF* использован знак модуля.

Ответ: $\frac{7}{2} и \frac{51}{26}$

Вариант пробного платного ЕГЭ

На стороне *CD* квадрата *ABCD* построен равнобедренный прямоугольный треугольник *CPD* с гипотенузой *CD.* Найдите высоту треугольника *ABP*, проведенную из *A*, если сторона квадрата равна 4.

- Дано:

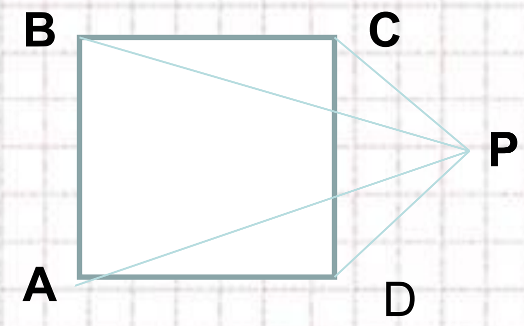
AB=4,

CP=PD,

AK-высота.

Найти:

AK



Решение

- Первый случай, когда точка *P* лежит вне квадрата ***ABC****D*:

1. *CD* = 4, значит *CP*=*PD*= $2\sqrt{2}$
2. Рассмотрим треугольник *BCP,* в нем *BC*=4,

CP= $2\sqrt{2}$, $\angle BCP = 135°$

По теореме косинусов находим *AP*= $2\sqrt{10}$

3. Проведем высоту *PH* в равнобедренном треугольнике *ABP,* так как *PH* = 6, то из формулы площади треугольника найдем *AK*

$$S = \frac{1}{2} PH \cdot AB = \frac{1}{2} AK \cdot BP$$

AK= $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

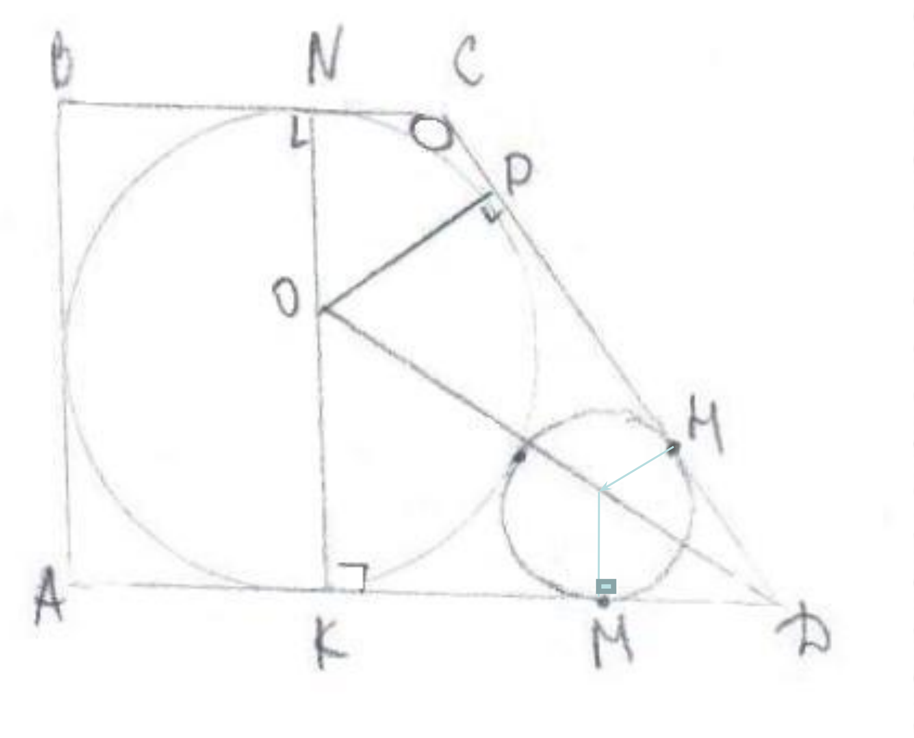
Второй случай когда точка *P* лежит внутри квадрата:

- Точка *P* совпадет с точкой пересечения диагоналей, поэтому высотой треугольника *ABP* будет катет *AP*= $\sqrt{2}$

Ответ : $\frac{6\sqrt{10}}{5}$, $\sqrt{2}$

Диагностическая работа от 20.10.10

Окружность S радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и окружности S.



Решение

Первый случай, когда окружность касается нижнего основания:

1. По свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки получаем, что *CN=9, ND=16, KD=16*.
2. Треугольник *OKD* – прямоугольный, поэтому *OD=20.*
3. Треугольники *OKD* и *HMD* подобны по двум углам, поэтому составим отношение

$$\frac{DH}{DO} = \frac{HM}{OK}$$

Пусть *MH* = у, тогда *DH* = 8-у, находим у=3

- Второй случай, когда окружность касается верхнего основания.

1. По теореме Пифагора найдем *OC* = 15.
2. Также используя отношение сторон подобных треугольников получаем пропорцию

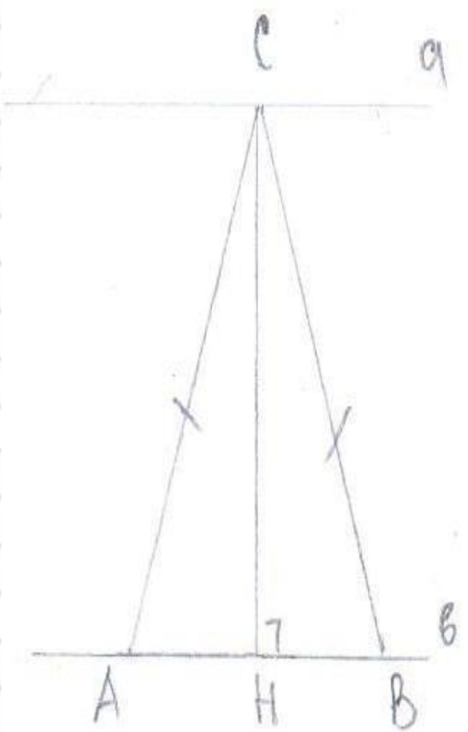
$$\frac{y}{12} = \frac{3 - y}{15}$$

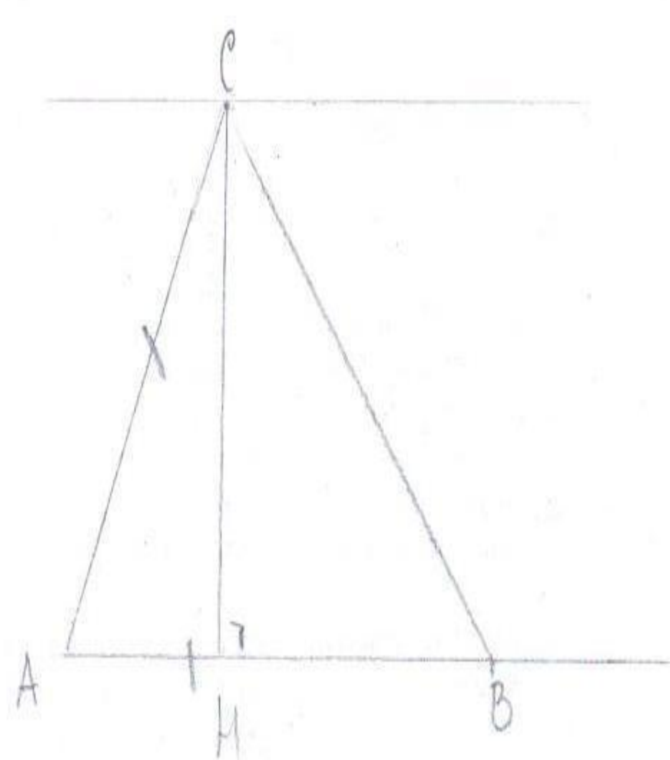
То есть у = $\frac{4}{3}$

Ответ: 3 и $\frac{4}{3}$

Диагностическая работа от 9.12.10

Расстояние между параллельными прямыми равно 12. на одной из них лежит точка *C* , а на другой – точки *A* и *B*, причем треугольник *ABC* – остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC.*





Решение

- Первый случай, когда *С* – вершина равнобедренного треугольника.

