

Подобные треугольники

Повторение к ОГЭ

Наиболее часто встречающиеся теоретические вопросы

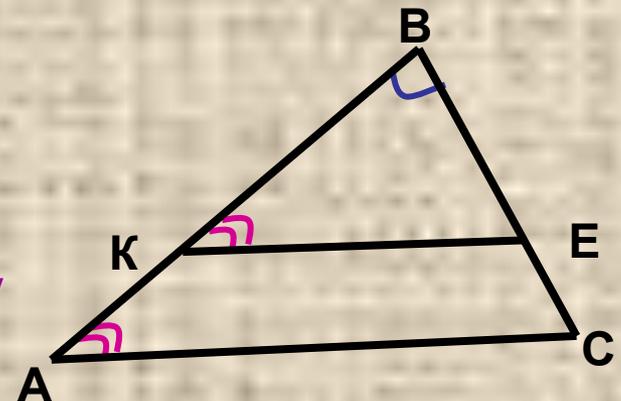
- **Признаки подобия треугольников:**

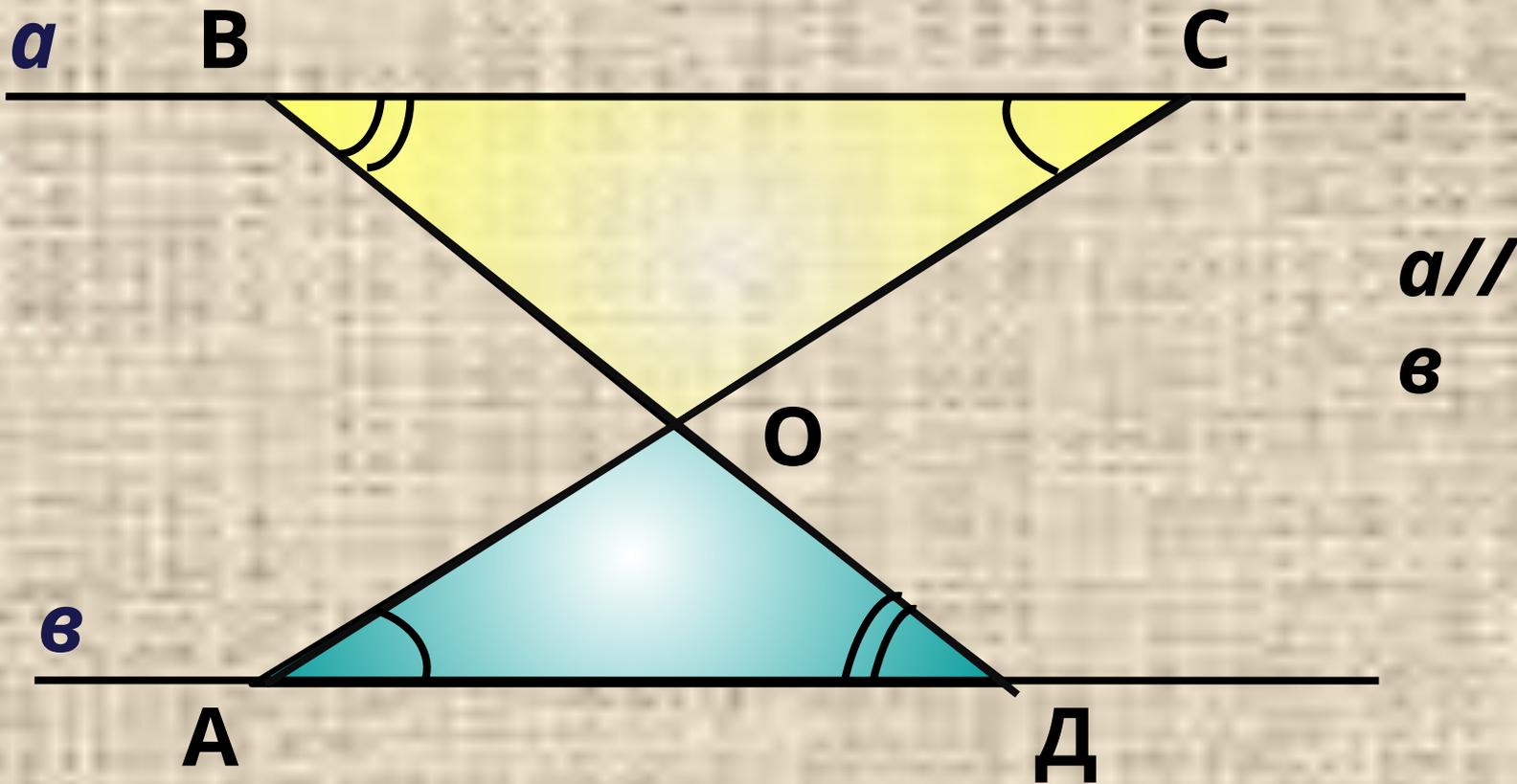
1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

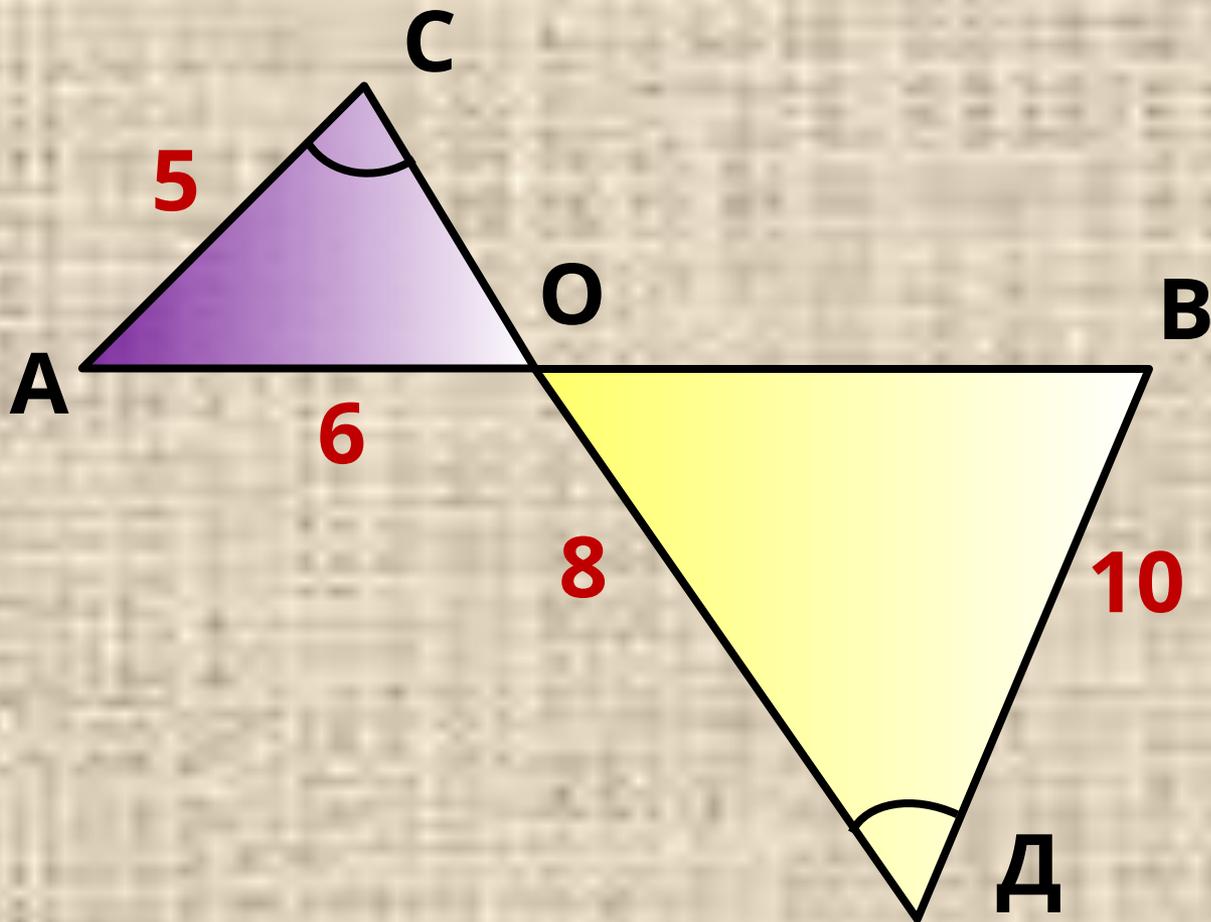
3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

- **Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному (почему)?**

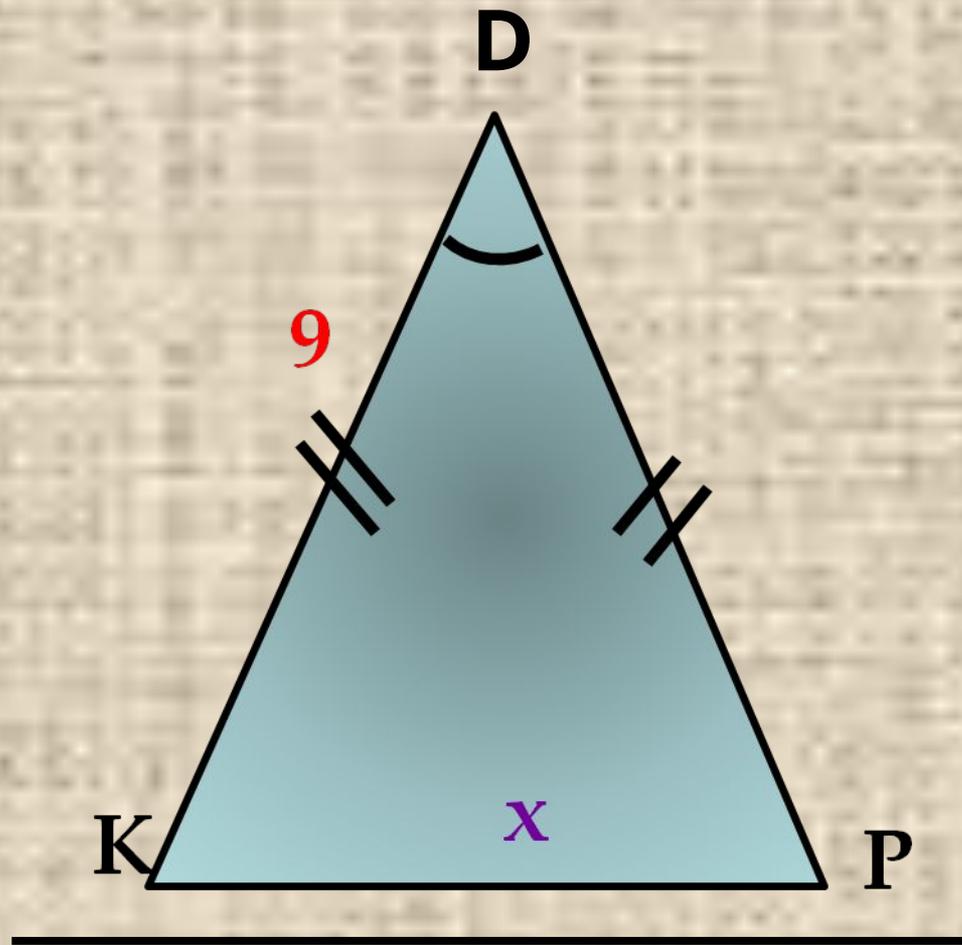
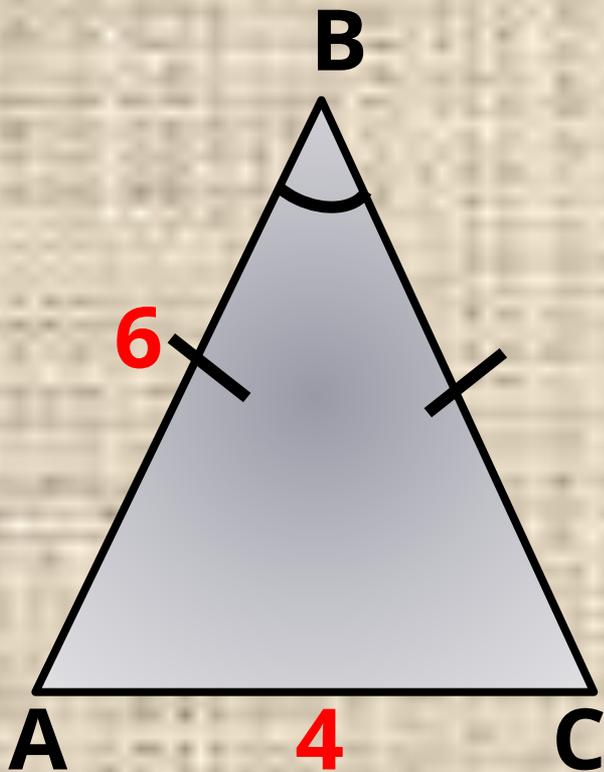




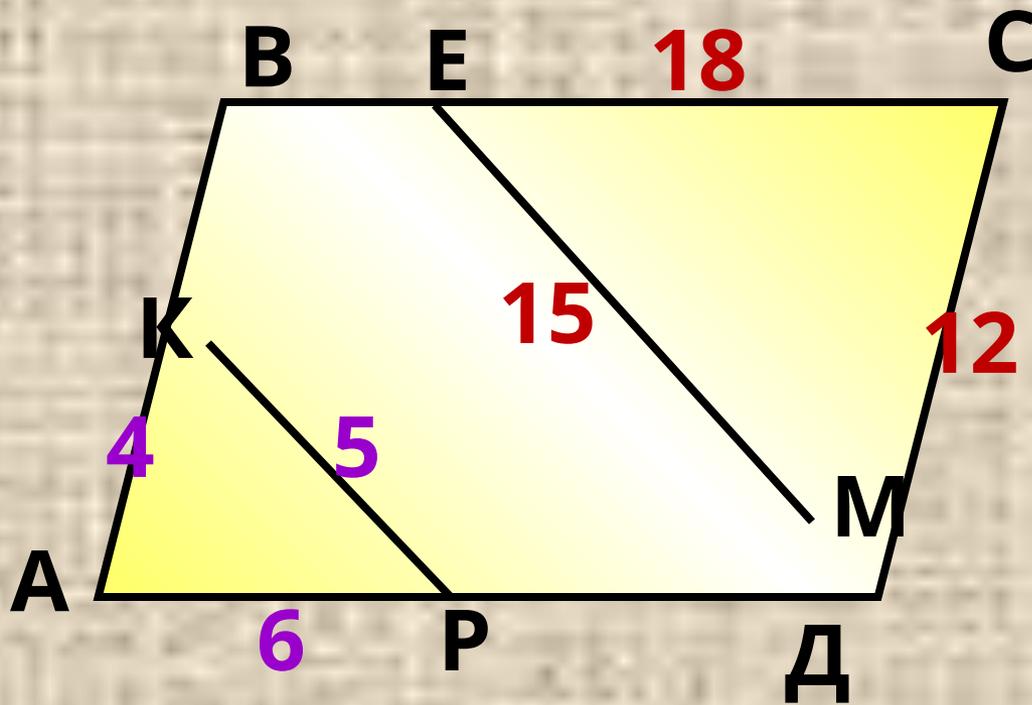
Доказать: $\triangle BOC \sim \triangle AOD$



Найти: CO ; OB

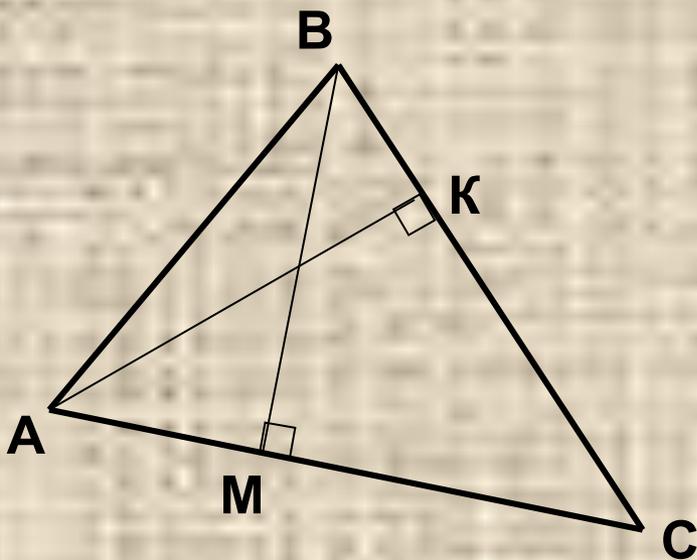


Найти: x

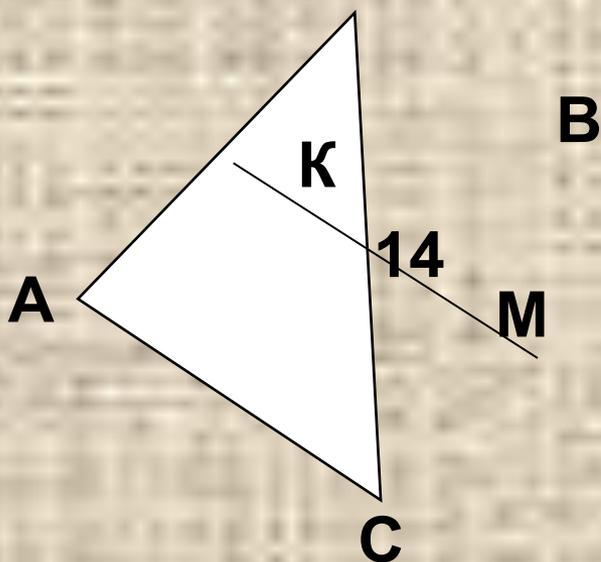


Доказать $\triangle AKP \sim \triangle CME$

1. Даны два подобных треугольника. Стороны одного из них равны 12 см, 8 см, 6 см, а меньшая сторона другого равна 9 см. Найдите две другие его стороны.
2. В треугольнике ABC проведены две высоты АК и ВМ.
 - 1) Докажите, что $\triangle AKC \sim \triangle BMC$.
 - 2) Найдите высоту ВМ, если $AK = 18$, $CM = 4$, $CK = 6$.



Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC , если $BK : KA = 2 : 3$, $KM = 14$.



Решение:

Треугольники ABC и KBM подобны:
угол B - общий,
углы BAC и BKM равны как
соответственные при параллельных
прямым AC и KM и секущей AB),
поэтому $KM : AC = BK : BA$.

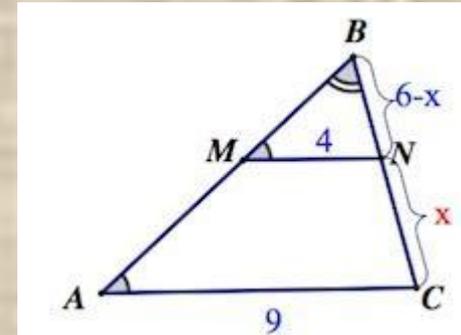
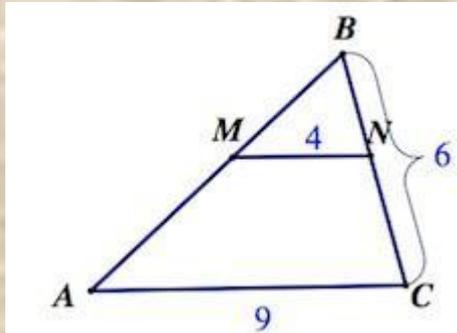
Т.к. $BK : KA = 2 : 3$, то $BK : BA = 2 : 5$.

Имеем, $AC = KM * BA : BK$,

$$AC = 14 * 5 : 2 = 35$$

Ответ: 35.

- Через точки M и N , принадлежащие сторонам AB и BC треугольника ABC соответственно, проведена прямая MN , параллельная стороне AC . Найдите длину CN , если $BC = 6$, $MN = 4$ и $AC = 9$.

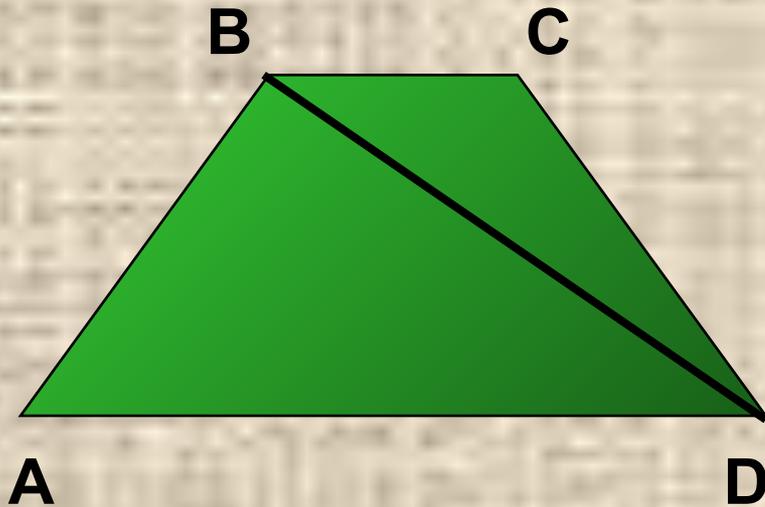


- Решение: треугольники MBN и ABC подобны по первому признаку подобия., так как
- 1) у треугольников MBN и ABC угол B – общий 2) в силу параллельности прямых MN и AC соответственные углы BMN и BAC равны.
- Из подобия треугольников вытекает пропорциональность соответствующих сторон:

$$\frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$$
- Обозначим NC за x . Соответственно, $BN = 6 - x$, согласно условию. Тогда

$$\frac{6 - x}{6} = \frac{4}{9}$$
 . Тогда $CN = 3\frac{1}{3}$

Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 5 и 20, BD=10. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.



Решение:

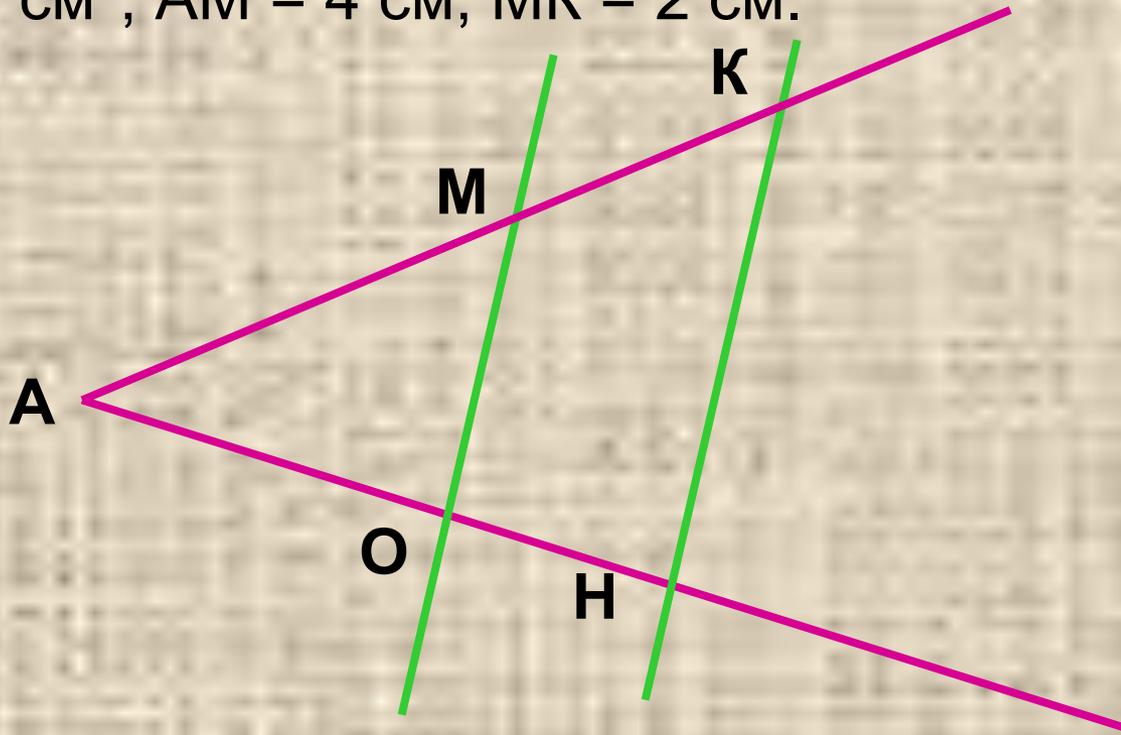
Углы CBD и BDA равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BD.

Стороны BC и BD в $\triangle CBD$ пропорциональны сторонам BD и AD в $\triangle BDA$ соответственно, т.к.
 $BC : BD = 5 : 10 = 0,5$ и
 $BD : AD = 10 : 20 = 0,5$.
Значит, эти треугольники подобны (по второму признаку).

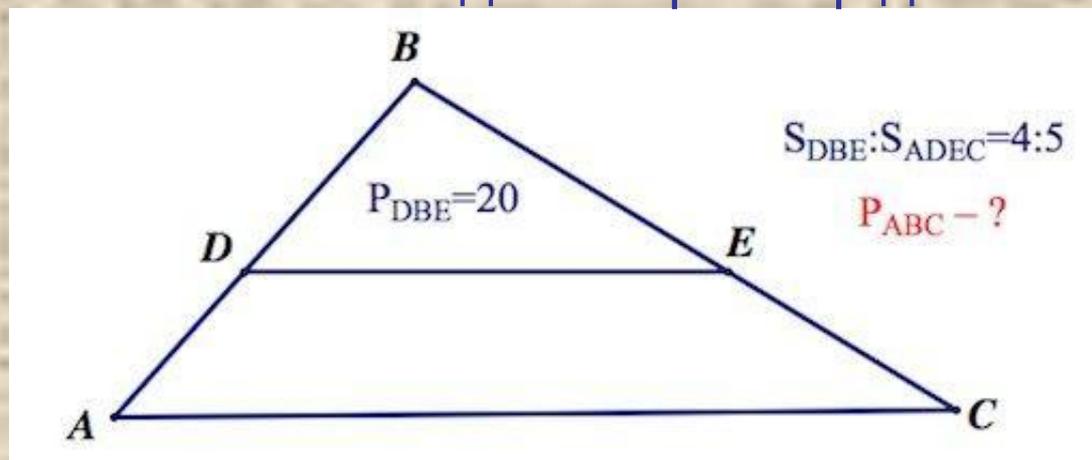
Наиболее часто встречающиеся теоретические вопросы

- Отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия
- Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия
- В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных исходному.

1). Прямые MO и KH , пересекающие стороны угла A , параллельны (M и K лежат на одной стороне угла). Найдите площадь треугольника AMO , если известно, что площадь треугольника AKH равна 48 см^2 , $AM = 4 \text{ см}$, $MK = 2 \text{ см}$.

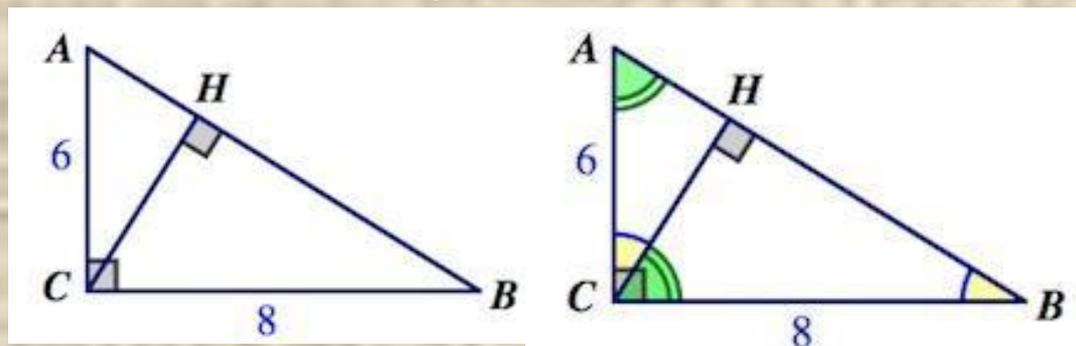


- 2). Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на треугольник и трапецию, площади которых относятся как 4:5. Периметр образовавшегося треугольника равен 20 см. Найдите периметр данного треугольника.



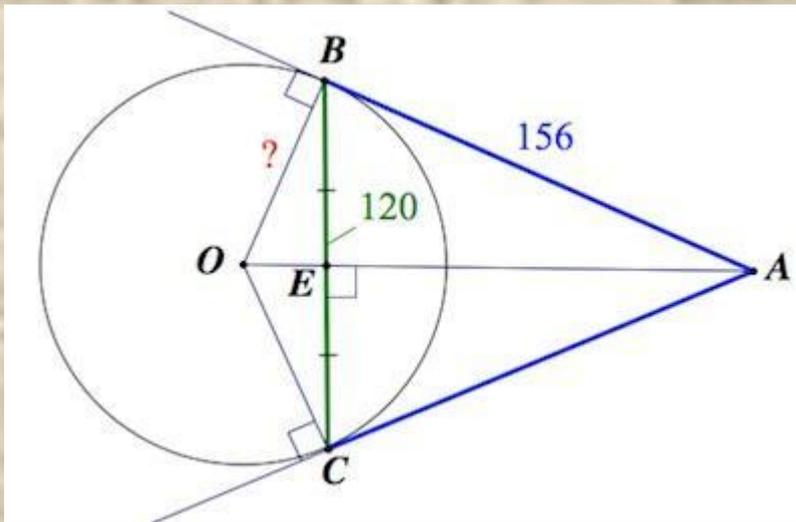
Ответ: 30.

- 3). Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 см проведен перпендикуляр к гипотенузе. Вычислите площади образовавшихся треугольников.



Ответ: 24; 8,64; 15,36.

- 4). Из одной точки проведены к кругу две касательные. Длина касательной равна 156, а расстояние между точками касания равно 120. Найдите радиус круга.



Ответ: 65

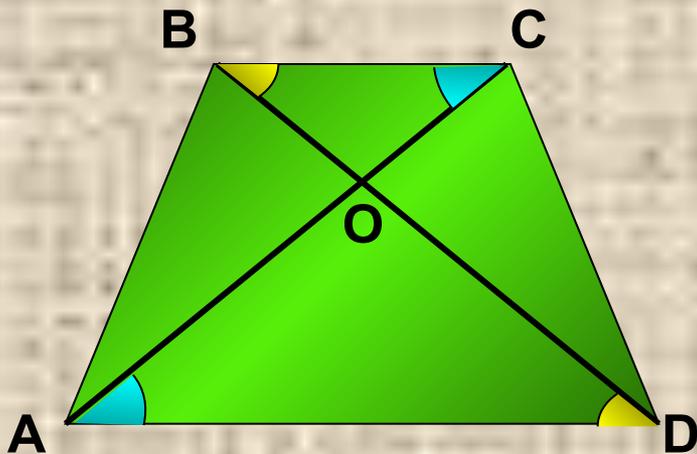
План решения:

1. Найдите подобные треугольники и докажите их подобие
2. Запишите отношение сходственных сторон
3. Выполните необходимые вычисления
4. Запишите ответ

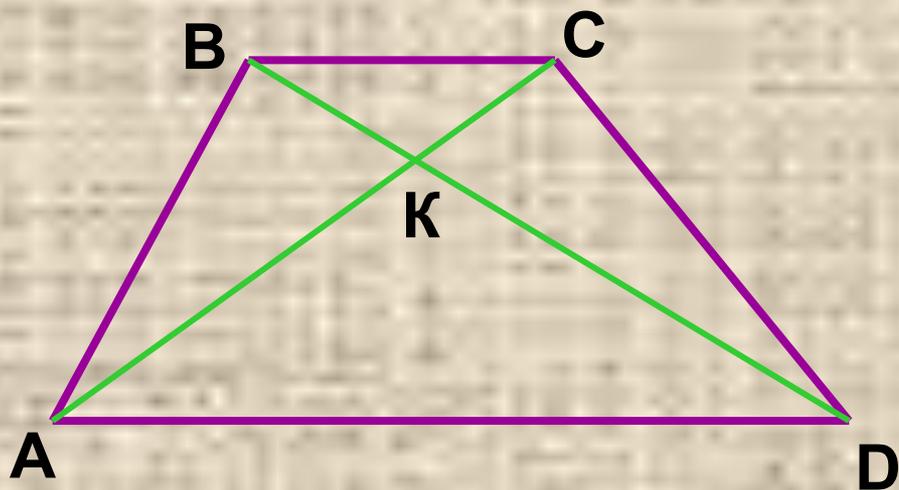
- (№24) Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 16$, $DC = 24$, $AC = 25$.
- (№26) Основания трапеции относятся как $2 : 3$. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?
- (№26) Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 16 . Окружность радиуса 12 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Наиболее часто встречающиеся теоретические вопросы

- Треугольники AOD и COB , образованные отрезками диагоналей и основаниями трапеции, подобны. Коэффициент подобия $k = AO : CO$



Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K , причем отрезок BK составляет треть от диагонали BD . Найдите основание AD , если $BC = 12$ см.



РЕШЕНИЕ:

Треугольники BKC и AKD подобны по двум углам.

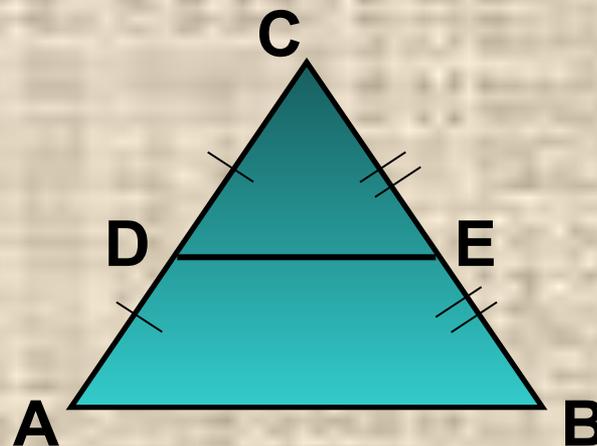
По условию BK – треть BD , тогда $BK : KD = 1 : 2$, значит $BC : AD = 1 : 2$, значит $AD = 24$.

Ответ: 24 см.

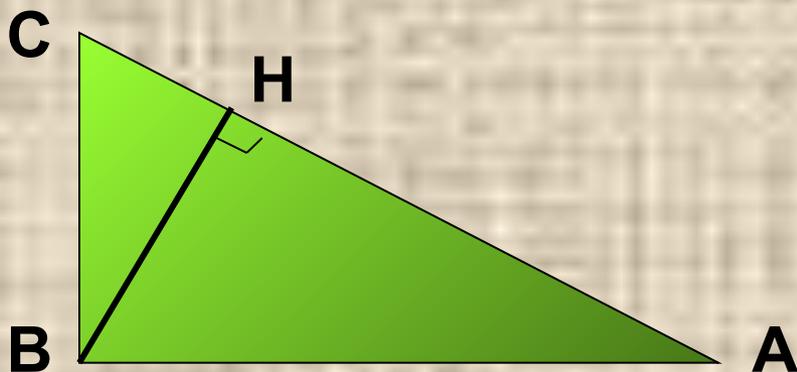
Наиболее часто встречающиеся теоретические вопросы

- Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.
- Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.
- Отношение сходственных сторон подобных треугольников равно отношению высот, проведенных к этим сторонам.
- Катет прямоугольного треугольника является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

- В треугольнике ABC DE – средняя линия. Площадь треугольника CDE равна 45. Найдите площадь треугольника ABC .



