Перпендикулярность прямых и плоскостей

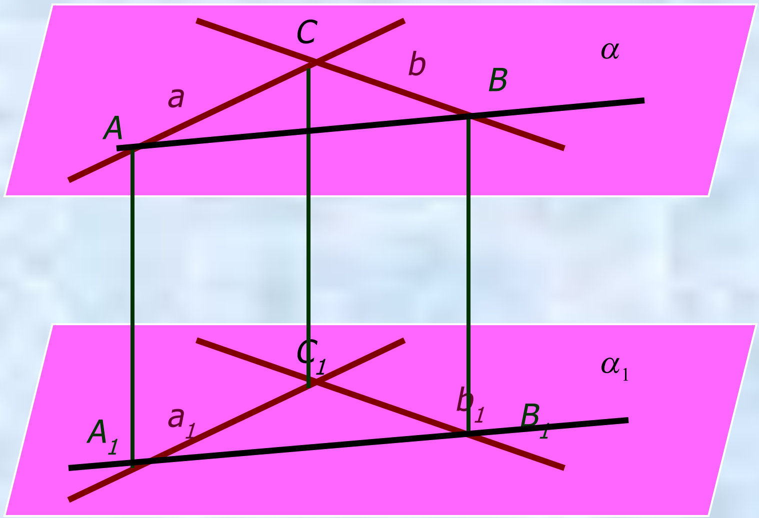
__Определение.__ Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

Теорема 3.1 Если две пересекающие

прямые параллельны соответственно

двум перпендикулярным прямым,

то они тоже перпендикулярны.

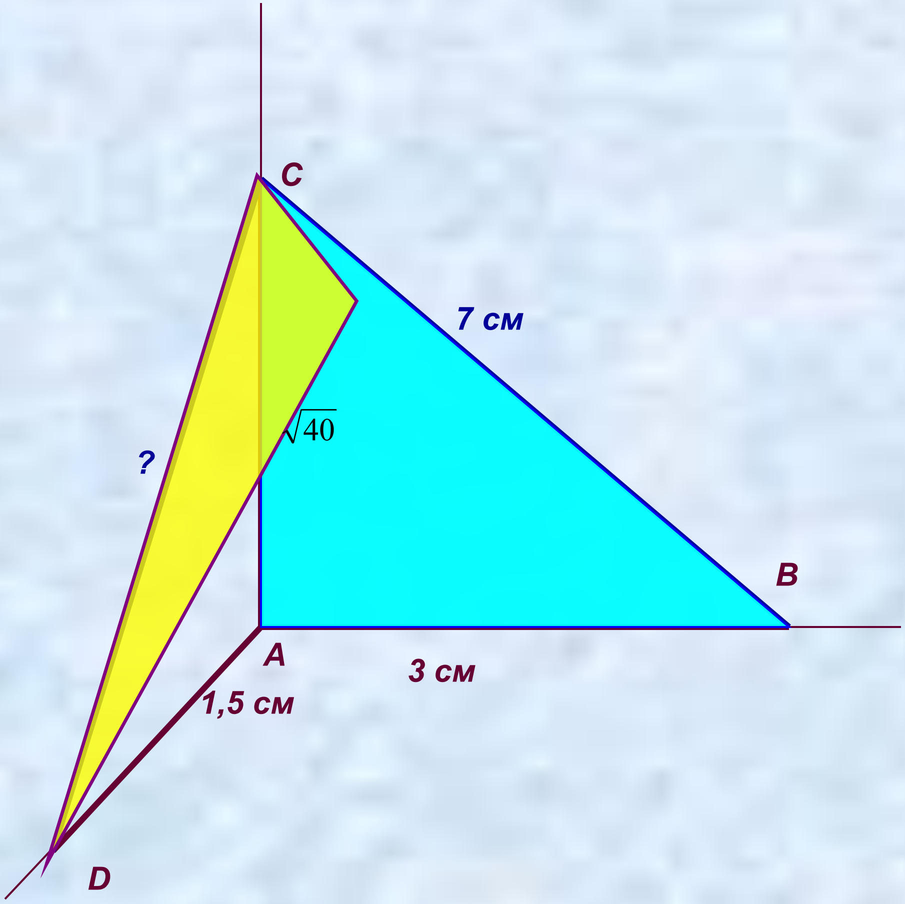


Задача № 1.1. **Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если AB = 3 см, BC = 7 см, AD = 1,5 см.**

Дано: AB $\perp$ AC, AB $\perp$AD, AD $\perp$AC.

AB = 3 см, BC = 7 см, AD = 1,5 см.

Найти CD.