1. По условию *CH = 12, AC = 13*, треугольник *ABC*-равнобедренный, поэтому *AH* = *5*, значит, *AB=10*.
2. Из формул площади треугольника выразим радиус

$$r = \frac{AB \cdot CH}{AB + 2AC}$$

3. То есть

$$r = \frac{10}{3}$$

- Второй случай, когда *AC= AB=13, CH=12*

1. По теореме Пифагора *AH=5*, значит *HB=8,*

$$CB = 4\sqrt{13}$$

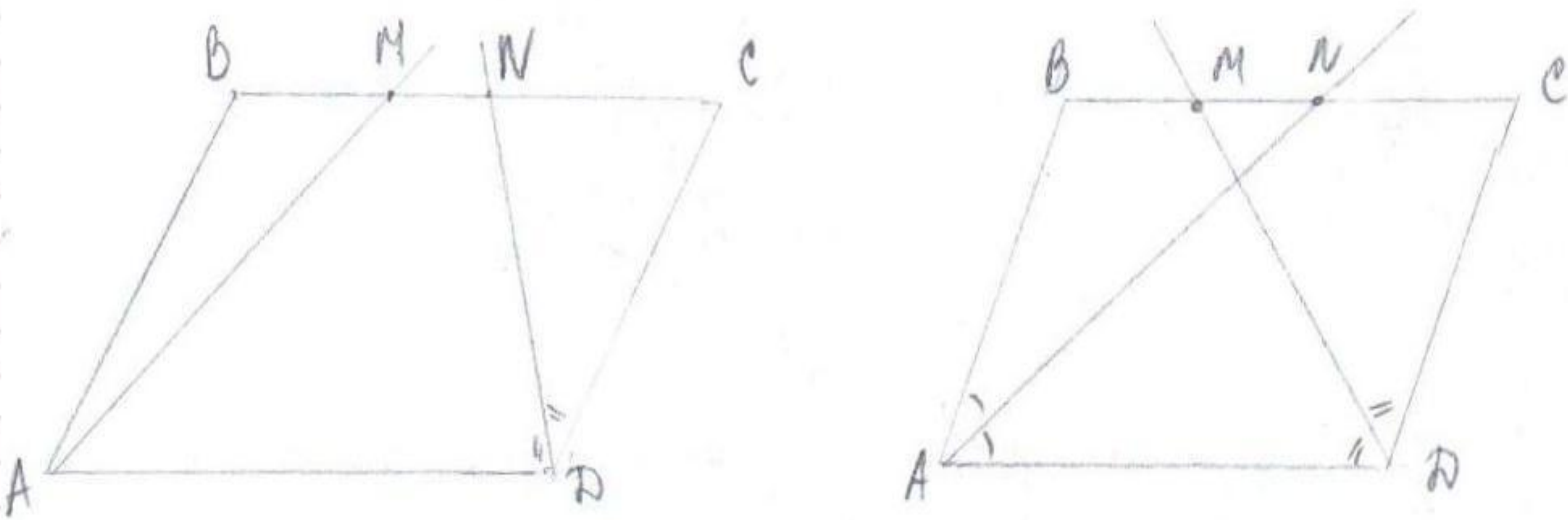
2. Подставив в формулу получаем

$$r = \frac{26 - 4\sqrt{13}}{3}$$

Ответ: $\frac{10}{3}$, $\frac{26-4\sqrt{13}}{3}$

Ященко и Со (30 вариантов-2011)

В параллелограмме *ABCD* биссектрисы углов при стороне *AD* делят сторону *BC* точками *M* и N так, что *BM:MN=1:3*. Найти *BC*, если AB=6.



Решение

- Первый случай, когда точки *M* и *N* лежат на отрезке *BC*, считая от вершины *B* соответственно

1. По свойству биссектрисы параллелограмма получаем $AB=BM=NC=CD=6$.
2. Так как $BM:MN=1:3$, то $MN=18$, значит $BC=30$.

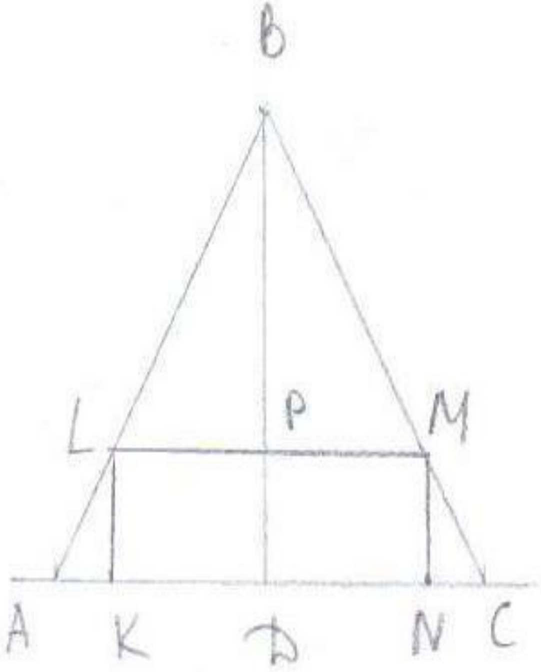
- Второй случай, когда биссектрисы пересекаются в параллелограмме

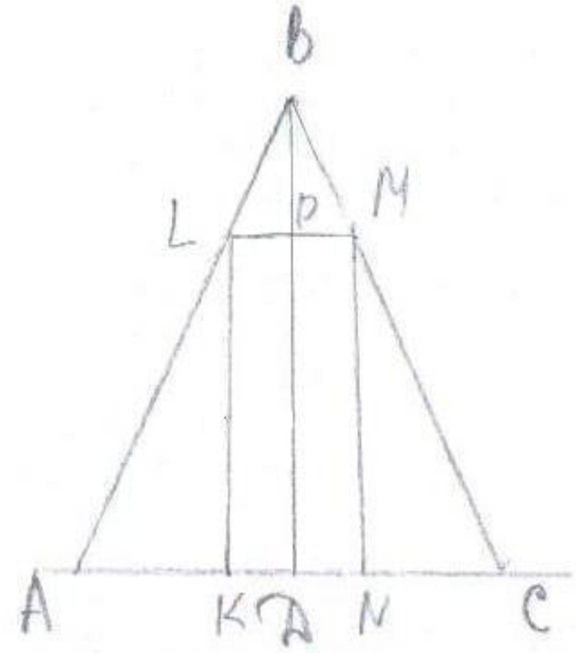
1. Тогда $BN=CM=6$, пусть $BM=x$, $MN=3x$
2. $x+3x=6$, то есть $x=1,5$, значит $BC=7,5$.

Ответ: 30 и 7,5.

Ященко и Со (30 вариантов - 2011)

Основание равнобедренного треугольника равно 40, косинус угла при вершине 15/17. Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие – на боковых сторонах. Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон вдвое больше другой.





Решение

- Первый случай, когда большая сторона прямоугольника лежит на основании.

1. По теореме косинусов находим *AB* = $20\sqrt{17}$.
2. По теореме Пифагора находим *BD* = 80.
3. Пусть *KN=2x, KD=x, LK=x.*
4. Рассмотрим треугольники *ABD* и *LBP* , они подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{AD}{x} = \frac{BD}{BD - x}$$

находим *x=16*, значит, S=512.