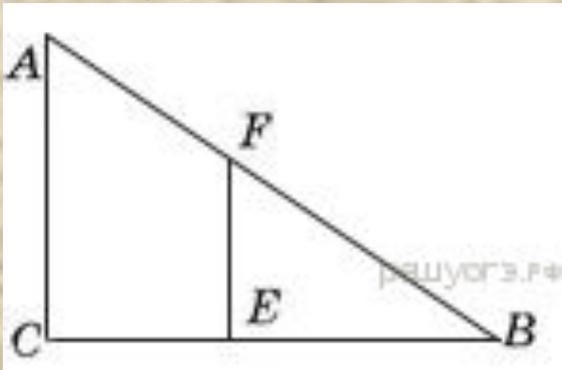
- Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите AB , если $AH=7$, $AC=28$.



Задачи практического содержания

Определение высоты предмета.

Задание 17 № 132764. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна четырем шагам. На какой высоте (в метрах) расположен фонарь?

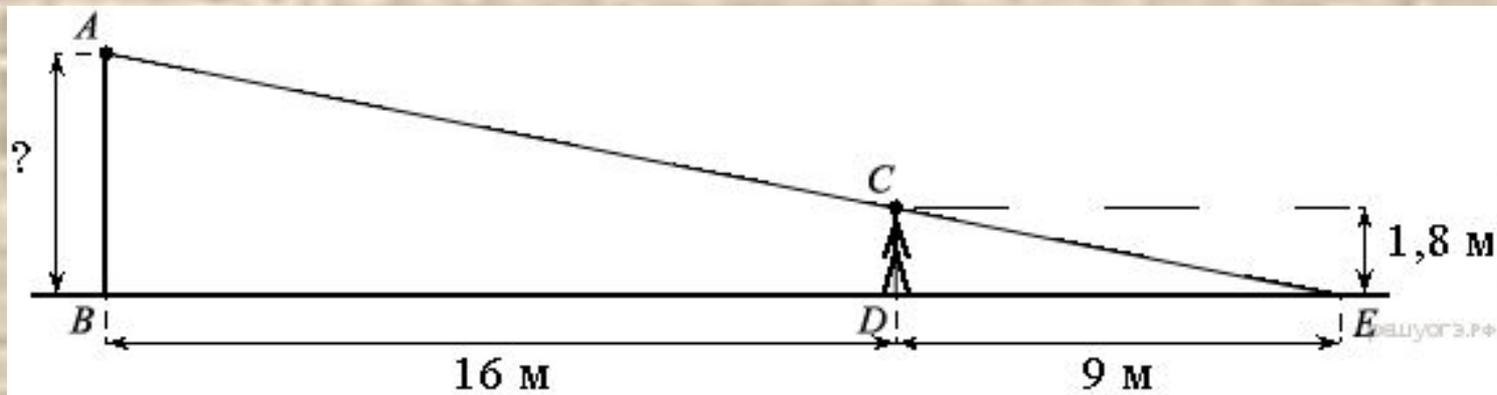


Решение.

Столб и человек образуют два прямоугольных треугольника ABC и FEB . Эти треугольники подобны по двум углам. Пусть высота фонаря равна x м, тогда, откуда. Поэтому фонарь расположен на высоте 5,1 м.

Ответ: 5,1.

Задание 17 № 314914. Человек, рост которого равен 1,8 м, стоит на расстоянии 16 м от уличного фонаря. При этом длина тени человека равна 9 м. Определите высоту фонаря (в метрах).

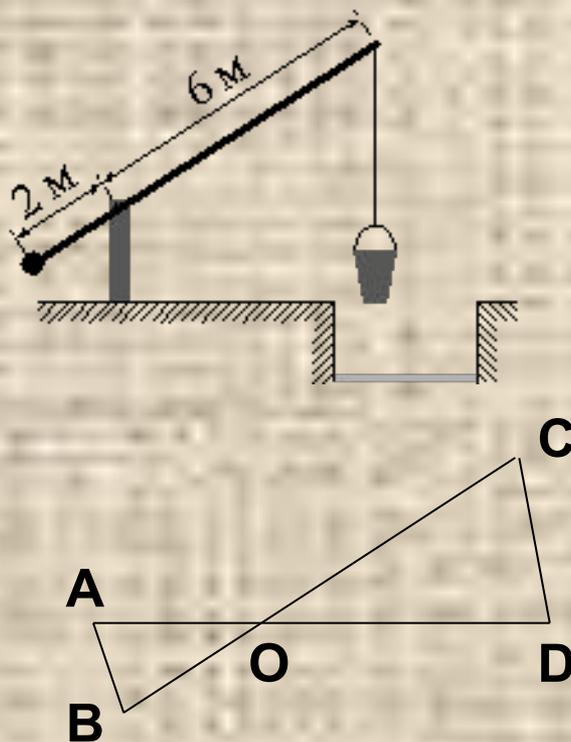


Решение:

Введём обозначения, как показано на рисунке. Рассмотрим прямоугольные треугольники AEB и CDE , они имеют общий угол E и, следовательно, подобны по двум углам.

Значит, $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}$, откуда $AB = CD \frac{BE}{DE} = 1,8 \cdot \frac{16 + 9}{9} = 5$ м

(№26) На рисунке изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 2 м, а длинное плечо — 6 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 0,5 м?



Дано: $BO=2$ м, $OC=6$ м,
 $AB=0,5$ м.

Найти: CD

Решение:

Треугольники ABO и DCO
подобны (по двум углам),

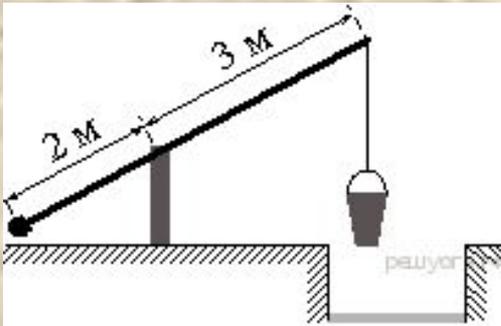
$$AB : CD = BO : OC,$$

$$CD = AB \cdot OC : BO,$$

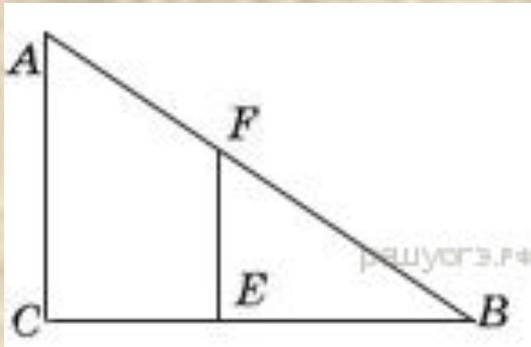
$$CD = 0,5 \cdot 6 : 2 = 1,5 \text{ (м)}.$$

Ответ: 1,5

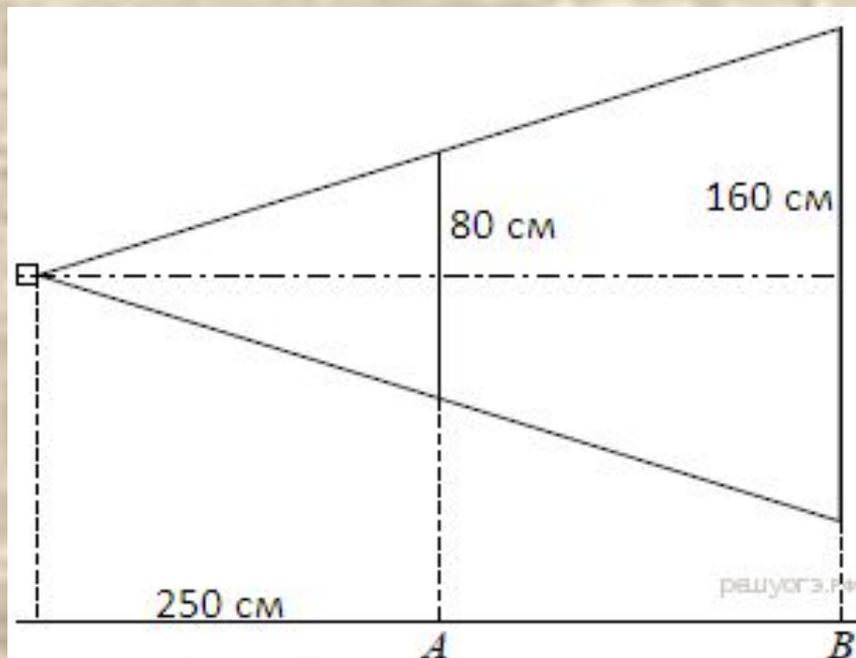
- (№26) На рисунке изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 2 м, а длинное плечо — 3 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 1 м?



- (№17) Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 12 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 5,4 м. Найдите длину тени человека в метрах.



- **(№17) № 44.** Проектор полностью освещает экран A высотой 80 см, расположенный на расстоянии 250 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 160 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?

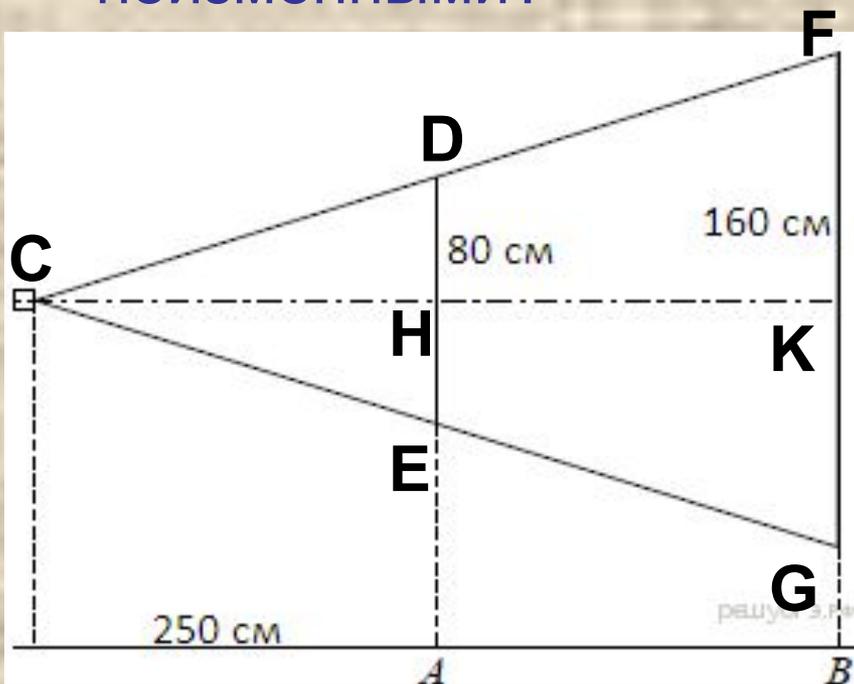


Ответ: 500.

Решение (1 способ)

Заметим, что высота экрана, расположенного на расстоянии 250 см, в 2 раза меньше высоты экрана, расположенного на искомом расстоянии, значит, по теореме о средней линии, искомое расстояние в два раза больше первоначального экрана: $250 \cdot 2 = 500$.

- (№17) № 44. Проектор полностью освещает экран A высотой 80 см, расположенный на расстоянии 250 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 160 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?



Решение (2 способ)

По условию $FG=160$ см,
 $DE=80$ см, $CH=250$ см.

Найти: CK.

$\triangle CFG \sim \triangle CDE$ (признак?),

поэтому

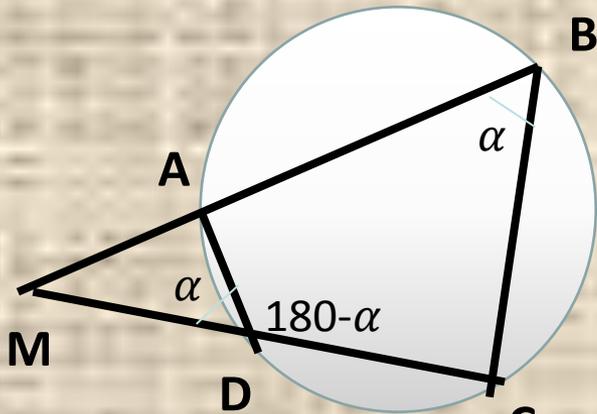
$$CH : CK = DE : FG.$$

$$CK = CH * FG : DE$$

$$CK = 250 * 160 : 80 = 500$$

Ответ: 500.

Стр.357 **Задача 25.** Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M . Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

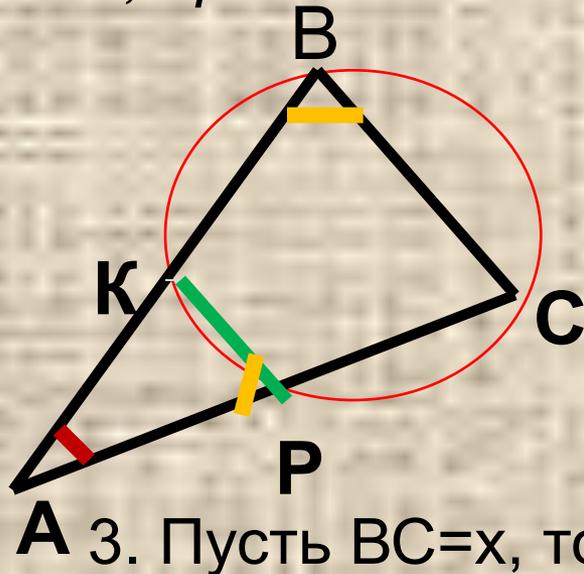


РЕШЕНИЕ.

1. По свойству углов вписанного четырёхугольника (п.75) сумма противоположных углов 4-угольника равна 180° .
2. Пусть $\angle B = \alpha$, тогда $\angle ADC = 180 - \alpha$.
3. По свойству смежных углов $\angle MDA = 180 - (180 - \alpha) = \alpha$.
4. Рассмотрим $\triangle MBC$ и $\triangle MDA$.
 $\angle M$ – общий, $\angle B = \angle MDA = \alpha$.
 $\triangle MBC \sim \triangle MDA$ по двум углам.

9B683D

Стр.357,356. **ЗАДАЧА 24.** Окружность пересекает стороны AB и AC $\triangle ABC$ в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AK=16$, а сторона AC в 1,6 раза больше стороны BC .



РЕШЕНИЕ.

1. $\triangle AKP \sim \triangle ABC$ (см. предыдущую задачу) по двум углам. $\angle A$ общий, $\angle B = \angle KPA$.

2. Если \triangle подобны, то стороны пропорциональны (по определению).

Составим пропорцию

$$\frac{AK}{AC} = \frac{KP}{BC} = \frac{AP}{AB}$$

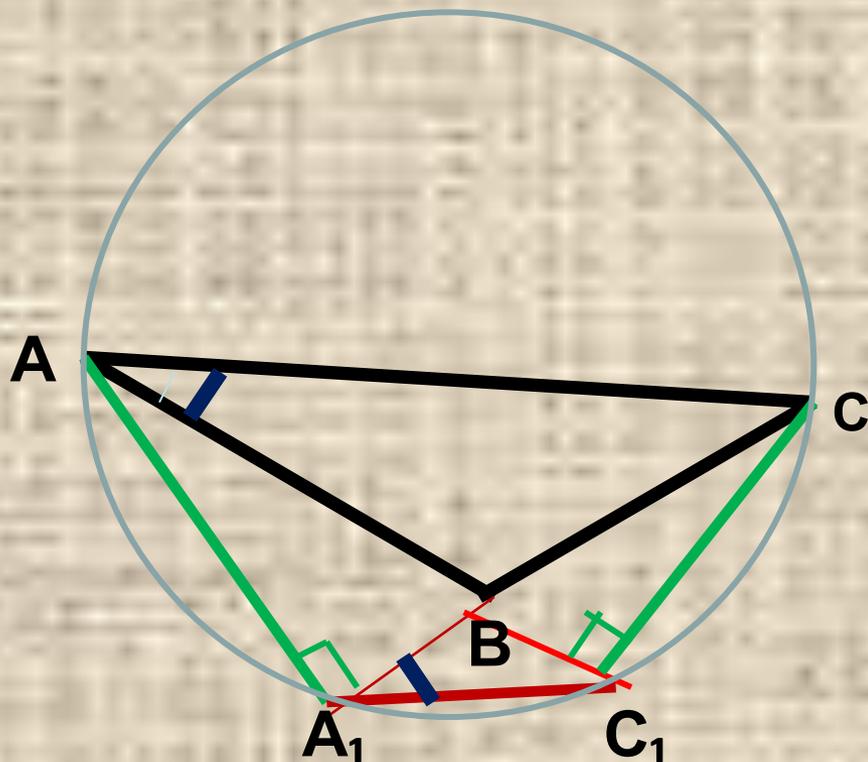
3. Пусть $BC=x$, тогда $AC=1,6x$.

$$\frac{16}{1,6x} = \frac{KP}{x}$$

$$KP = \frac{16 * x}{1,6 * x} = 10$$

ОТВЕТ : $KP=10$.

Стр. 361 Задача 25. В $\triangle ABC$ с тупым $\angle ABC$ проведены высоты AA_1 и CC_1 . Докажите, что $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$.