Решение: **1) $\triangle$ABC – прямоугольный,**

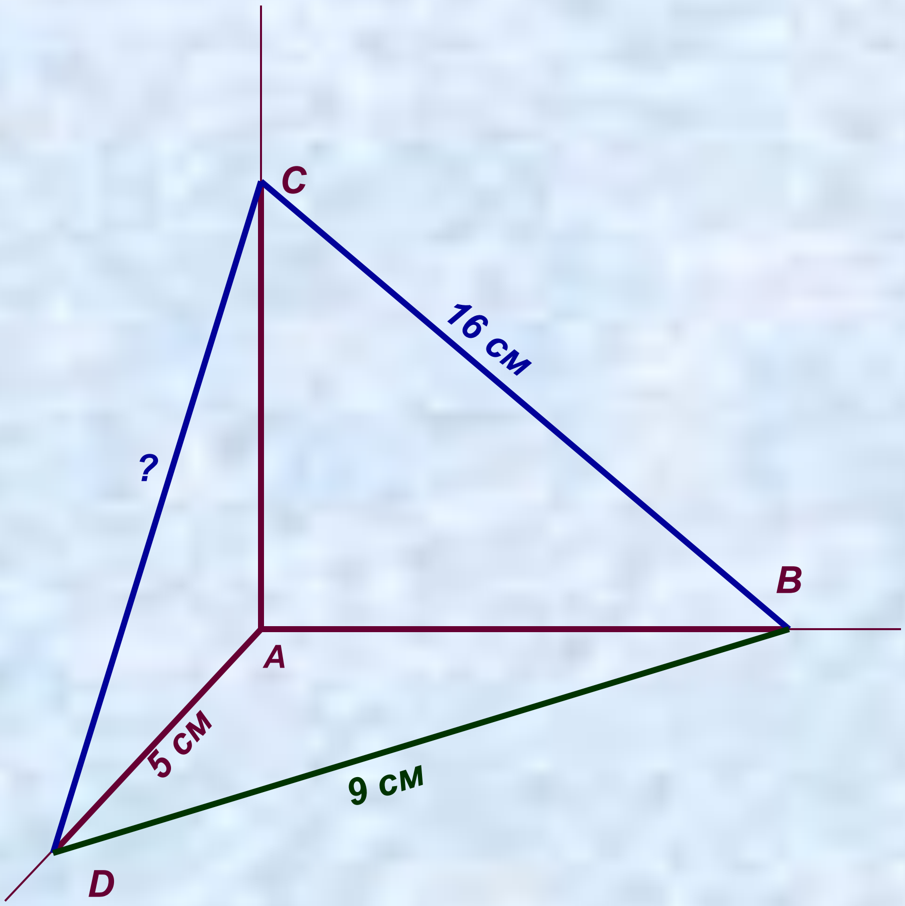
по теореме Пифагора $AC^2 = BC^2 – AB^2$ = 49 – 9 = 40, AC = $\sqrt{40}$ см.

2) $\triangle$ACD – также прямоугольный,

по теореме Пифагора $CD^2 = AC^2 + AD^2$ = = 40 + 2,25 = 42,25. CD = $\sqrt{42,25}$ см = 6,5 см.

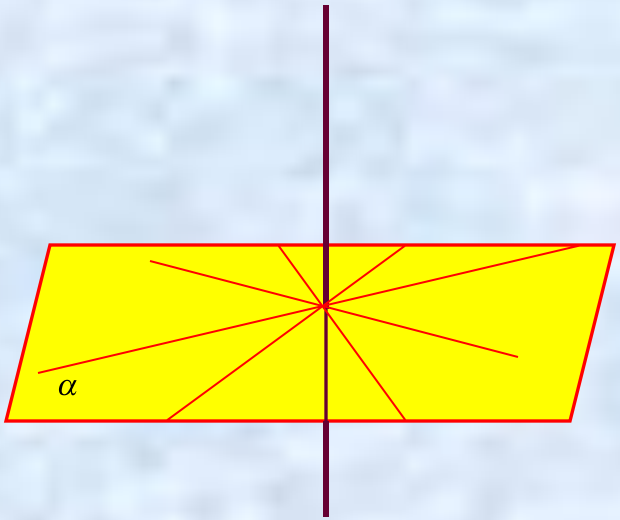
Ответ: CD = 6,5 см.