- Во втором случае на основании треугольника лежит меньшая сторона прямоугольника, тогда

1. Пусть *KN=x, KD=0,5x, LK=2x.*
2. Подставив в пропорцию получим

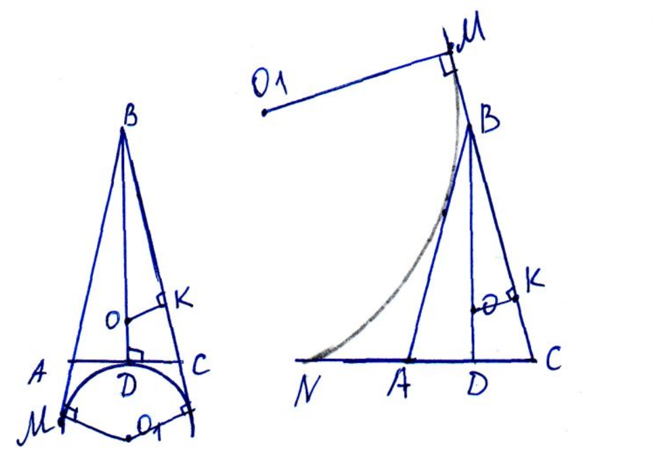
$$\frac{AD}{0{,}5x} = \frac{BD}{BD - 2x}$$

3. Получаем *x=20,* значит *S=800.*

Ответ: 512 и 800.

Ященко и Со (30 вариантов – 2011)

Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 18, а радиус вписанной в треугольник окружности равен 5. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжения других его сторон.



Решение

1. Пусть *BC* = *a*, *AC* = *b*, r_a - радиус вневписанной окружности, касающейся стороны *AC* , r_b - радиус вневписанной окружности, касающейся стороны *BC.*
2. Треугольники *BOK* и *BCD* подобны, значит,
$$\frac{BD}{BK} = \frac{DC}{OK} = \frac{BC}{BO}$$
3. Подставим известные величины и выразим *a* через *b*
$$a = \frac{13b}{10}$$
4. Применив теорему Пифагора получаем *AC=15, AB=19,5*

5. Применив свойство отрезка касательной к вневписанной окружности, получаем

   BM = 0,5 (19,5·2+15)=27

6. Из формулы площади треугольника находим радиусы вневписанных окружностей

$$\left(p-a\right)\cdot r_a = p\cdot r$$

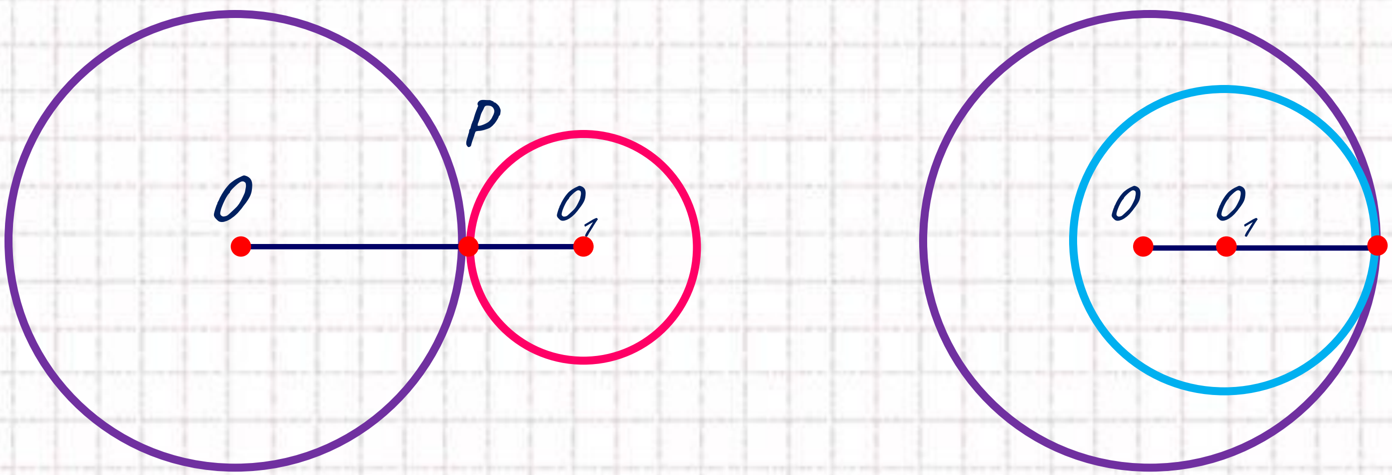
$$r_a = \frac{45}{4}$$

$$r_b = 18$$

Ответ: 18 и 11,25

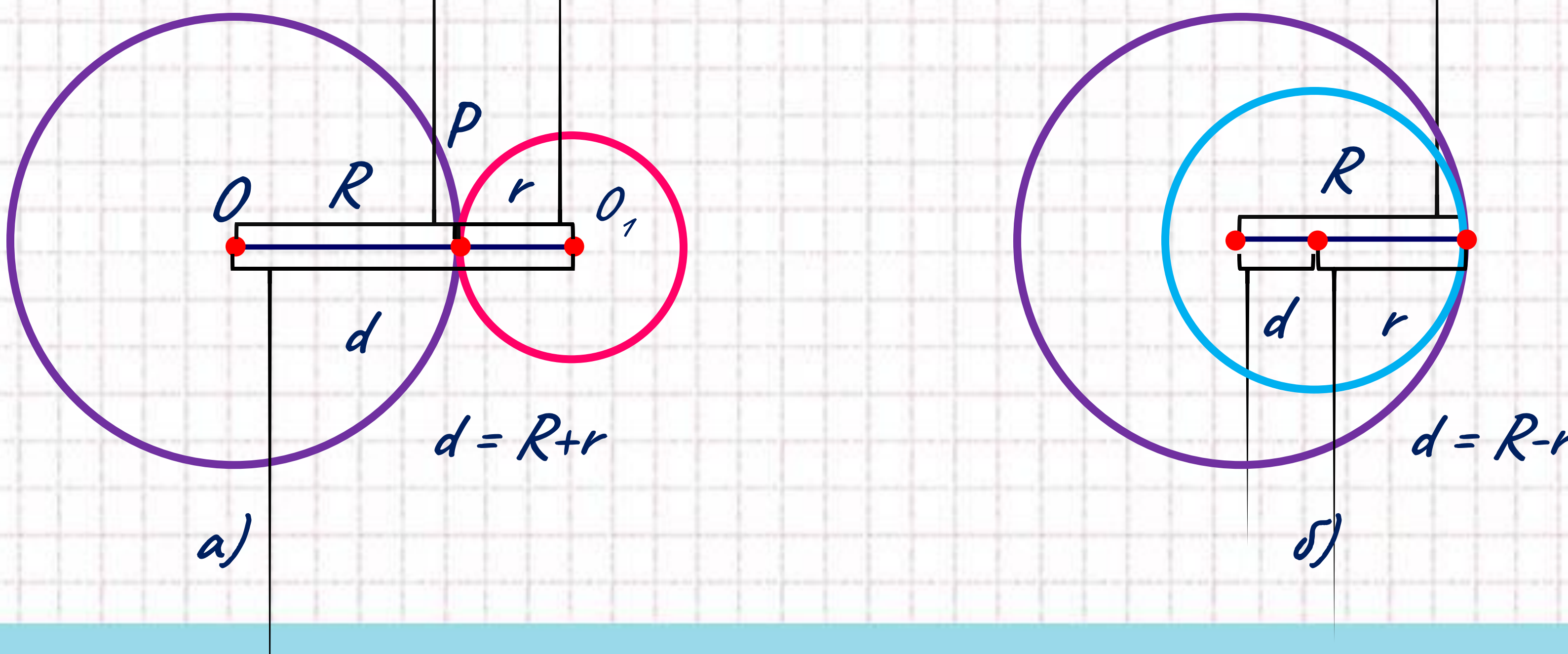
Основные свойства и утверждения о взаимном расположении окружностей, о взаимном расположении прямой и окружности.