РЕШЕНИЕ:
(1 способ)

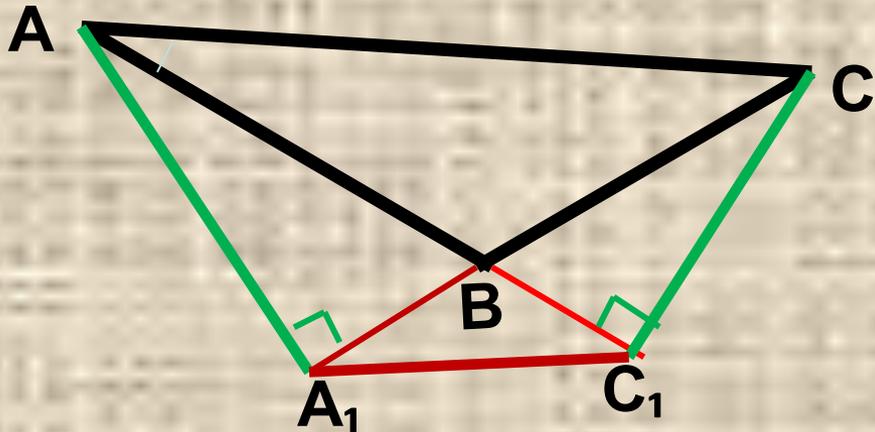
1. $\angle AA_1C = \angle CC_1A = 90^\circ$;
AC диаметр окружности,
описанной около $\triangle AA_1C$ и
 $\triangle AC_1C$.

2. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle A_1BC_1$:
 $\angle ABC = \angle A_1BC_1$ (вертикальные),
 $\angle SAC_1 = \angle CA_1C_1$ (вписанные углы
опираются на дугу CC_1)

$\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$ по двум
углам.

(B35E5A)

Стр. 361 Задача 25. В $\triangle ABC$ с тупым $\angle ABC$ проведены высоты AA_1 и CC_1 . Докажите, что $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$.



РЕШЕНИЕ:

(2 способ).

1. $\triangle ABA_1$ и $\triangle CBC_1$ прямоугольные:
 $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$,
 $\angle ABA_1 = \angle CBC_1$ (вертикальные).
 $\triangle ABA_1 \sim \triangle CBC_1$ (по двум углам).

2. Из подобия треугольников составляем пропорцию
 По свойству пропорции получаем

$$\frac{AB}{A_1B} = \frac{CB}{C_1B}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B}{C_1B}$$

3. В $\triangle ABC$ и $\triangle A_1BC_1$ стороны пропорциональны и углы между ними равны (вертикальные $\angle ABC = \angle A_1BC_1$).

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$$

Приложение

1. AM и BK – перпендикуляры к прямой a , точки M и K – основания перпендикуляров. $AK \cap BM = O$.
Найдите AM и MK , если $MO = 6$, $BO = 4$, $BK = 6$.
2. В треугольнике OBC проведен отрезок MK , параллельный стороне BC . Найдите отношение площадей треугольника OMK и трапеции $MBCK$, если $OM = 4$, $MB = 12$.
3. В треугольнике MPK сторона MK равна 12. Биссектриса MA делит сторону PK на отрезки $AK = 8$, $AP = 10$. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону MP биссектриса KB .

Приложение

- Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC , если $BK:KA=3:7$, $KM=12$.
- Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC , если $BK:KA=1:5$, $KM=17$.
- Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN , если $MN=12$, $AC=42$, $NC=25$.
- Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN , если $MN=13$, $AC=65$, $NC=28$.

Приложение

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно $4,5$ и 18 , $BD=9$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4 и 64 , $BD=16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

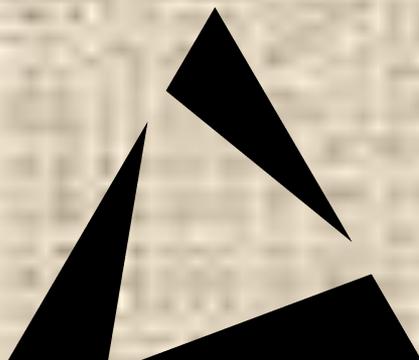
Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12 , $BD=6$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите AB , если $AH=3$, $AC=12$.

Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите AB , если $AH=10$, $AC=40$.