Задача № 1.2. **Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если BD = 9 см, BC = 16 см, AD = 5 см.**



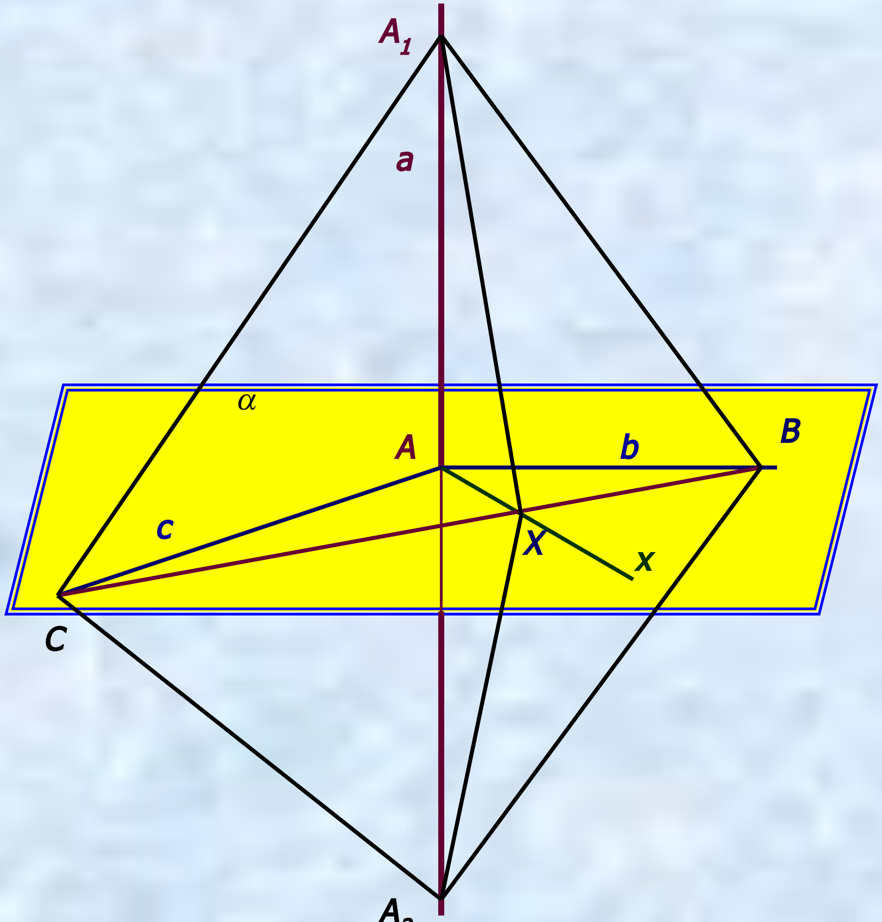
Перпендикулярность прямой и плоскости.

Определение. Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения данной прямой и плоскости



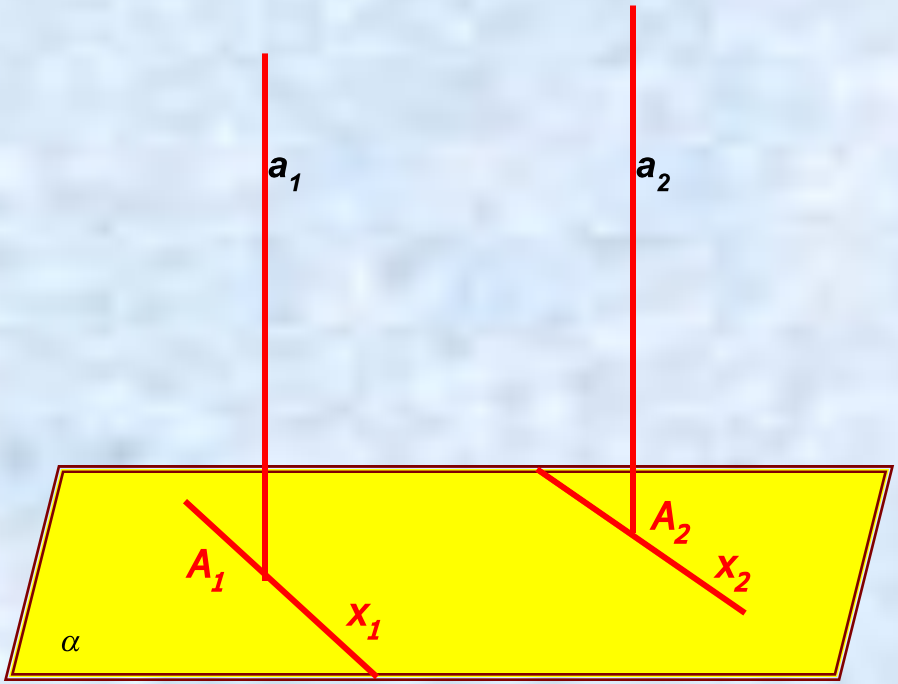
Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 3.2 Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