Если две окружности касаются внешне или внутренне, то точка касания и центры этих окружностей лежат на одной прямой

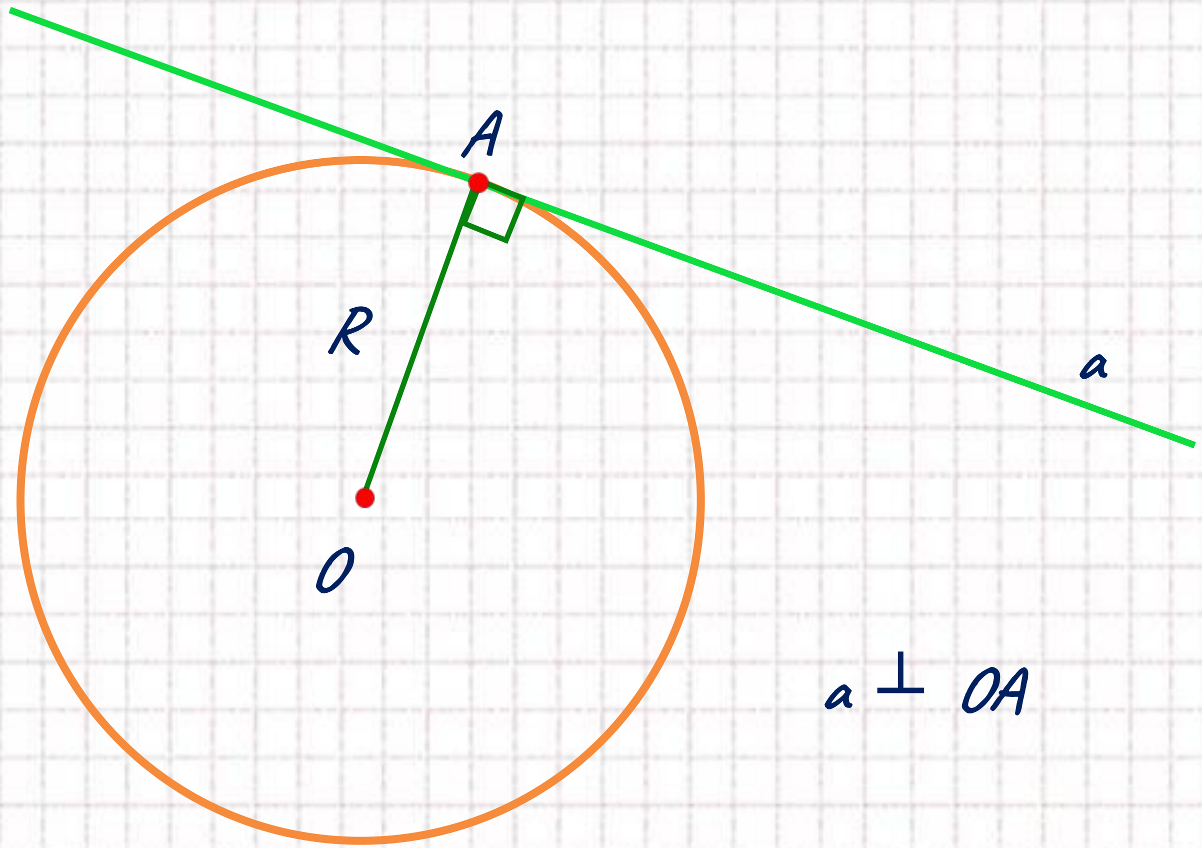


а) б)

Расстояние между центрами двух внешне касающихся окружностей равно сумме радиусов этих окружностей, а расстояние между центрами двух внутренне касающихся окружностей равно разности радиусов большей и меньшей окружностей



Касательная к окружности или ее дуге перпендикулярна к радиусу окружности или ее дуги, проведенному в точку касания



Задача 1.

В квадрате ABCD, сторона которого равна a, из точки A как из центра проведена внутри квадрата дуга через вершины B и D. На стороне DC как на диаметре построена внутри квадрата полуокружность. Найти радиус окружности, касающейся проведенной дуги, полуокружности и одной из сторон квадрата.

Решение

Рассмотрим три случая:

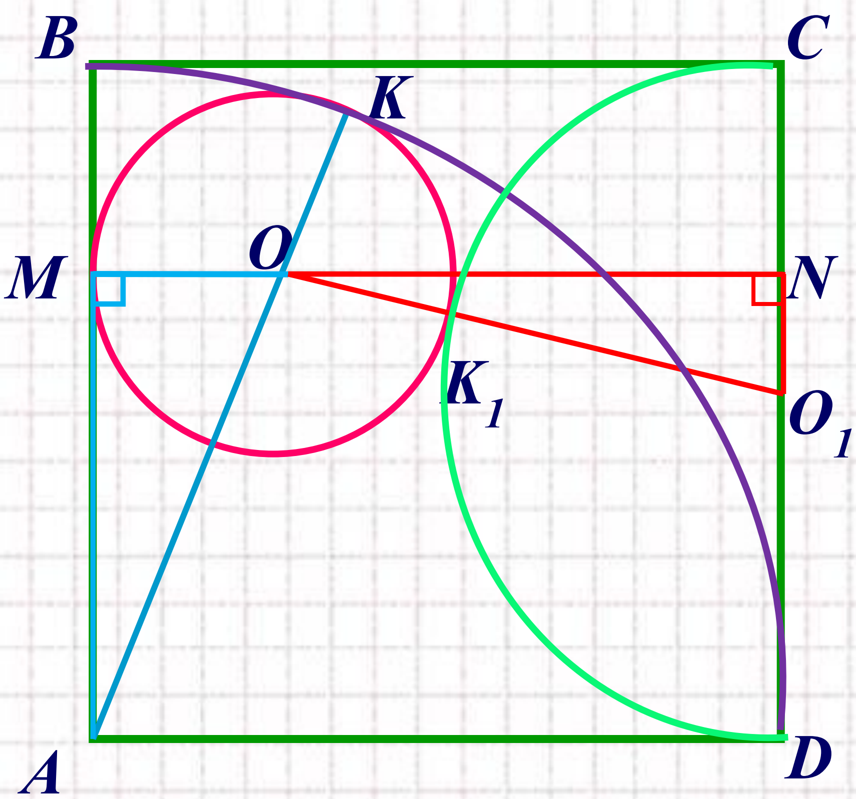


Рис. 1, а.

I. Случай, когда искомая окружность касается стороне AB квадрата $ABCD$ (Рис. 1, а). Обозначим радиус этой окружности через x.

а) Соединим центр окружности O с центром полуокружности O_1 и с центром дуги A.

б) Опустим из центра окружности O перпендикуляры OM и ON на противоположные стороны AB и CD и рассмотрим полученные при этом построении прямоугольные треугольники AMO и OO_1N.