Задачи на готовых чертежах

Признаки подобия треугольников



Литература

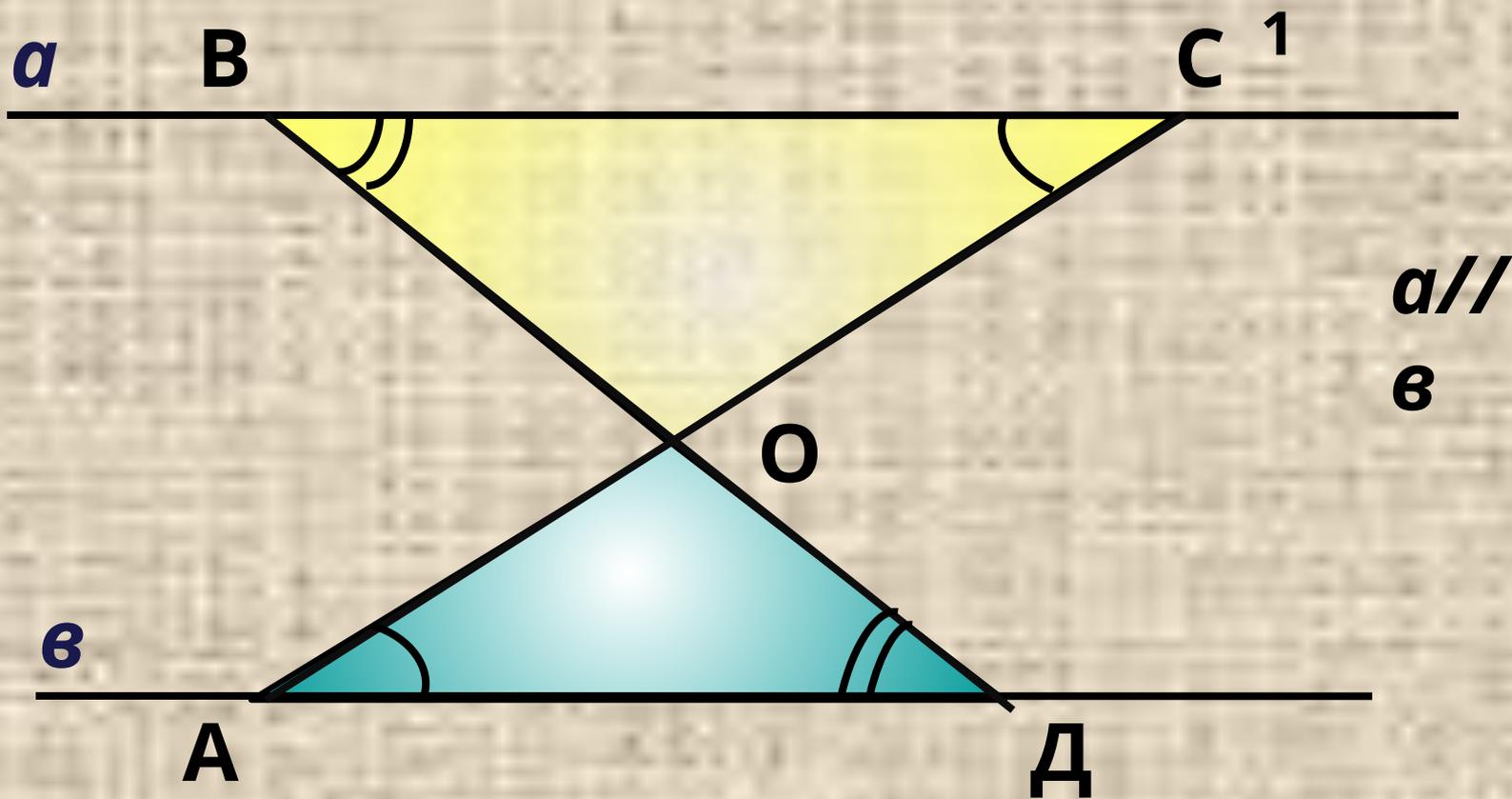
Первый признак подобия треугольников



- | | | | | |
|---|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |



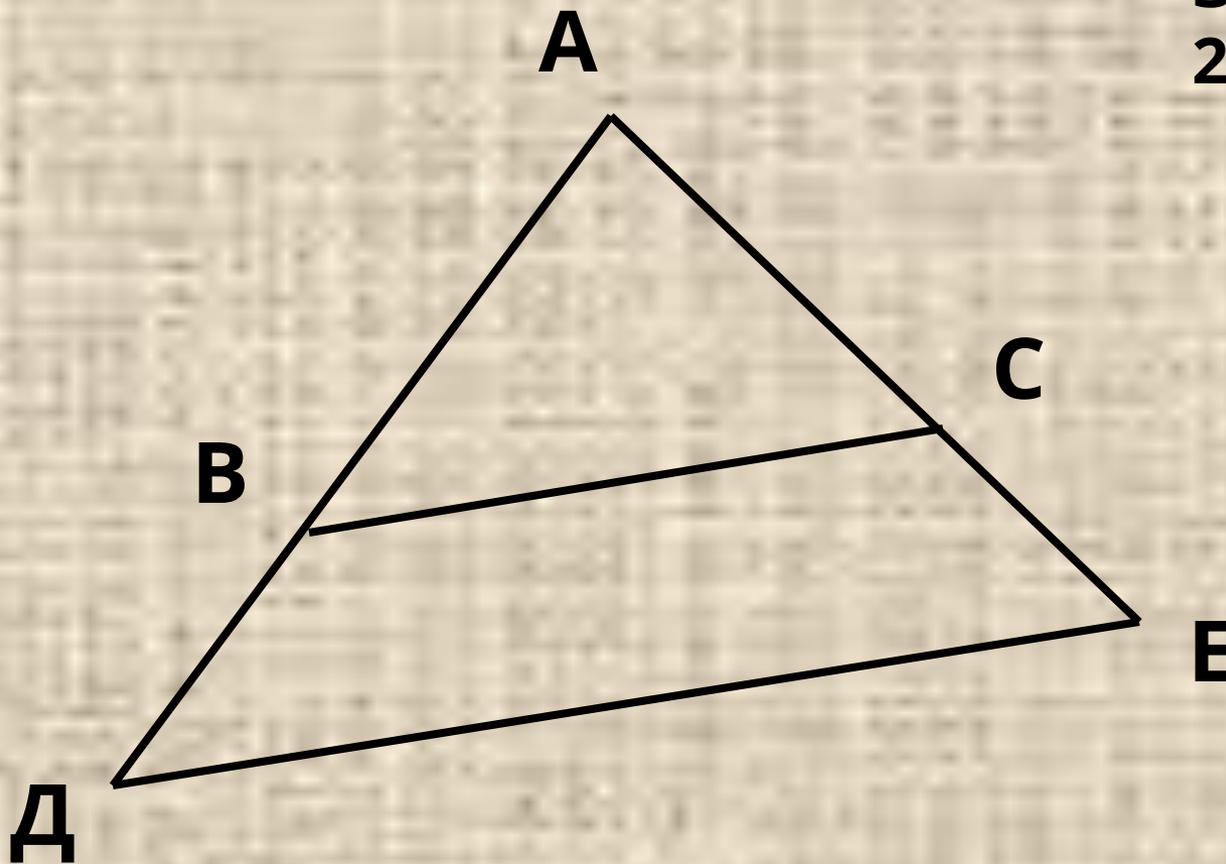
Задача



Доказать: $\triangle BOC \sim \triangle AOD$



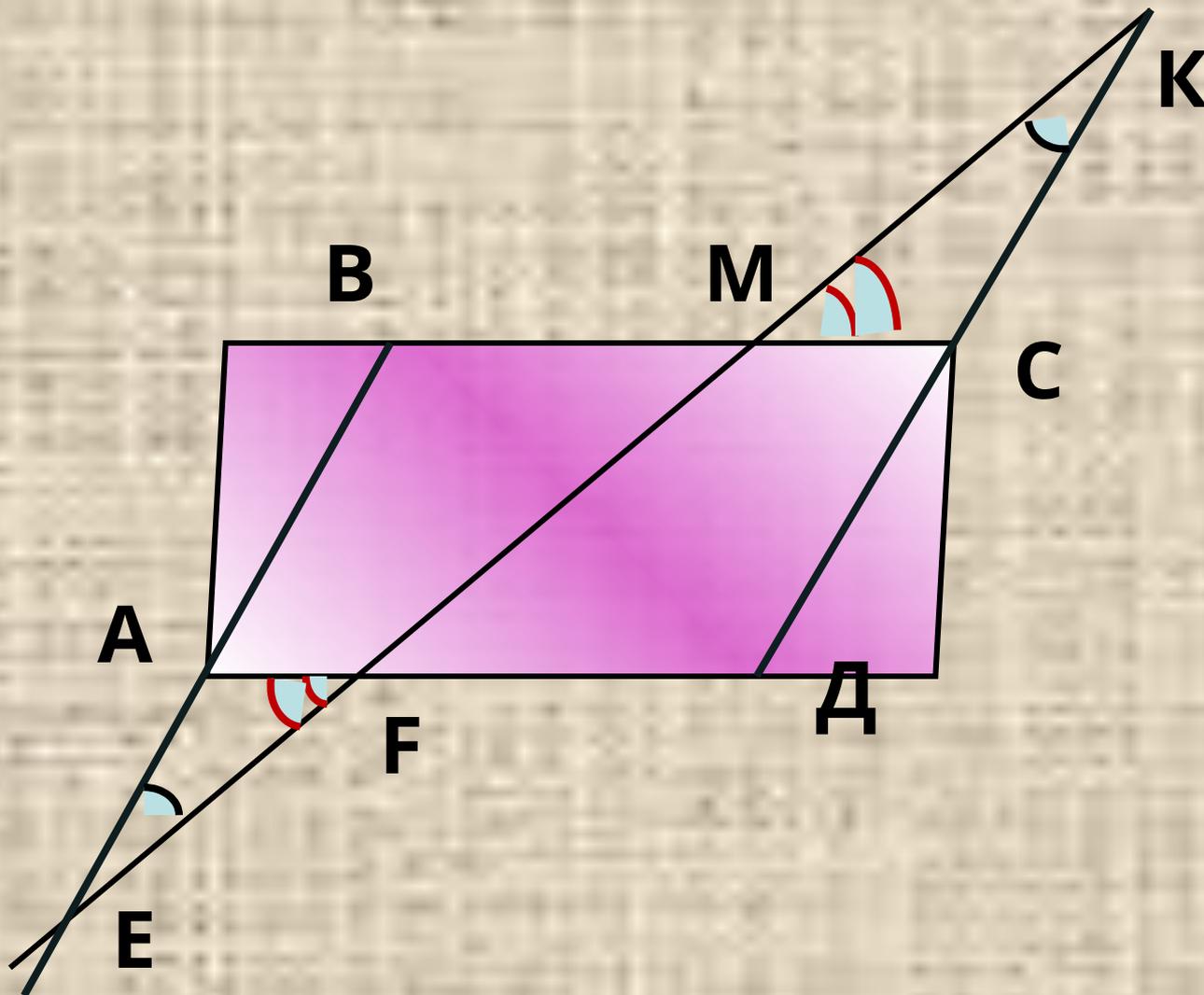
Задача
2



Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$



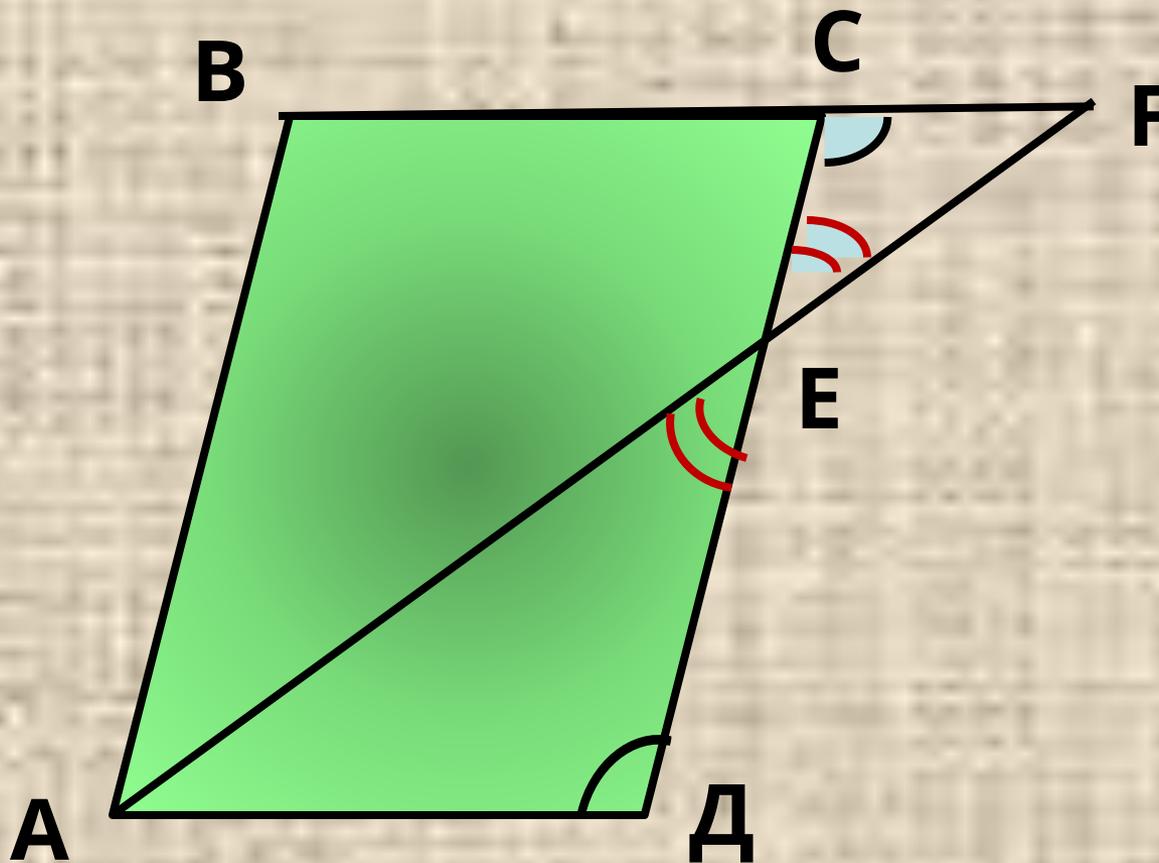
Задача
3



Доказать: $\triangle AFE \sim \triangle CMK$



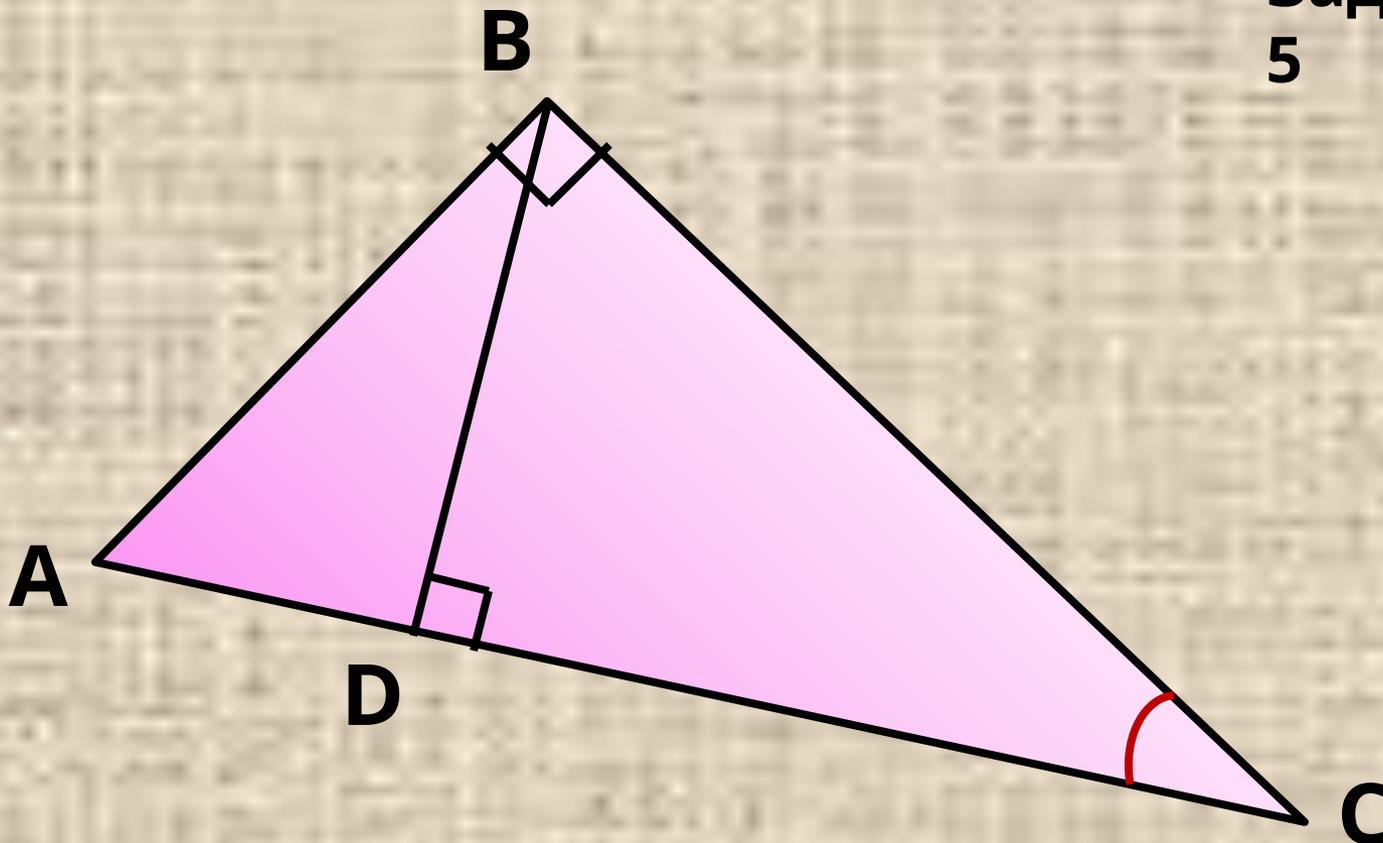
Задача
4



Доказать: $\triangle ADE \sim \triangle FCE$