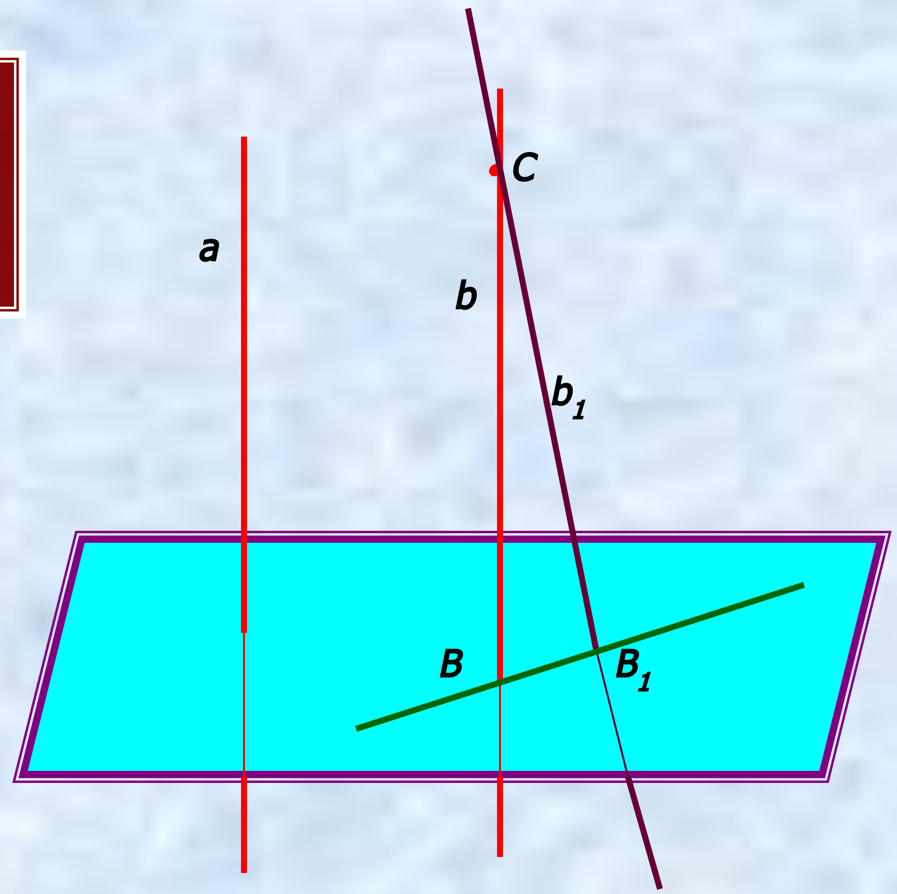


Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.

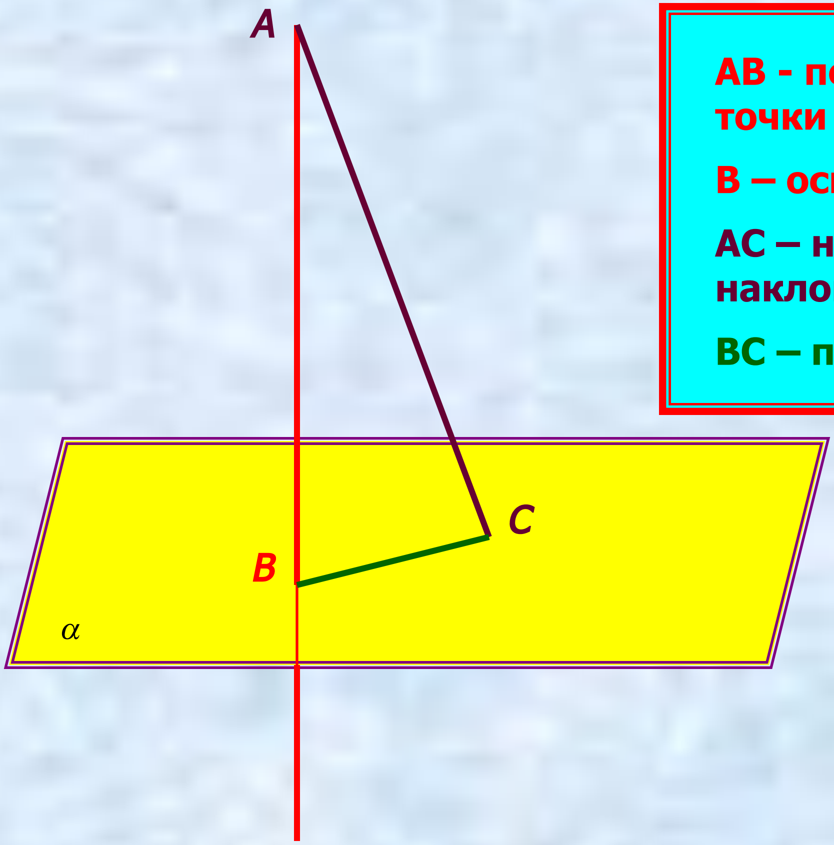
Теорема 3.3 Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.



Теорема 3.4 Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.



Перпендикуляр и наклонная.