Из прямоугольного треугольника ***AMO*** следует, что неизвестный катет ***AM*** равен

$\sqrt{AO^2 - MO^2}$, то есть ***AM***= $\sqrt{(a-x)^2 - x^2}$ или ***AM***= $\sqrt{a(a-2x)}$

Теперь рассмотрим треугольник OO_1N, в котором гипотенуза

$OO_1 = OK_1 + K_1O_1 = \frac{a}{2} + x$,катет $ON = MN - OM = a - x$ и катет $O_1N = DN - DO_1$,

где $DN = AM = \sqrt{a(a-2x)}$ и $DO_1 = \frac{a}{2}$ поэтому $O_1N = \sqrt{a(a-2x)} - \frac{a}{2}$

По теореме Пифагора находим $OO_1{}^2 = ON^2 + O_1N^2$. Подставляя найденные выражения для OO_1 , ON и O_1N в выше написанное уравнение имеем

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = (a-x)^2 + \left(\sqrt{a(a-2x)} - \frac{a}{2}\right)^2$$

откуда получаем искомый радиус $x = OK = \frac{a}{25}\left(9 - \sqrt{6}\right)$

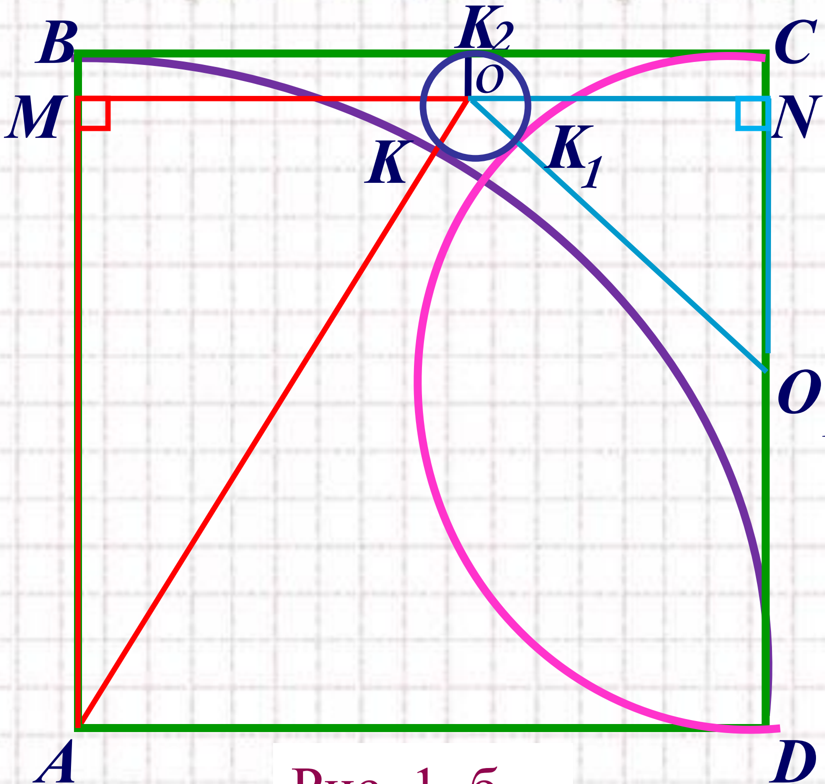


Рис. 1, б.

II. Случай, когда искомая окружность касается стороне ***BC*** (Рис. 1, б). Обозначим радиус этой окружности через ***y*** **.** Сделаем необходимые дополнительные построения и получаем прямоугольные треугольники ***AOM*** и ***O₁ON***. Из прямоугольного треугольника ***AOM*** по теореме Пифагора найдем катет ***OM***. Он равен ***OM*** =

$$= \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{(a+y)^2 - (a-y)^2} = 2\sqrt{ay}$$

Аналогично найдем из прямоугольного треугольника ***O_1ON*** катет ***ON*** =

$$= \sqrt{OO_1{}^2 - O_1N^2} = \sqrt{2ay}$$

Подставляя найденные значения величин ***OM*** и ***ON*** в соотношение ***BC=OM+ON***, получаем $a = 2\sqrt{ay} + \sqrt{2ay}$

Решая это уравнение, находим $y = OK = \frac{a}{2}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$

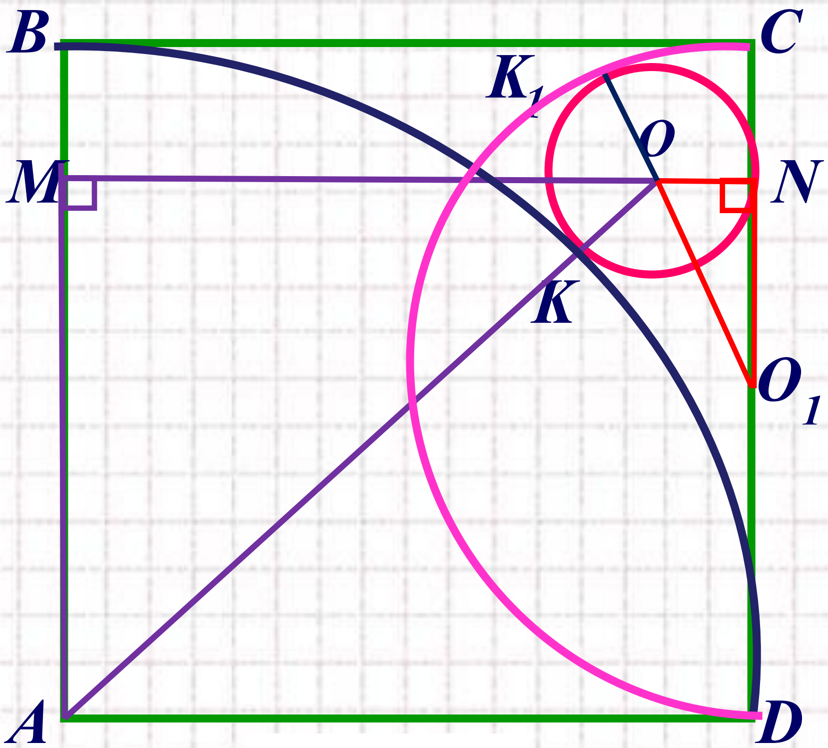


Рис. 1, в.

III. Искомая окружность касается стороне ***DC*** (Рис.1, в).Обозначим радиус этой окружности через **z.** Опустим из центра ***O*** искомой окружности перпендикуляры ***OM*** и ***ON*** соответственно на стороны ***AB*** и ***CD*** квадрата ***ABCD*** и соединим центр ***O*** с центром полуокружности ***O₁*** и с вершиной ***A*** квадрата ***ABCD*** . Из полученного при этом построении прямоугольного треугольника OO_1N

по теореме Пифагора имеем $O_1N =$

$$= \sqrt{OO_1^{\,2} - ON^2} = \frac{\sqrt{a^2-4az}}{2}$$

Следовательно, катет ***AM*** прямоугольного треугольника ***AMO*** равен

$AM = \dfrac{\sqrt{a^2-4az}+a}{2}$. Из соотношения $AO^2 = AM^2 + OM^2$ получаем

$$(a+z)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2-4az}+a}{2}\right)^2 + (a-z)^2$$

откуда и находится искомый радиус $z = OK = \dfrac{4a}{25}$

Задача 2

Дан круговой сектор AOB радиуса R с центральным углом в 90°. На радиусах AO и OB этого сектора как на диаметрах построены полуокружности, расположенные внутри данного сектора. Полуокружность с центром O_1 на радиусе OB сектора AOB, радиуса O_1B касается полуокружности, построенной на радиусе AO, и дуги AB в точке B. Определить радиус окружности, касающейся этих трех полуокружностей.

Решение.