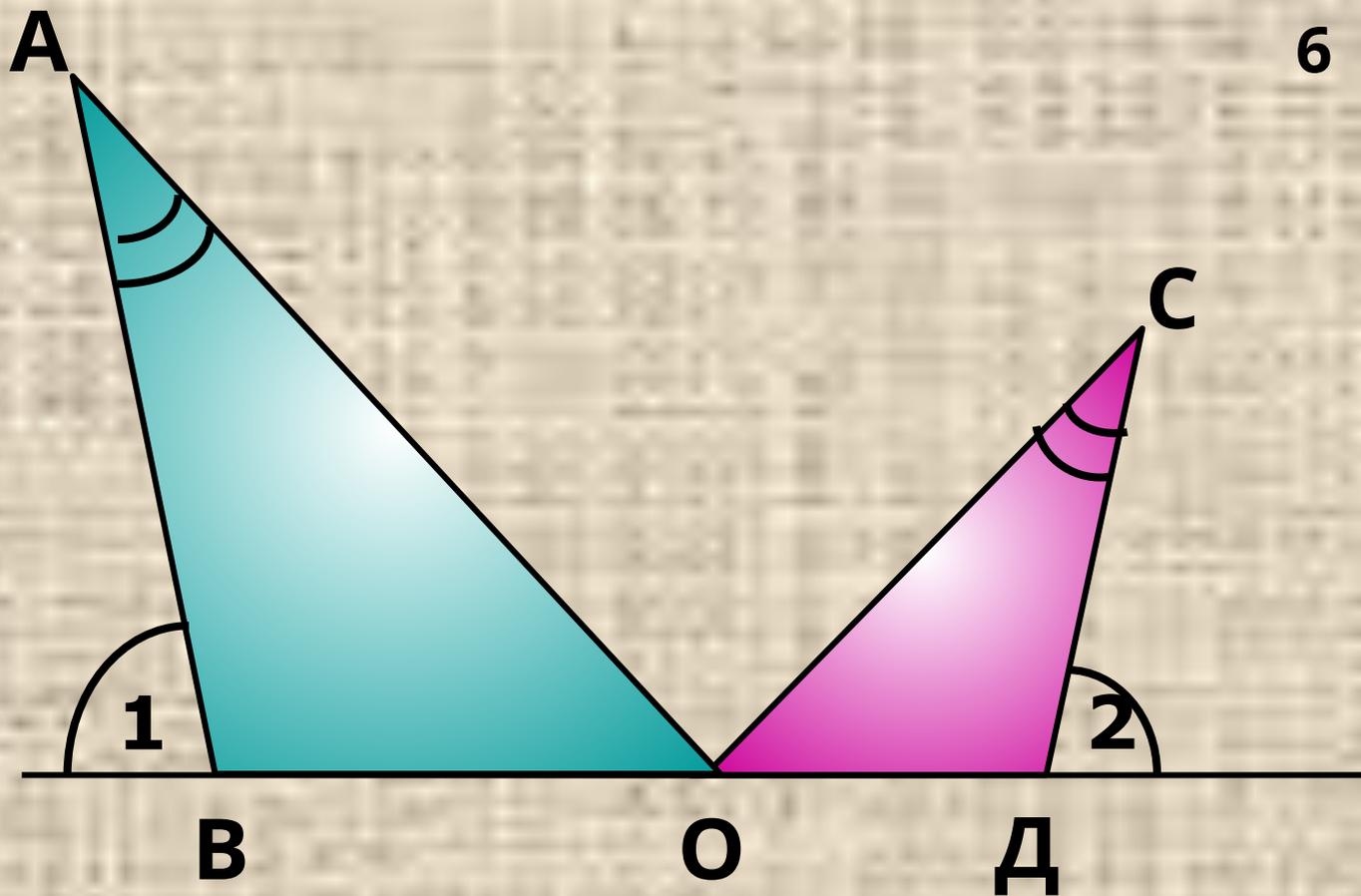
Задача
5



Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle BDC$



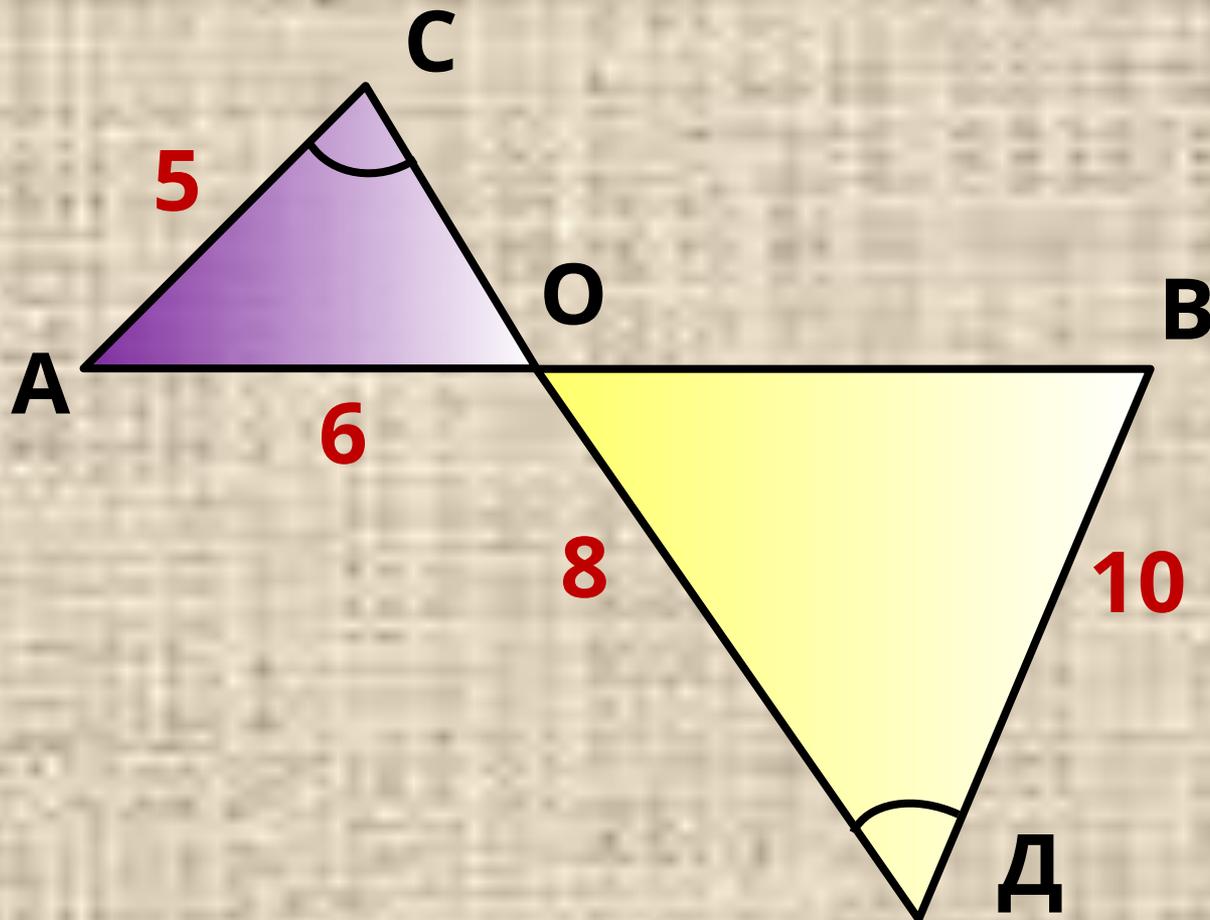
Задача
6



Доказать:
AO/CO



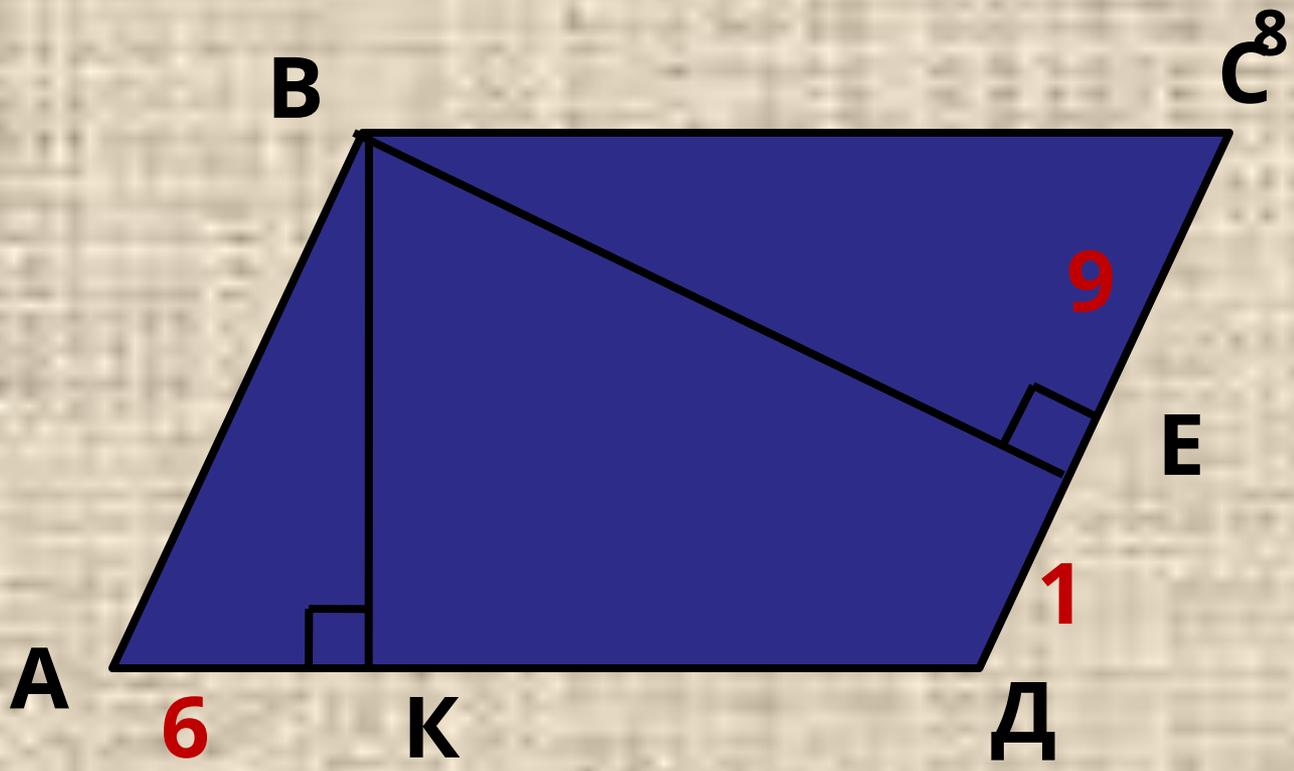
Задача
7



Найти: CO ; OB



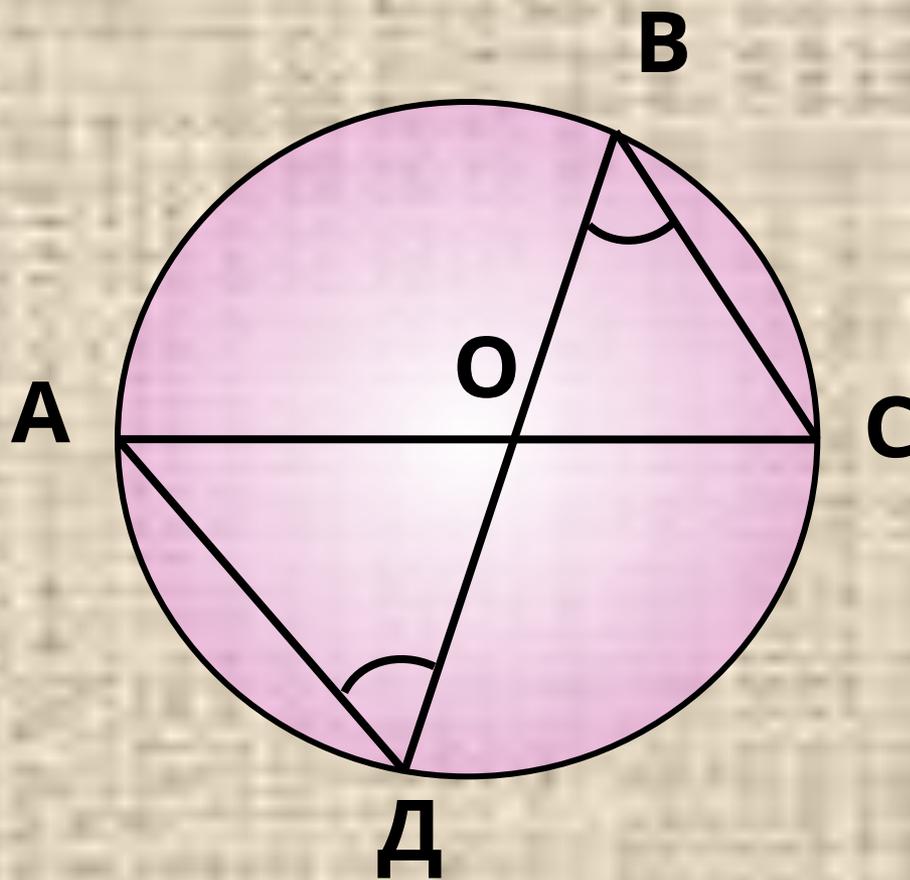
Задача



Найти:
 BC



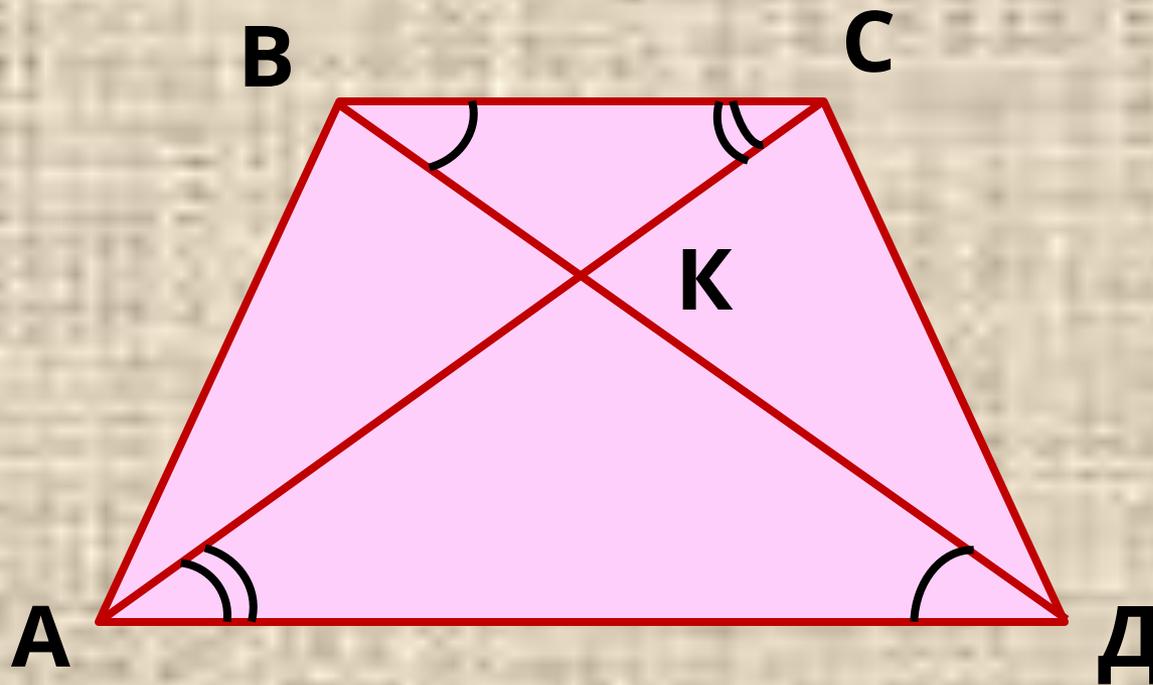
Задача
9



Доказать: $\triangle AOD \sim \triangle COB$



Задача
10



Найти: подобные
треугольники



Второй признак подобия треугольников



1

2

3

4

5

6

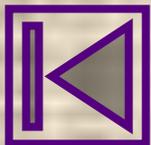
7

8

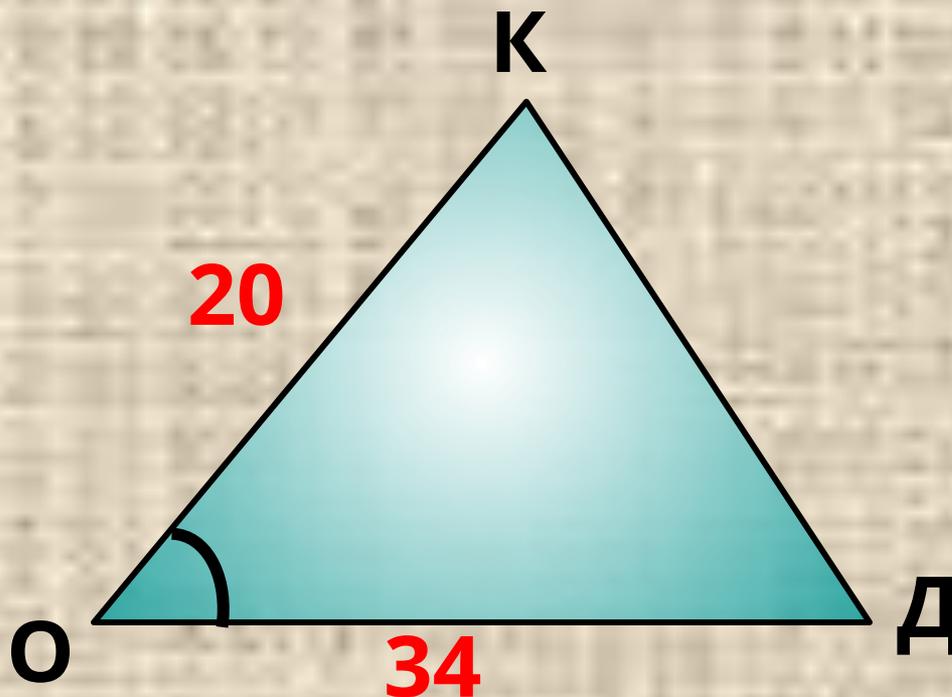
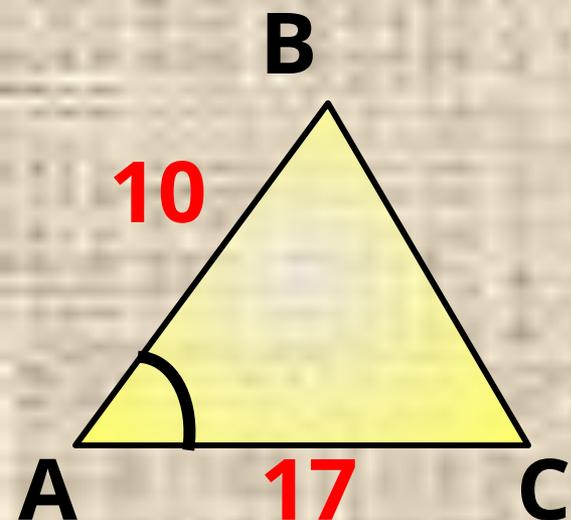
9