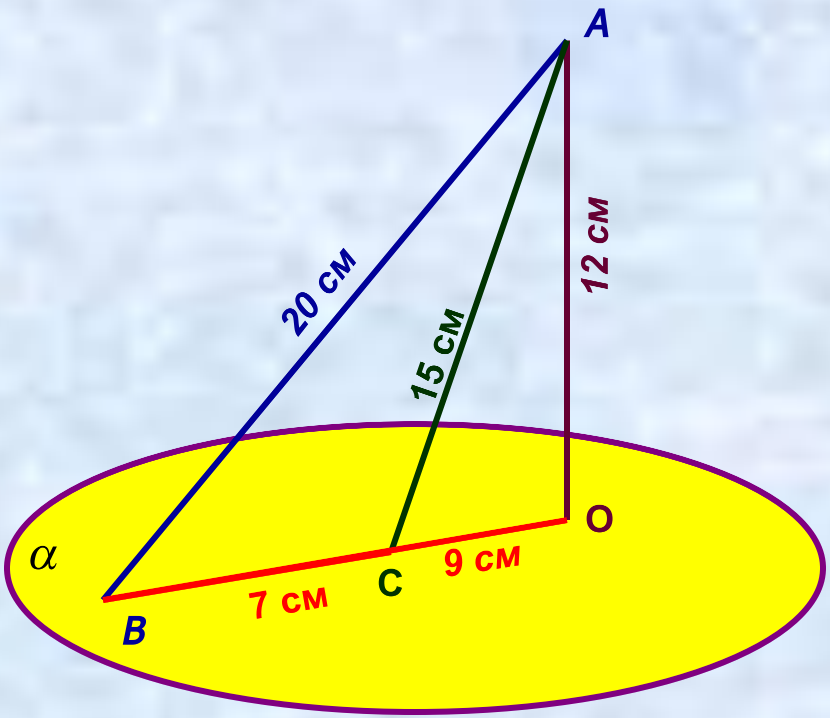
AB - перпендикуляр, расстояние от точки до плоскости.

B – основание перпендикуляра.

AC – наклонная, C- основание наклонной.

BC – проекция наклонной

Задача 2.1 *Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 15 см и 20 см. Разность проекций этих наклонных равна 7 см. Найдите проекции наклонных.*



Дано: *AB и AC – наклонные к плоскости* α

AO $\perp \alpha$ *, AB = 20 см, AC = 15 см, BC = 7 см.*

***Найти:** BO и CO.*

Решение: *1) Найдём площадь* $\triangle$*ABC по формуле Герона:* $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

p = (a+b+c)/2 = (20+15+7)/2 = 21 см. $S = \sqrt{21 \cdot (21-20) \cdot (21-15) \cdot (21-7)} = \sqrt{21 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 14} =$

$= \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2}$ *= 7·6 = 42 см*^{2}.

2) $S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2S}{a}$ *, AO = 2·42/7 = 84/7 = 12 см.*

3) $\triangle$*AOC – прямоугольный, по теореме Пифагора OC*^{2} *= AC*^{2} *– AO*^{2} *= 225 – 144 = 81, OC = 9 см.* *4) OB = BC + OC = 7 + 9 = 16 см.*

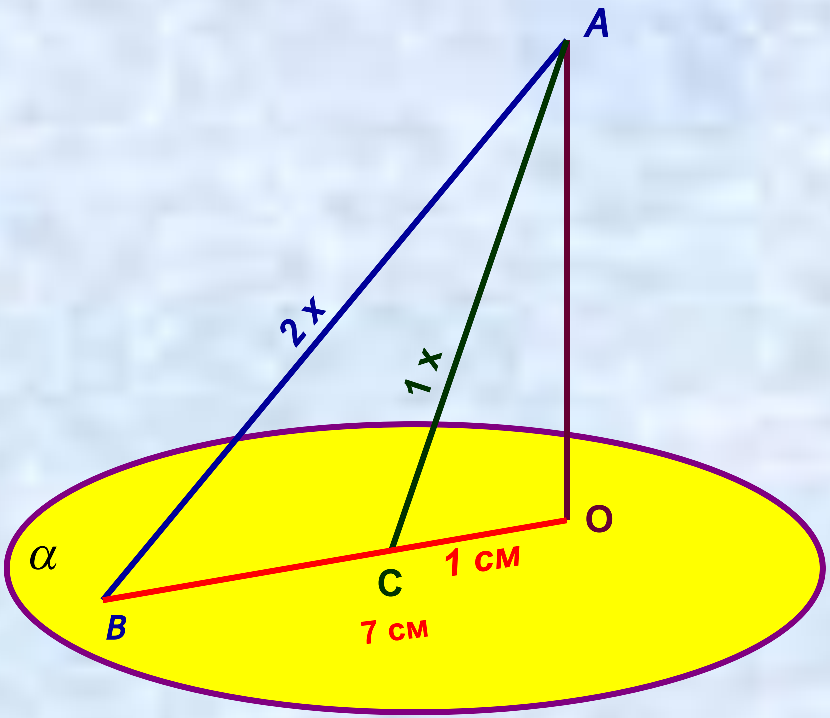
Ответ: *9 см и 16 см.*

Задача 3.1 Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если наклонные относятся как 1:2, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.