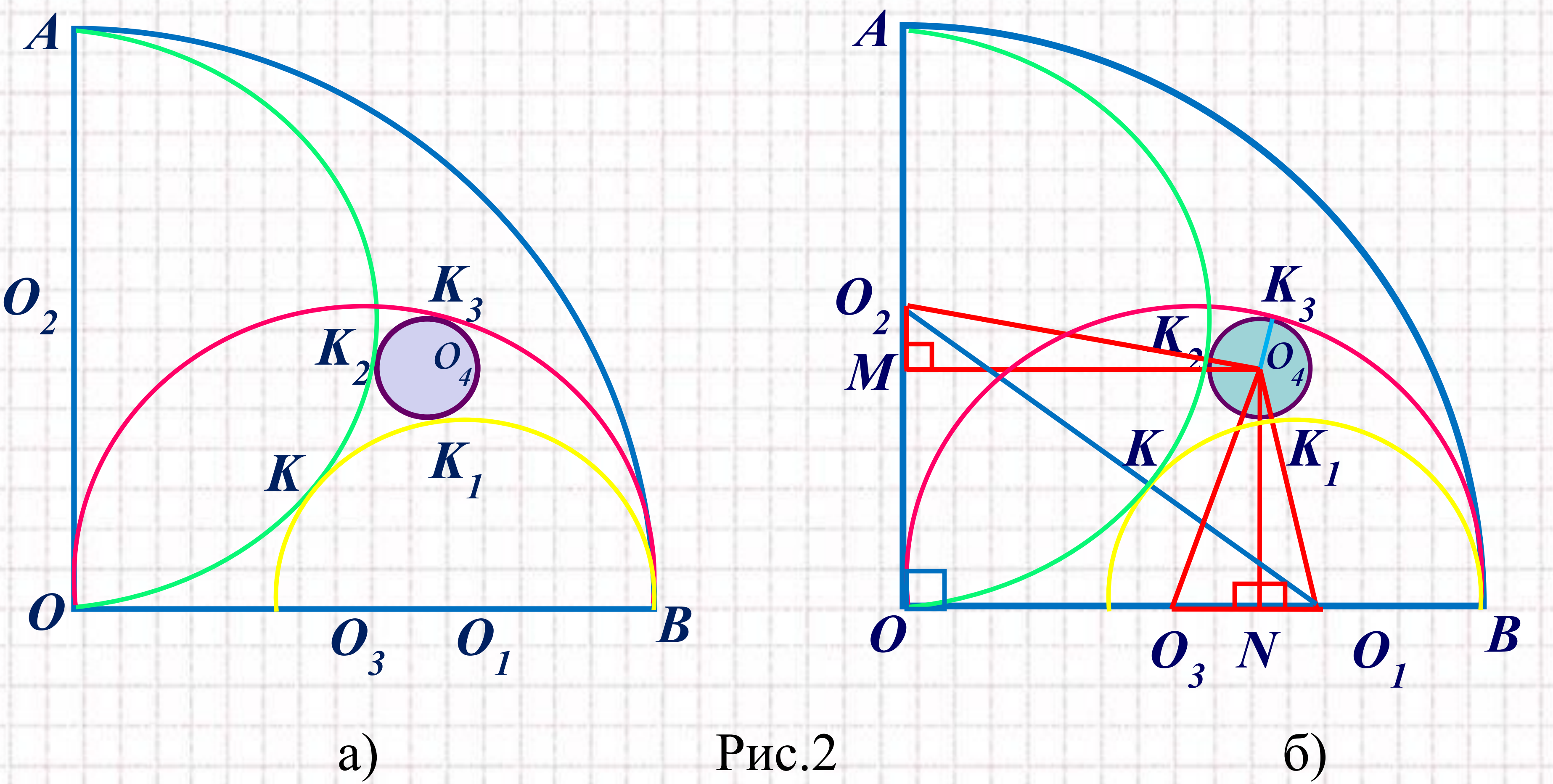


Рис.2

Для решения этой задачи проведем из центров полуокружностей O_1 и O_2 радиусы в точки касания (Рис.2,б). Радиусы O_1K и O_2K оба перпендикулярны касательной в одной и той же точке K и поэтому они лежат на одной прямой O_1O_2. Получим прямоугольный треугольник OO_1O_2 , из которого найдем $O_1O_2^2 = O_1O^2 + O_2O^2$ или,

так как $O_1O_2 = O_2K + O_1K = \frac{R}{2} + O_1B$,

$$O_1O = OB - O_1B = R - O_1B \text{ и } O_2O = \frac{R}{2}$$

отсюда получаем $\left(\frac{R}{2} + O_1B\right)^2 = \frac{R^2}{4} + (R - O_1B)^2$ или $O_1B = \frac{R}{3}$.

Далее центры полуокружностей O_1 ,O_2 и O_3 соединим с центром окружности O_4 и из центра O_4 этой же окружности опустим перпендикуляры O_4M и O_4N на радиусы OA и OB сектора AOB. Теперь рассмотрим прямоугольные треугольники O_1O_4N и O_3O_4N. Высота O_4N – общая для обоих этих треугольников и поэтому, применяя теорему Пифагора к этим прямоугольным треугольникам, получим следующее равенство

$O_1O_4^2 - O_3O_4^2 = NO_1^2 - NO_3^2$, или $(O_1O_4 - O_3O_4)(O_1O_4 + O_3O_4) = (NO_1 - NO_3)$ $(NO_1 + NO_3)$ **.** Подставив сюда значения: $O_1O_4 = \frac{R}{3} + K_1O_4$; $O_3O_4 = \frac{R}{2} - K_1O_4$;

$NO_1 + NO_3 = \frac{R}{6}$ и $NO_1 - NO_3 = \frac{R}{6} - 2NO_3$, получаем уравнение

$$\frac{5R}{6}\left(2K_1O_4 - \frac{R}{6}\right) = \frac{R}{6}\left(\frac{R}{6} - 2NO_3\right),$$ откуда $NO_3 = \dfrac{R - 10K_1O_4}{2}$

Следовательно, высота

$$O_4N = \sqrt{O_3O_4^{\,2} - NO_3^{\,2}} = \sqrt{\left(\frac{R}{2} - K_1O_4\right)^2 - \left(\frac{R - 10K_1O_4}{2}\right)^2} = 2\sqrt{K_1O_4(R - 6K_1O_4)}.$$

Теперь мы должны определить стороны прямоугольного треугольника

O_2O_4M. Гипотенуза $O_2O_4 = O_2K_2 + K_2O_4 = \frac{R}{2} + K_1O_4$

Катет $O_2M = OO_2 - OM = \frac{R}{2} - 2\sqrt{K_1O_4(R - 6K_1O_4)}$

и катет $O_4M = R - 5K_1O_4$

По теореме Пифагора имеем $O_2O_4{}^2 = O_2M^2 + MO_4{}^2$, или

$$\left(\frac{R}{2} + K_1O_4\right)^2 = \left(\frac{R}{2} - 2\sqrt{K_1O_4(R - 6K_1O_4)}\right)^2 + (R - 5K_1O_4)^2,$$

откуда $K_1O_4 = \frac{R}{73}(9 - 2\sqrt{2})$

Задача 3.

На отрезке AB, равном R, точка Q – середина; на AQ и на BQ как на диаметрах по одну сторону от AB построены полуокружности. С центрами в точках A и B радиусами, равными AB, проведены дуги до их взаимного пересечения в точке F, находящиеся по ту же сторону от AB, что и полуокружности. Проведена окружность, которая касается проведенных дуг и полуокружностей. Найти радиус окружности, касающейся окружности, полуокружности, построенной на отрезке BQ, и дуги BF.

Решение.