10

11



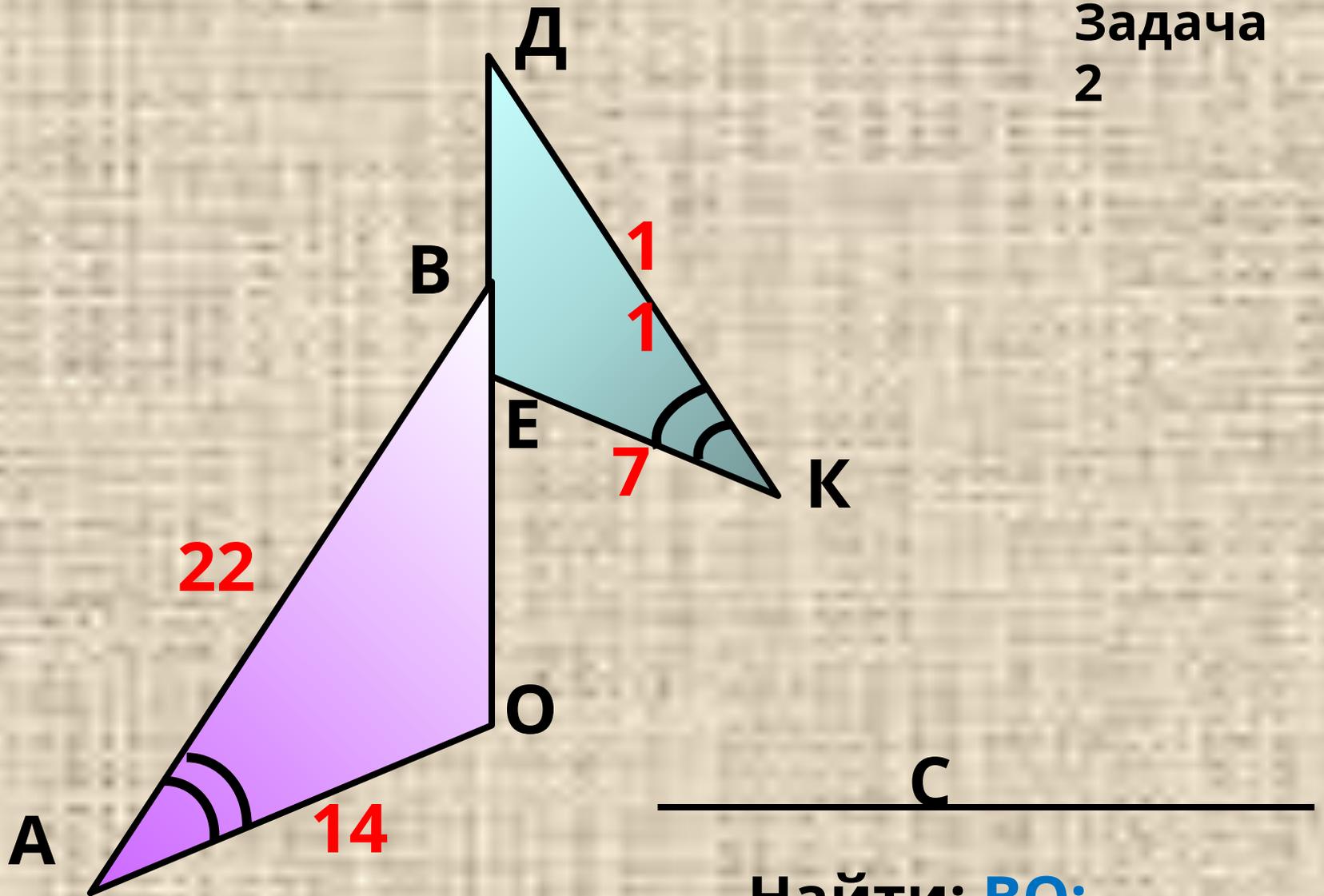
Задача
1



Доказать: $\angle D = \angle C$



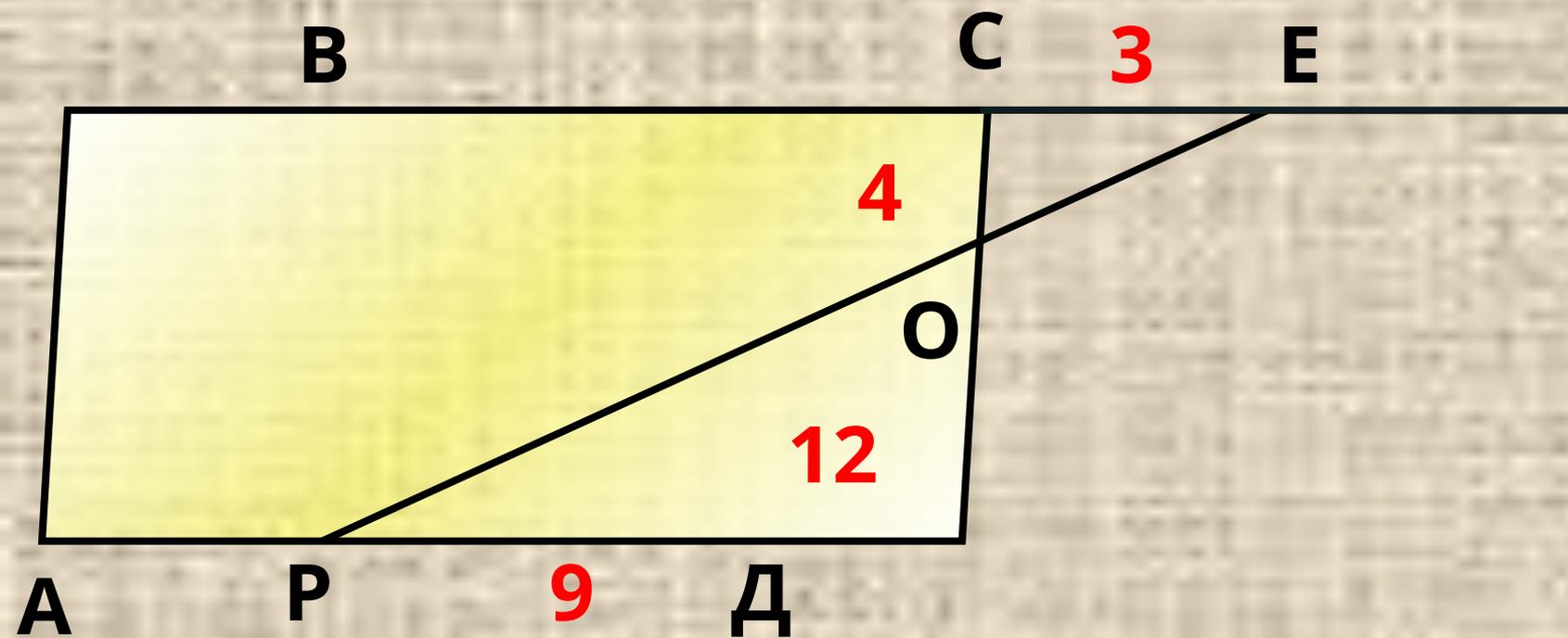
Задача
2



Найти: BO :
 DE



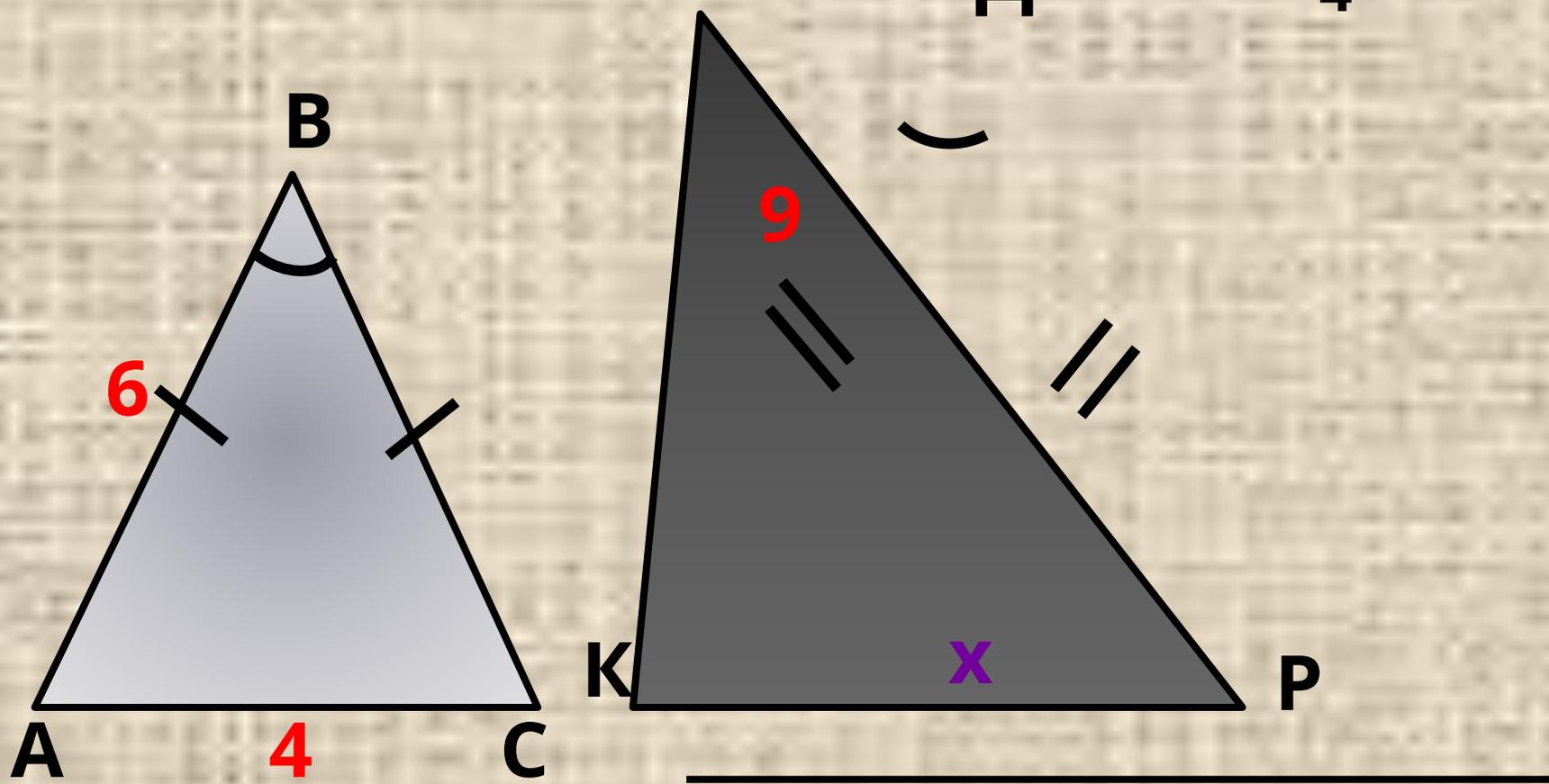
Задача
3



Доказать: $\triangle POA \sim \triangle POC$



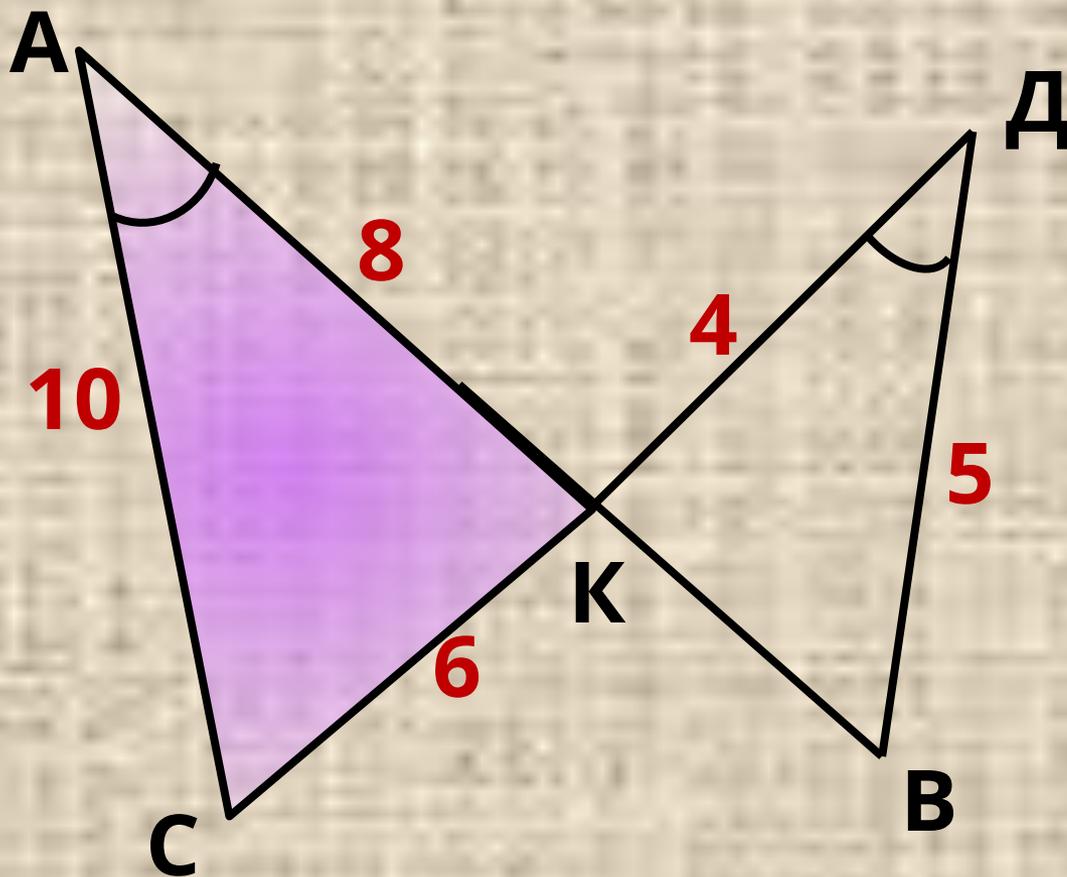
Задача
4



Найти: x



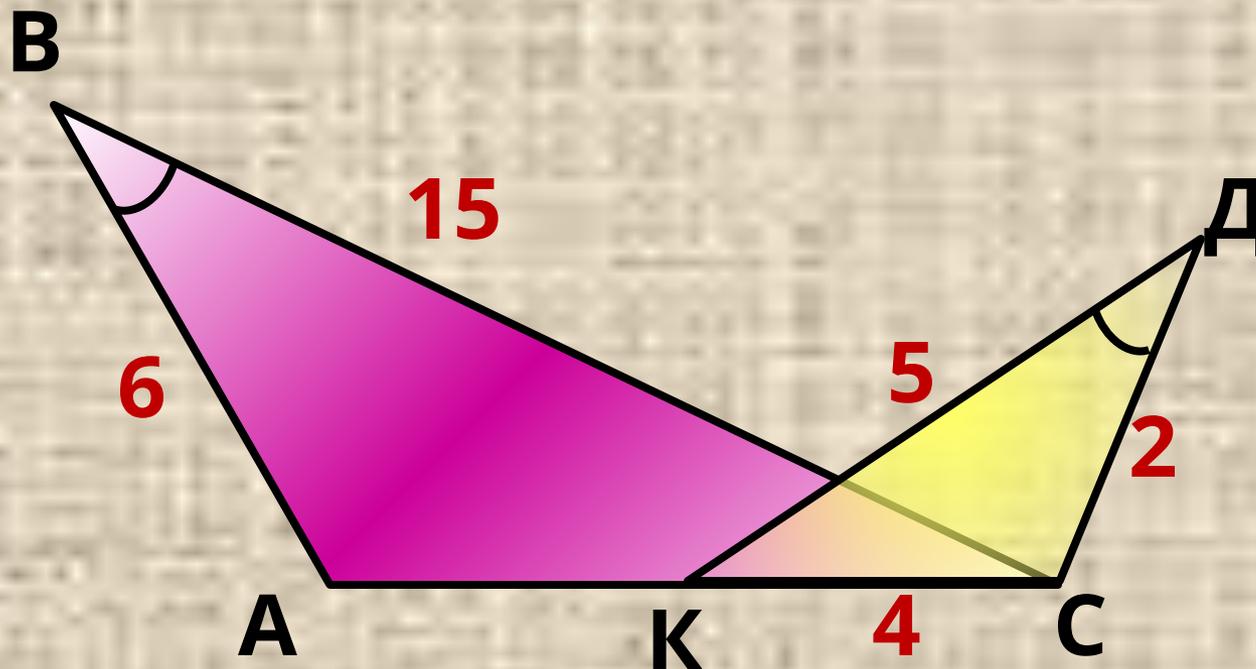
Задача
5



Найти:
KB



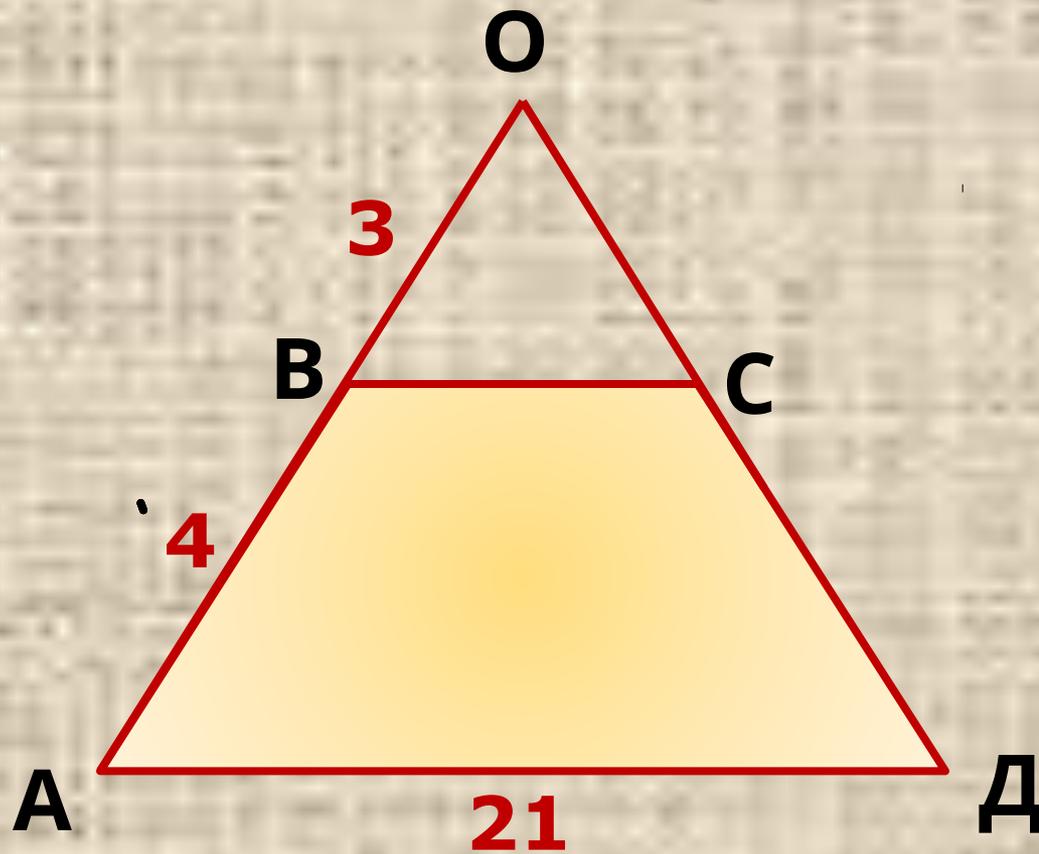
Задача
6



Найти: AC



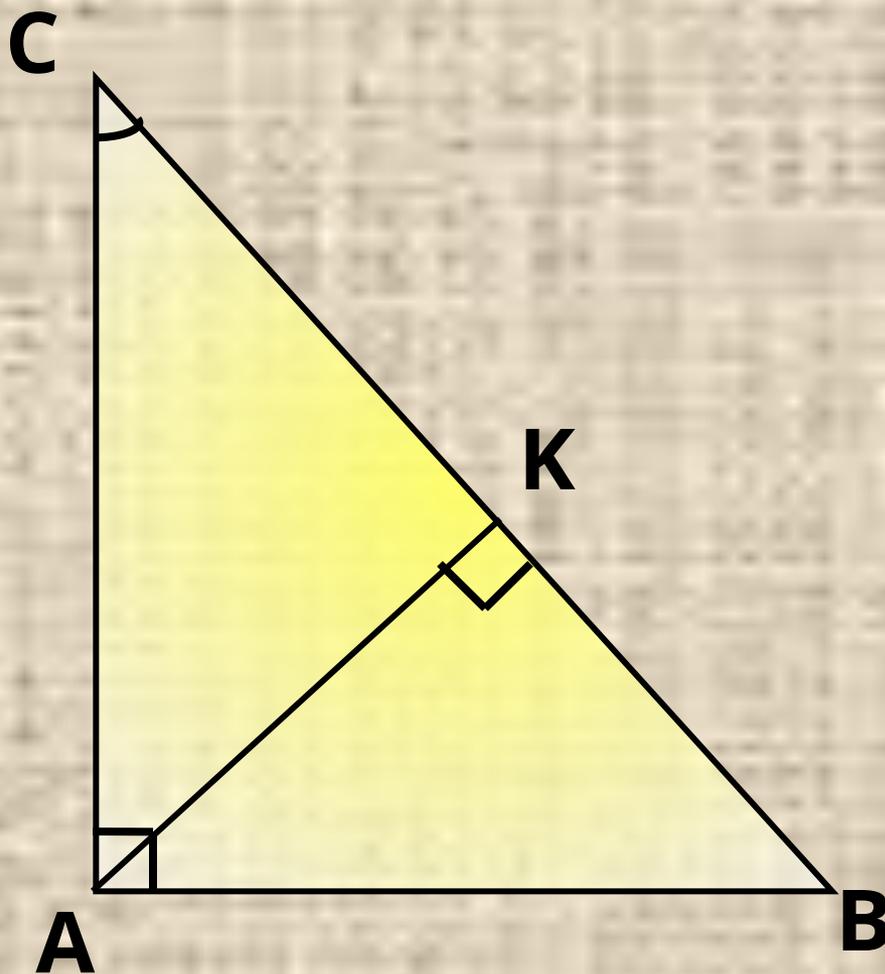
Задача
7



Найти: BC



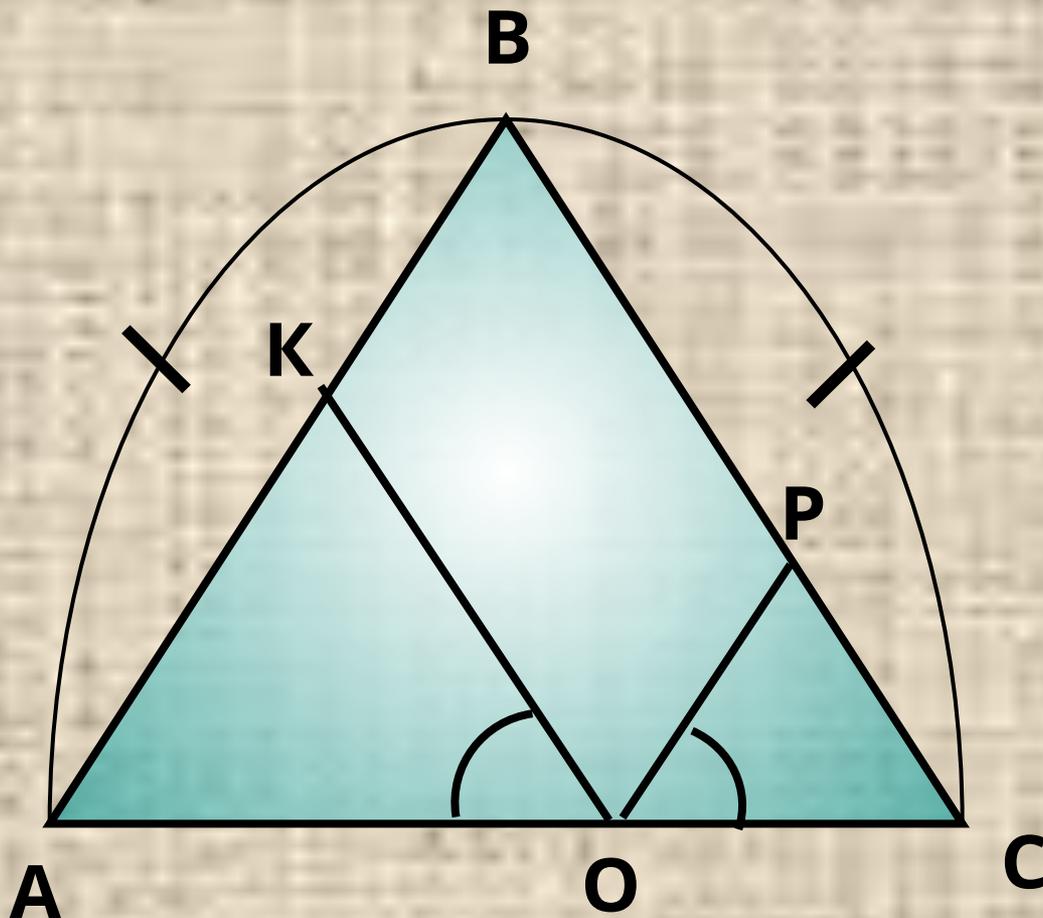
Задача
8



Найти подобные
треугольники



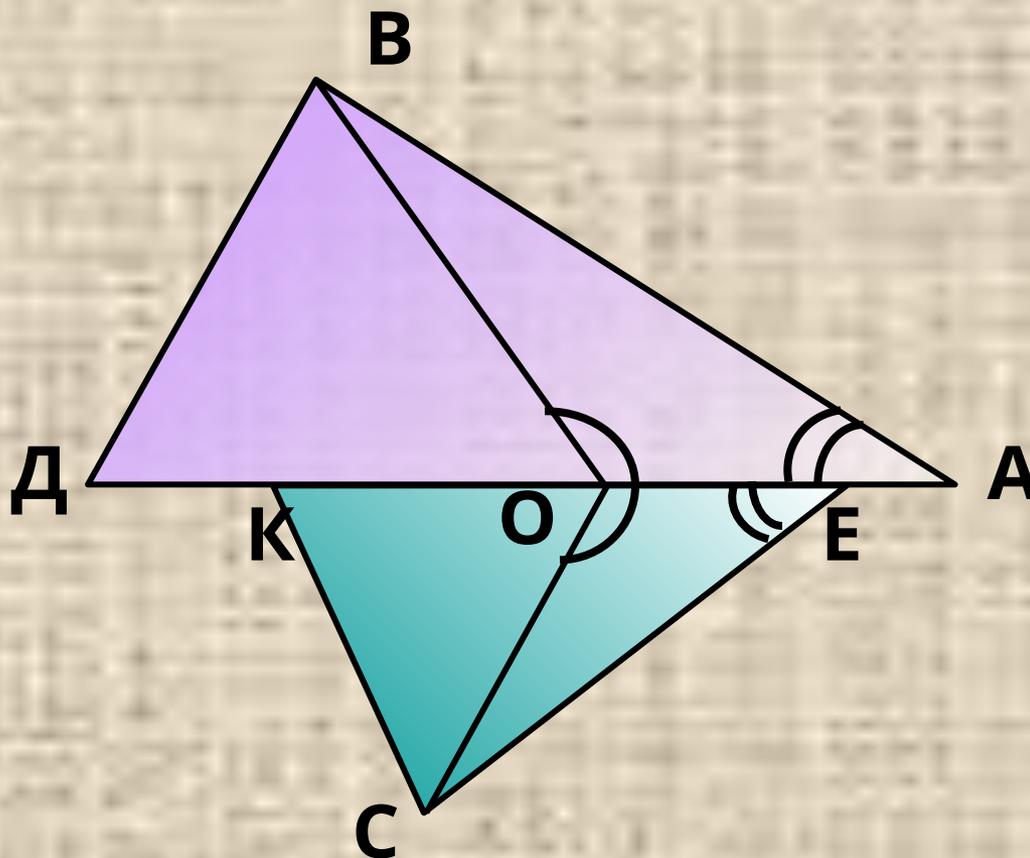
Задача
9



Найти подобные
треугольники



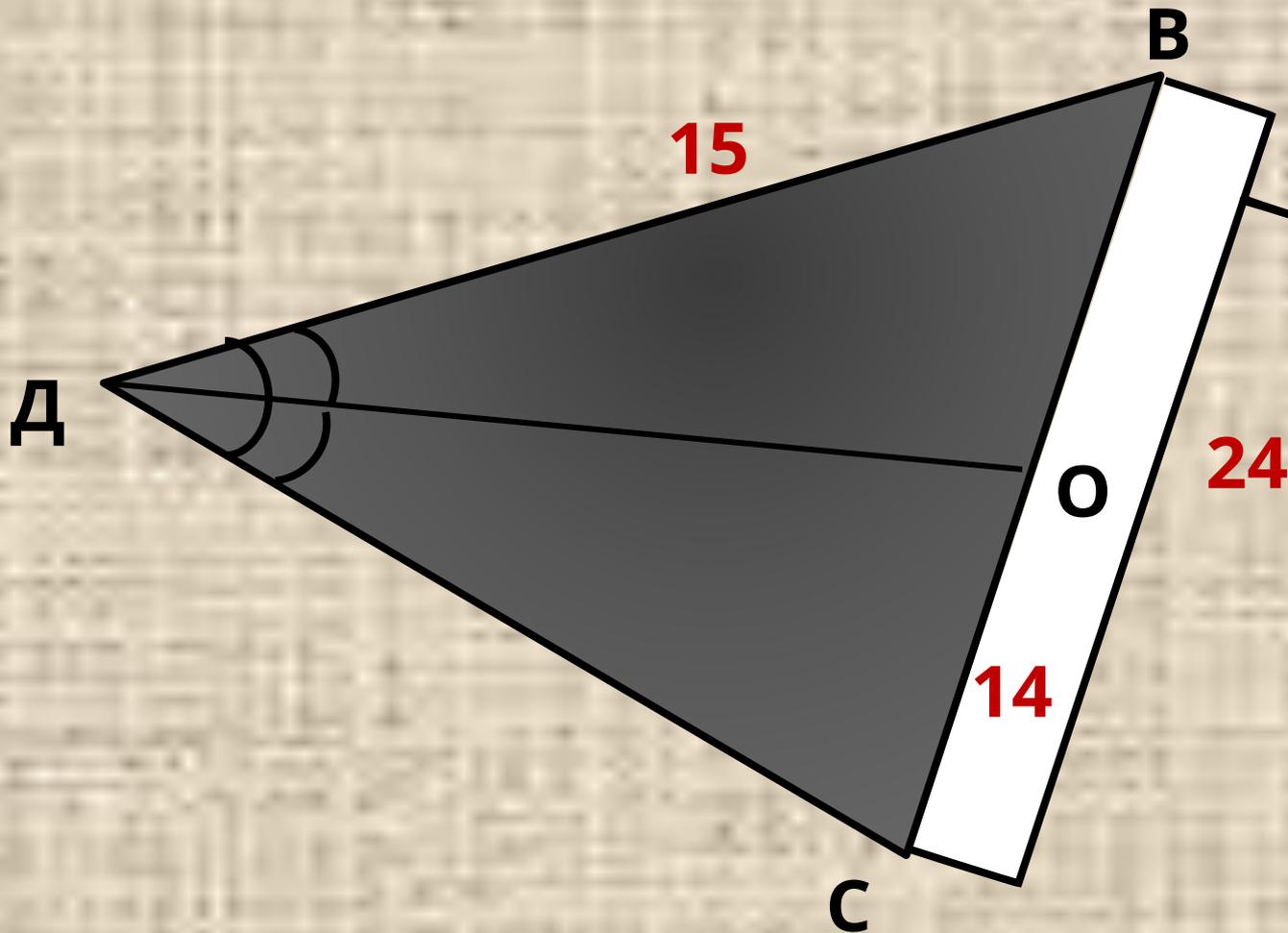
Задача
10



Найти: подобные
треугольники



Задача
11



Найти:
ДС



Третий признак подобия треугольников



1

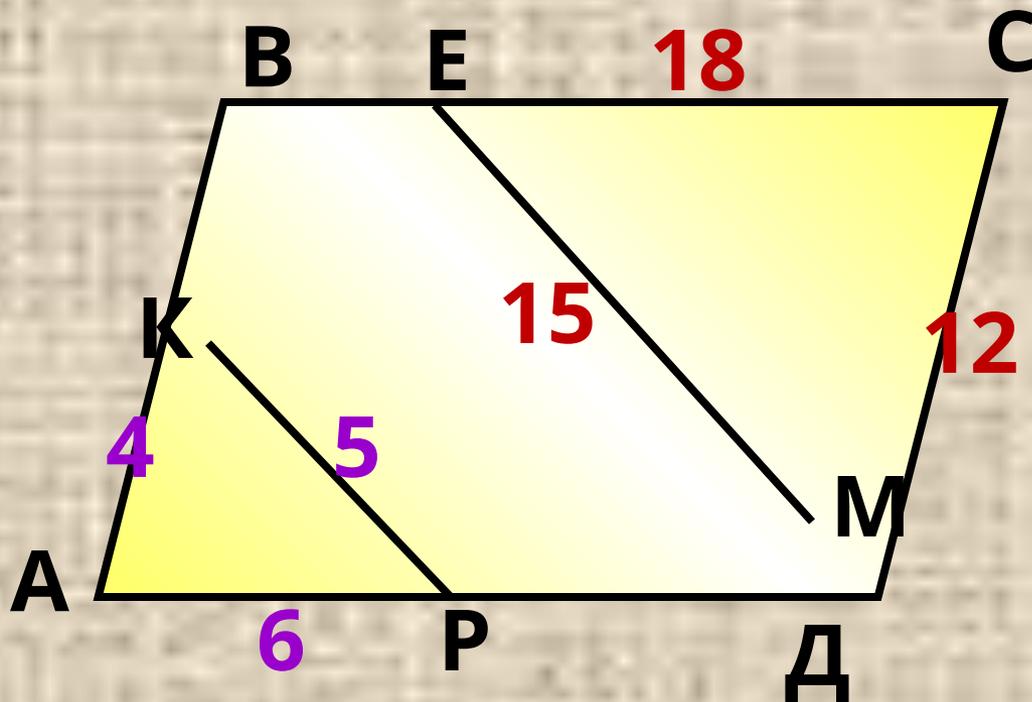
2

3

4



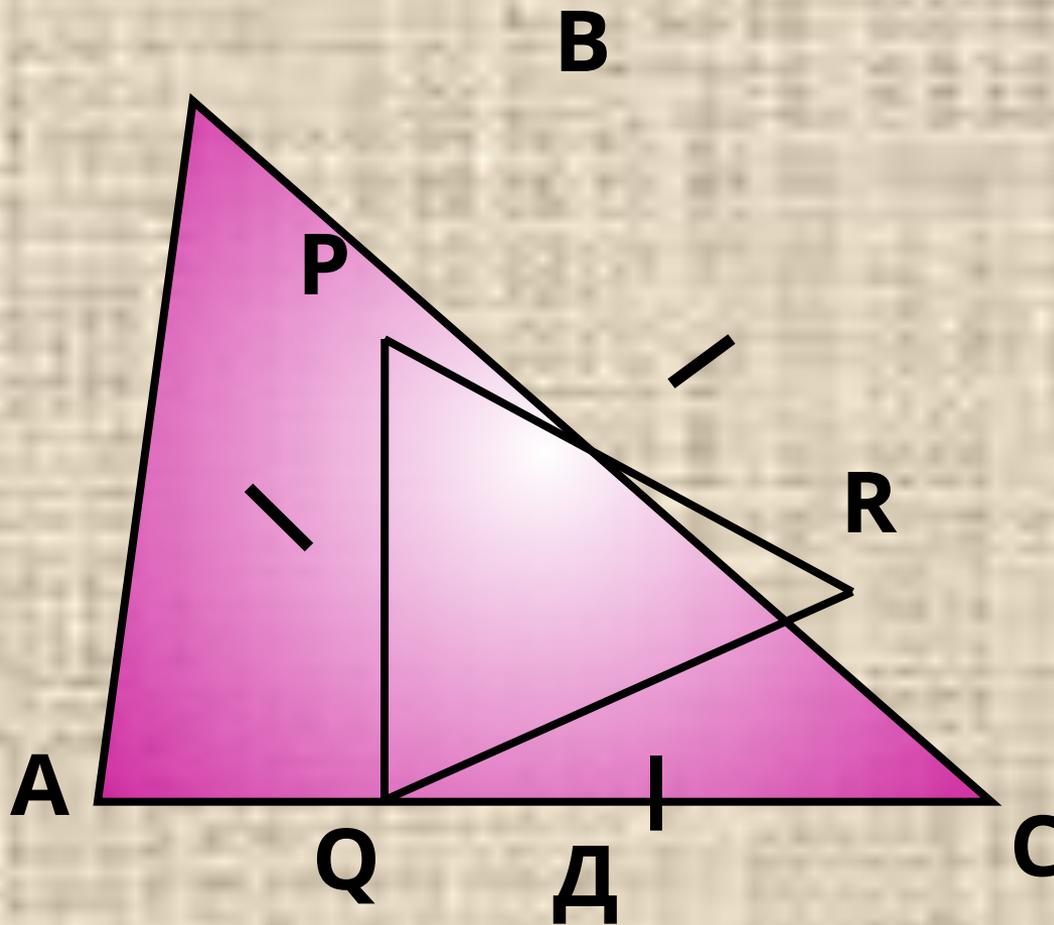
Задача
1