Дано: AB и AC – наклонные к плоскости

$AO \perp \alpha$, $AB : AC = 2 : 1$, $BO = 7$ см, $CO = 1$ см.

Найти: AB и AC.



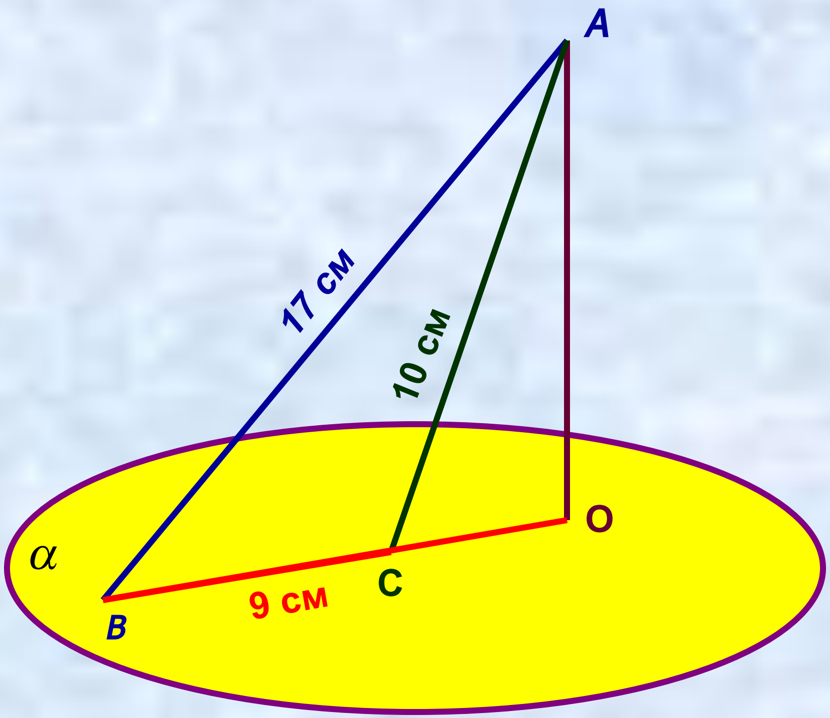
Решение: Пусть $AB = 2x$ см, $AC = x$. В $\triangle ABO$ $AO^2 = AB^2 - OB^2 = 4x^2 - 49$,

В $\triangle ACO$ $AO^2 = AC^2 - CO^2 = x^2 - 1$. Т. к. левые части этих равенств равны, то равны и правые: $4x^2 - 49 = x^2 - 1$, $3x^2 = 48$, $x^2 = 16$, $x = 4$.

Таким образом, $AC = 4$ см, $AB = 8$ см.

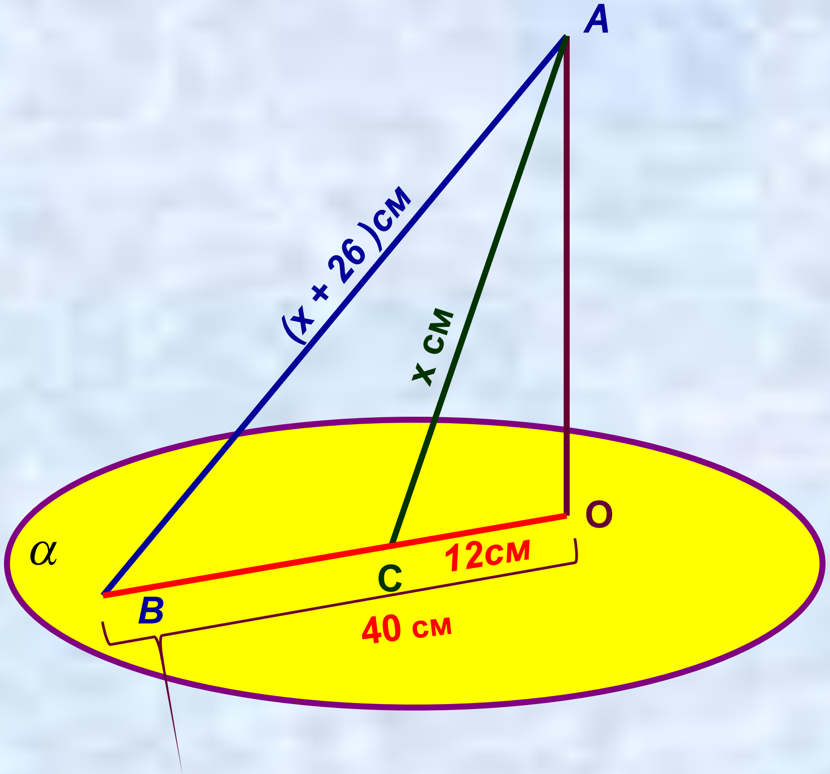
Ответ: 4 см и 8 см.