Записывая теорему Пифагора для прямоугольных треугольников O_1O_2Q и BO_2Q (Рис.3), получаем $(BO_2 + O_1O_2)(BO_2 - O_1O_2) = (BQ + O_1Q)(BQ - O_1Q)$.Имея в виду, что $BO_2 = BK_2 - O_2K_2 = R - O_2K_2$,

$$O_1O_2 = O_1K_4 + K_4O_2 = \frac{R}{4} + O_2K_2,$$

$BQ = \frac{R}{2}$ и $O_1Q = \frac{R}{4}$ находим

$$\frac{5R}{4}\left(\frac{3R}{4} - 2O_2K_2\right) = \frac{3R^2}{16}, \text{ откуда } O_2K_2 = \frac{3R}{10}.$$

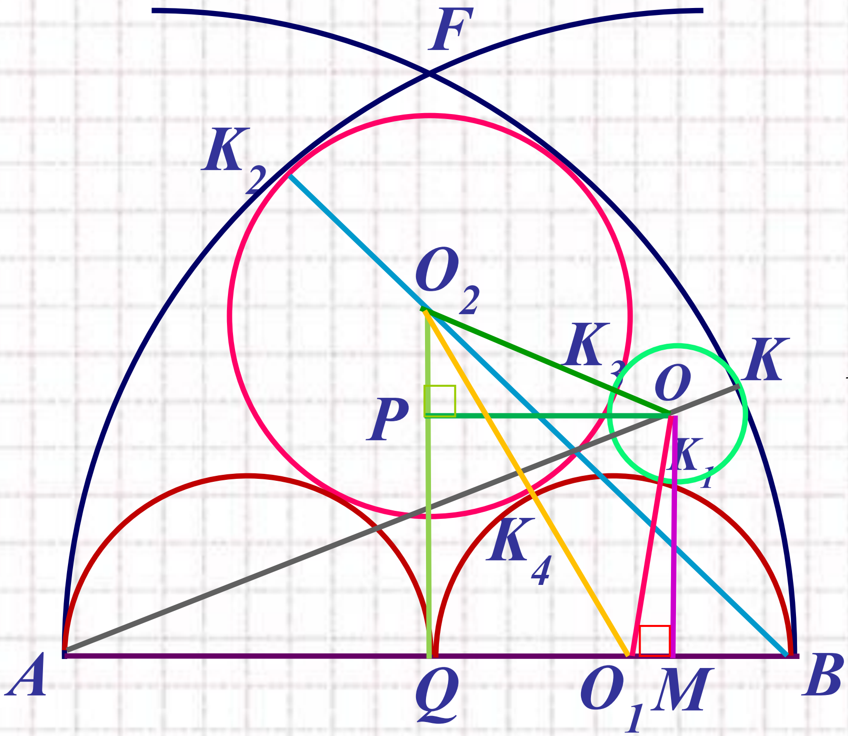


Рис. 3.

Далее, рассматривая прямоугольные треугольники O_1OM и AOM, имеем $(AO + O_1O)(AO - O_1O) = (AM + O_1M)(AM - O_1M)$, где

$AO = AK – OK = R – OK$, $$O_1O = O_1K_1 + K_1O = \frac{R}{4} + OK,$$

$$AM + O_1M = 2AM - \frac{3R}{4} \text{ и } AM - O_1M = \frac{3R}{4}.$$

Поэтому $\frac{5R}{4}\left(\frac{3R}{4} - 2OK\right) = \frac{3R}{4}\left(2AM - \frac{3R}{4}\right)$, откуда $AM = R - \frac{5}{3}OK$

и высота $$OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \frac{2\sqrt{OK(3R-4OK)}}{3}$$

Для окончательного решения задачи осталось определить стороны прямоугольного треугольника OPO_2 и подставить в уравнение $OO_2^{\,2} = O_2P^{\,2} + PO^{\,2}$. Меньший катет $O_2P = O_2Q - PQ$, где

$$0_2Q = \sqrt{BO_2{}^2 - BQ^2} = \frac{R\sqrt{6}}{5},$$ тогда $$O_2P = \frac{R\sqrt{6}}{5} - \frac{2\sqrt{OK(3R-4OK)}}{3}$$

катет $PO = QM = AM - AO = \frac{3R-10OK}{6}$ и гипотенуза

$OO_2 = O_2K_3 + K_3O = \frac{3R+10OK}{10}$. Отсюда получаем

$$\left(\frac{3R+10OK}{10}\right)^2 = \left(\frac{R\sqrt{6}}{5} - \frac{2\sqrt{OK(3R-4OK)}}{3}\right)^2 + \left(\frac{3R-10OK}{6}\right)^2$$

После необходимых преобразований находим искомый радиус

$$OK = \frac{3(19-6\sqrt{6})R}{145}.$$

Задачи для самостоятельного решения

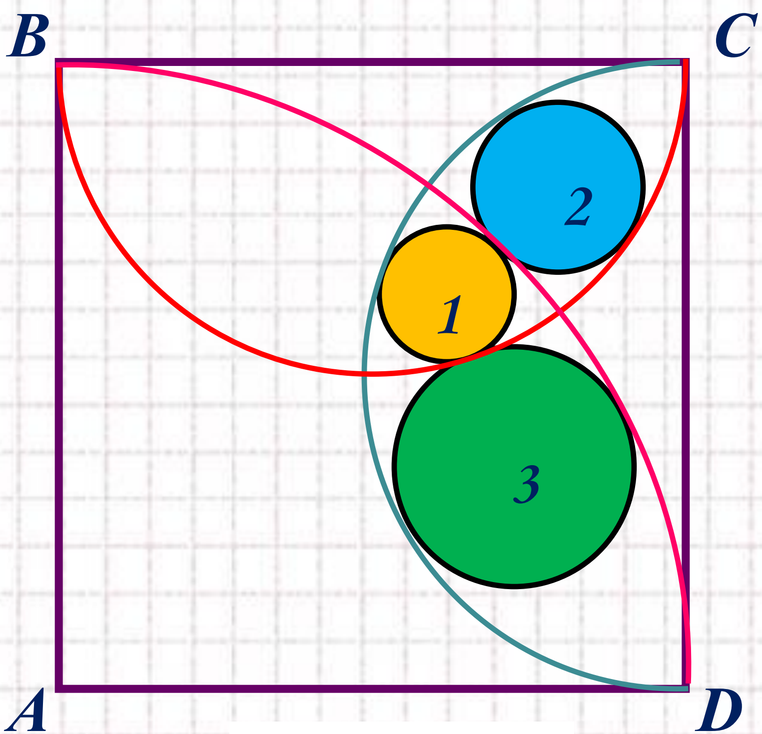


Рис. 4.

Задача 1. *В квадрате ABCD из точки A как из центра проведена внутри квадрата дуга, проходящая через вершины B и D. На сторонах BC и CD как на диаметрах построены внутри квадрата полуокружности. Найти радиус окружности, касающейся построенных полуокружностей и дуги BD, если стороны квадрата равны a.*

Ответ: *Надо рассмотреть отдельно три случая:*

1) $\frac{a(5-3\sqrt{2})}{7}$; 2) $\frac{a(\sqrt{2}-1)}{3}$; 3) $\frac{a(3\sqrt{2}-1)}{17}$.