Доказатъ $\triangle AKP \sim \triangle CME$



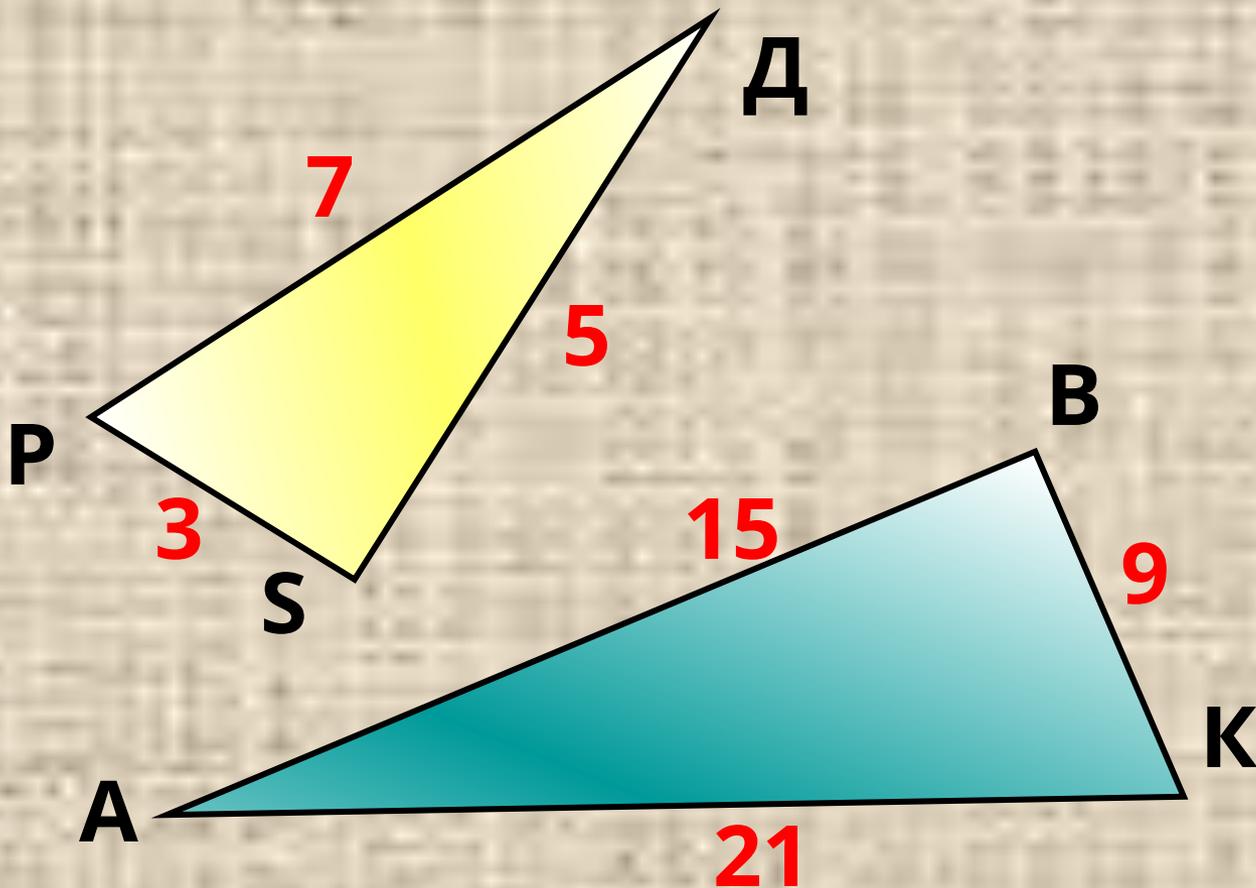
Задача
2



Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle PRQ$



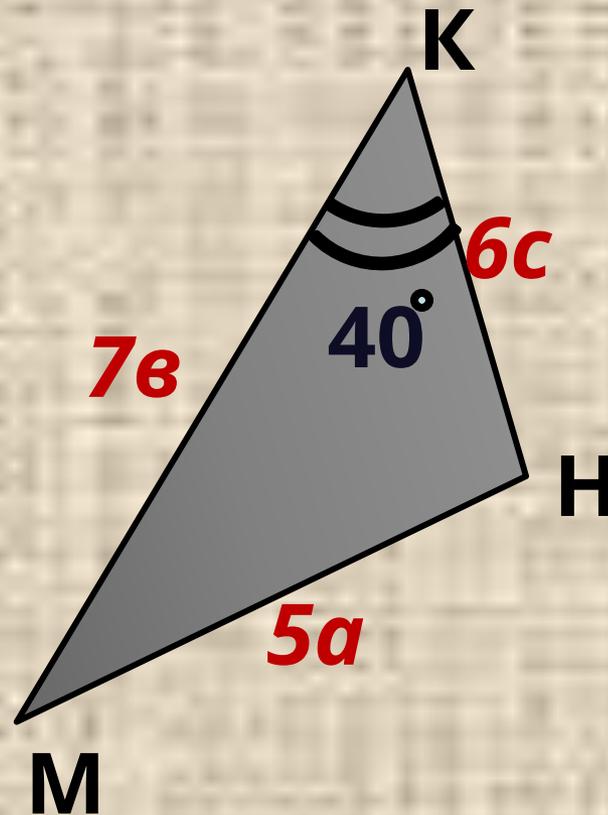
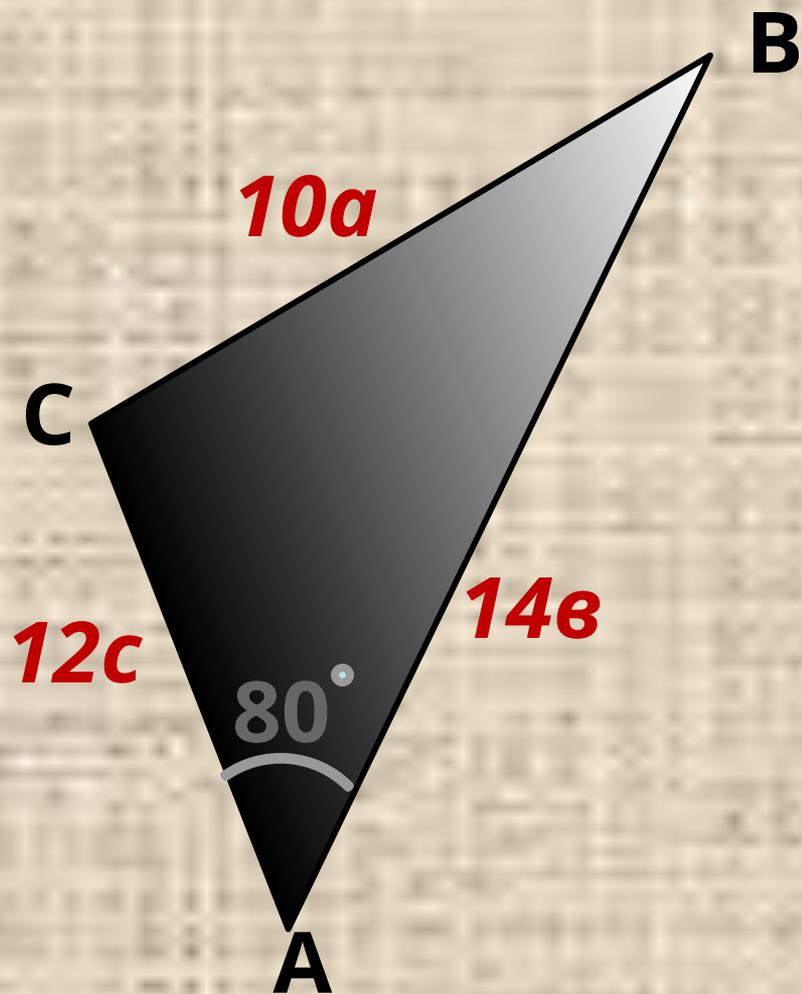
Задача
3



Доказать: $\angle P = \angle K$



Задача
4



Найти: $\angle M$ и $\angle B$



Список литературы

1. Саврасова С.М., Ястребинецкий Г.А.

Упражнения по планиметрии на готовых чертежах.-
М.: просвещение, 1987.-112 с.: ил.

2. Зив Б.Г. и др.

Задачи по геометрии: Пособие для учащихся 7-11 кл.
общеобразоват.учреждений.-М.:Просвещение, 2000.-271 с.: ил.

3. Рабинович Е.М.

Сборник задач на готовых чертежах.-К.:1996.-56с.

4. Гаврилова Н.Ф.

Поурочные разработки по геометрии: 8 класс.-2-е изд.,
перераб. и доп.-М.: ВАКО,2008.-368 с.



A stack of several books in various colors (red, pink, orange, blue) with a red pen resting on top. The background is a textured, light brown surface.

**Спасибо за
внимание!**