<u>Задача 2.2</u> ***Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Разность проекций этих наклонных равна 9 см. Найдите проекции наклонных.***



.

Задача 3.2 Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см.

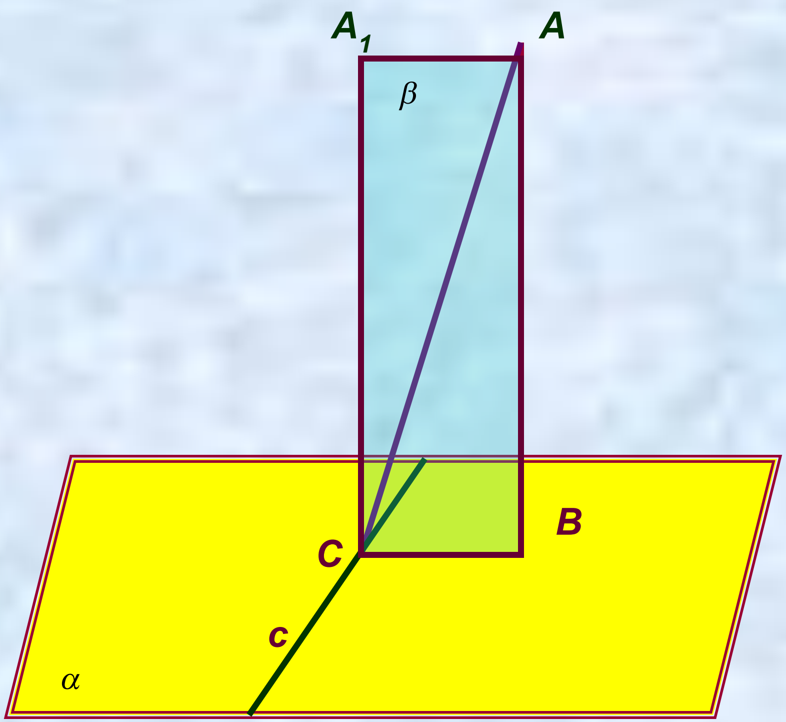


Теорема о трёх перпендикулярах.

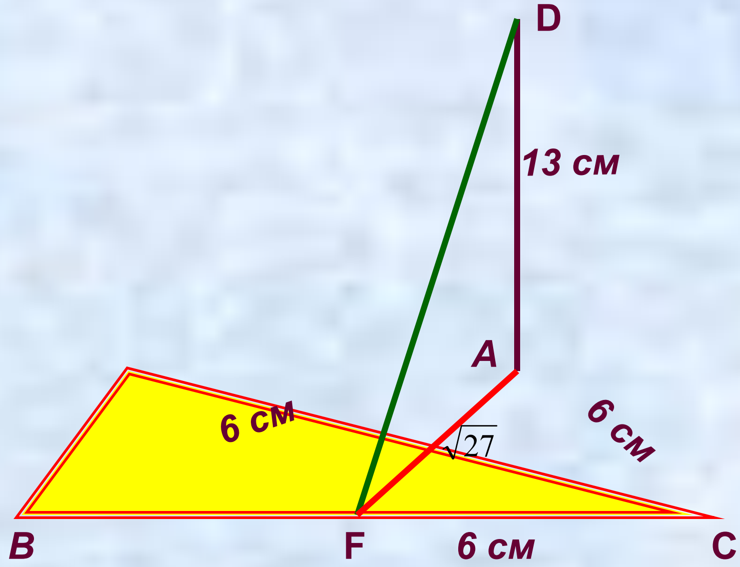
Теорема 3.5 **Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна наклонной.**

Обратная теорема

Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.



Задача № 4.1. ***Из вершины равностороннего треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны BC, если AD = 13 см, BC = 6 см.***



Дано: $\triangle$***ABC – равносторонний, AB=BC=AC= 6 см, AD $\perp$(ABC), AD=13 см.***

Найдите: ρ(D; BC).