Задача 2. ***Окружность вписана в квадрат со стороной 1. Из одной его вершины проведена дуга окружности радиуса 1 до пересечения с другими двумя противоположными вершинами. Проведена окружность, которая касается вписанной окружности и проведенной дуги. Найти радиус окружности, касающейся этой окружности, вписанной окружности и дуги.***

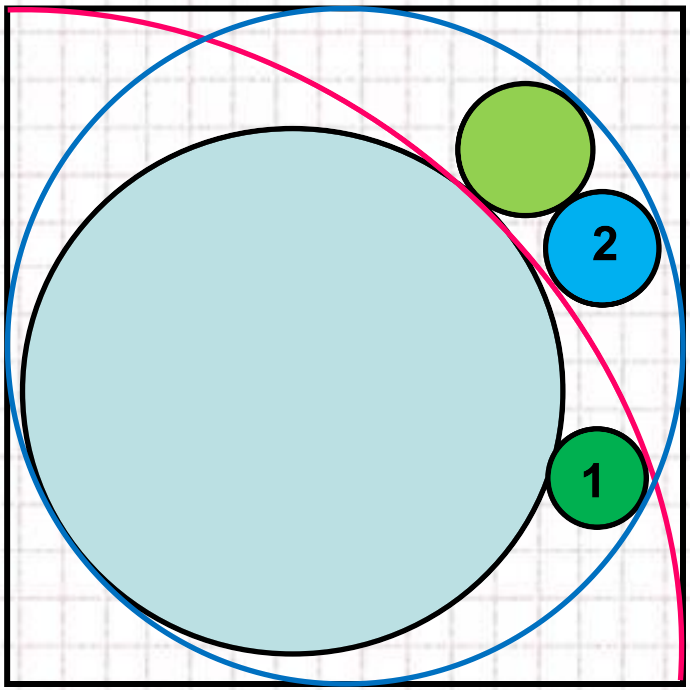


Рис. 5.

Ответ: *Два случая:*

1) $\dfrac{5\sqrt{2}-1}{84}$; 2) $\dfrac{7(4\sqrt{2}-5)}{4(37-17\sqrt{2})}$.

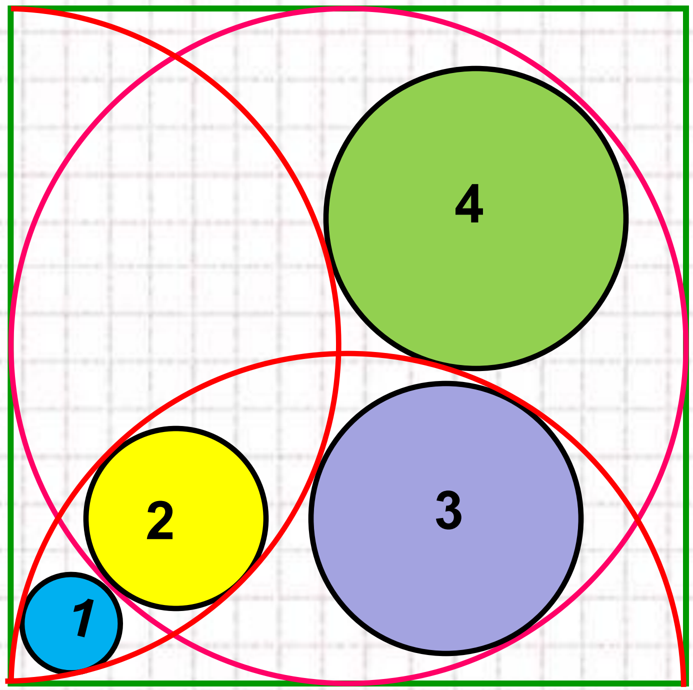


Рис. 6.

Задача 3. ***Около окружности описан квадрат со стороной а. На двух смежных сторонах этого квадрата построены полуокружности, расположенные внутри квадрата. Найти радиус окружности, касающейся этих двух полуокружностей и окружности.***

Ответ: ***Четыре случая:***

1) $\dfrac{a(\sqrt{2}-1)}{2(4-\sqrt{2})}$; 2) $\dfrac{a(2-\sqrt{2})}{4}$; 3) $\dfrac{a}{2\sqrt{6}}$; 4) $\dfrac{a(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}+4)}$.

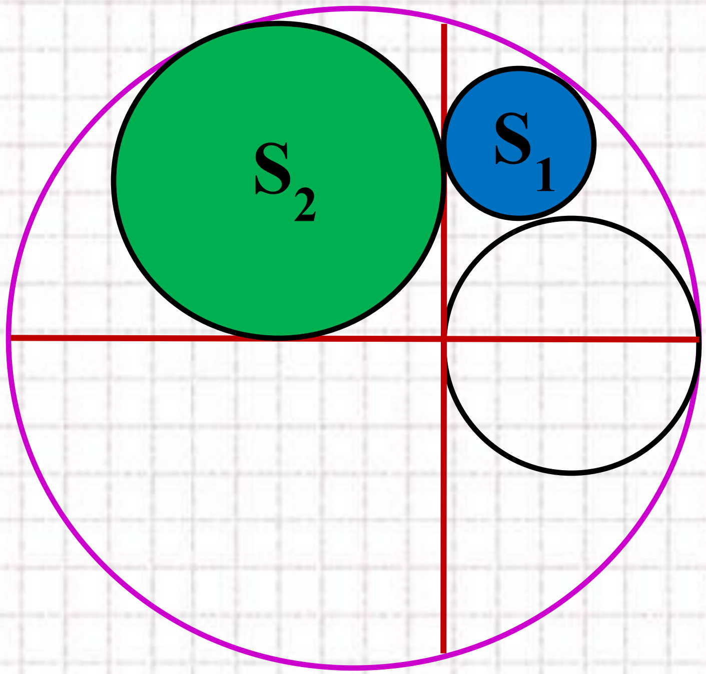


Рис. 7.

Задача 4. *Две окружности радиусов a и b (a < b) имеют внутреннее касание. Внутри большей окружности проведена касательная к меньшей окружности, перпендикулярная к общему диаметру этих окружностей. Доказать, что отношение радиуса окружности S_1, касающейся двух данных окружностей и проведенной касательной, к радиусу окружности S_2, касающейся большей окружности, проведенной касательной и общего диаметра двух данных окружностей, равно*

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{a}{b}\right).$$

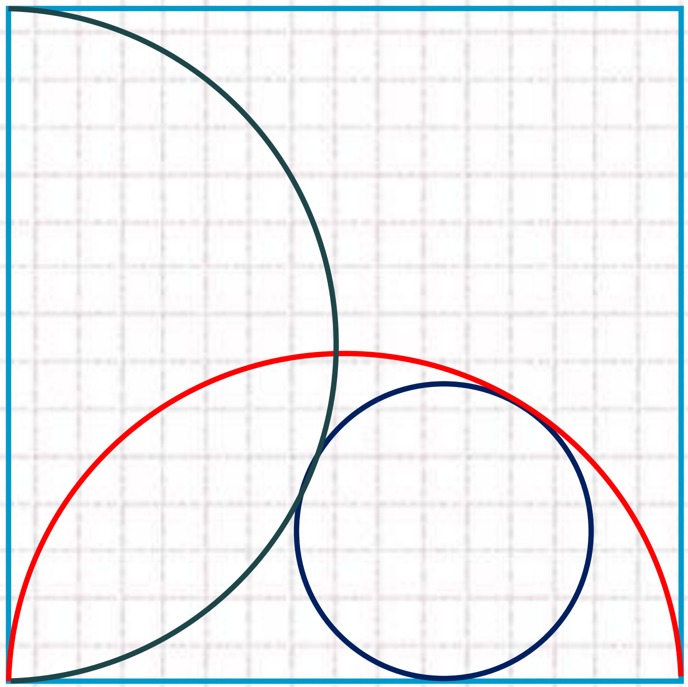


Рис. 8.

Задача 5. Внутри квадрата со стороной a на двух его смежных сторонах как на диаметрах построены полуокружности. Найти радиус окружности, касающейся этих двух построенных полуокружностей и одной из сторон данного квадрата.

Ответ: $\frac{2a}{9}$.