Решение: ***Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки D опустим перпендикуляр DF на прямую BC.***

По теореме о трёх перпендикулярах AF $\perp$BC,

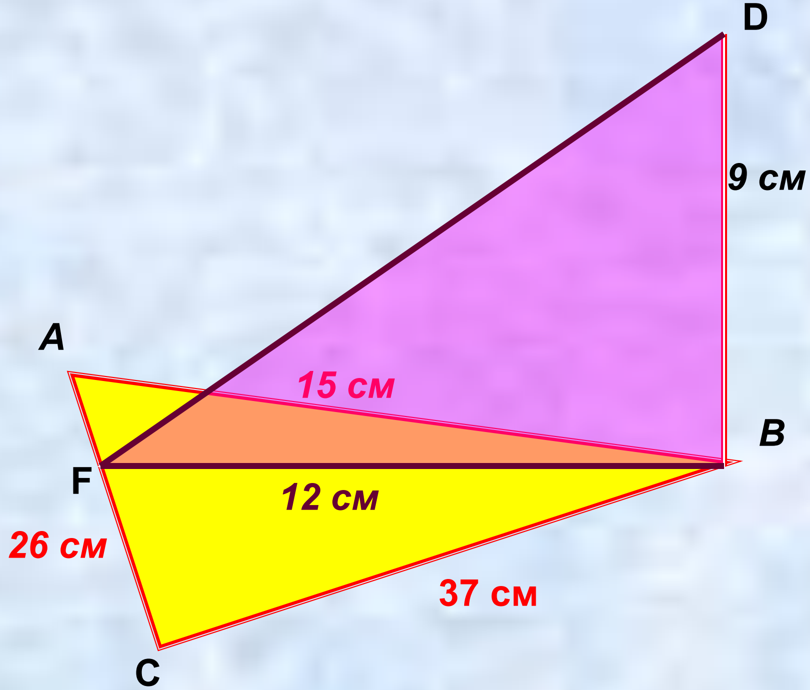
т.к. треугольник ABC- равносторонний, то AF –медиана, т.е. BF=FC= 3 см.

$\triangle$ ***AFC – прямоугольный. По теореме Пифагора $AF^2 = AC^2 - CF^2 = 36 - 9 = 27$, AF = $\sqrt{27}$ см.***

$\triangle$ ***ADF – прямоугольный, $DF^2 = AD^2 + AF^2 = 169 + 27 = 196$, следовательно DF = 14 см.***

Ответ: 14 см.

Задача 5.1. Стороны треугольника 15 см, 26 см и 37 см. Через вершину среднего по величине угла проведён перпендикуляр в его плоскости, равный 9 см. Найдите расстояние от концов этого перпендикуляра до противоположной стороны.



Решение: Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки В опустим перпендикуляр BF на прямую ВС.

По теореме о трёх перпендикулярах $DF \perp AC$. BF найдём из треугольника АВС.

Найдём площадь треугольника АВС по формуле Герона. $p = (a+b+c)/2 = (15+26+37)/2 = 39$,

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{39 \cdot 24 \cdot 13 \cdot 2} = \sqrt{13 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 2} = 13 \cdot 3 \cdot 4 = 156$ (см^2).

$S = \frac{1}{2} AC \cdot BF$, $BF = 2 \cdot S/AC = 2 \cdot 156 / 26 = 12$ см.

Треугольник DFB – прямоугольный. По теореме Пифагора $DF^2 = DB^2 + BF^2$,

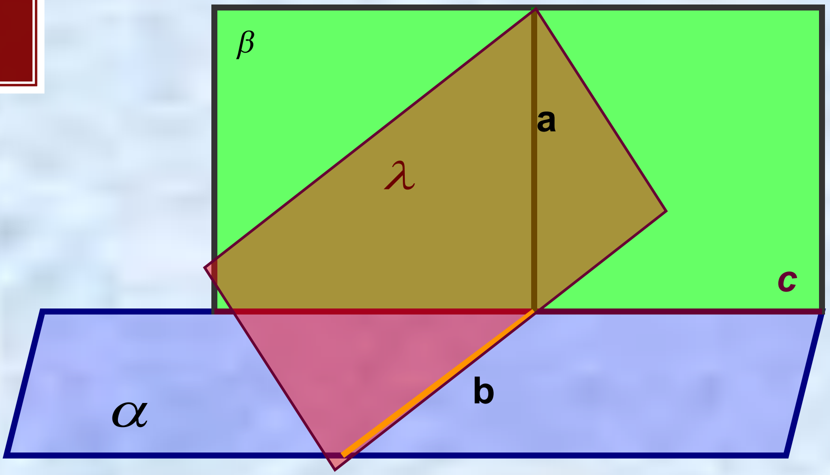
$DF^2 = 81 + 144 = 225$, $DF = 15$ см.

Ответ: 12 см и 15 см.

Задача 4.2. Из вершины треугольника ABC восставлен перпендикуляр BD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны AC, если BD = 9 см, AB = 15 см, BC = 20 см, AC = 7 см.

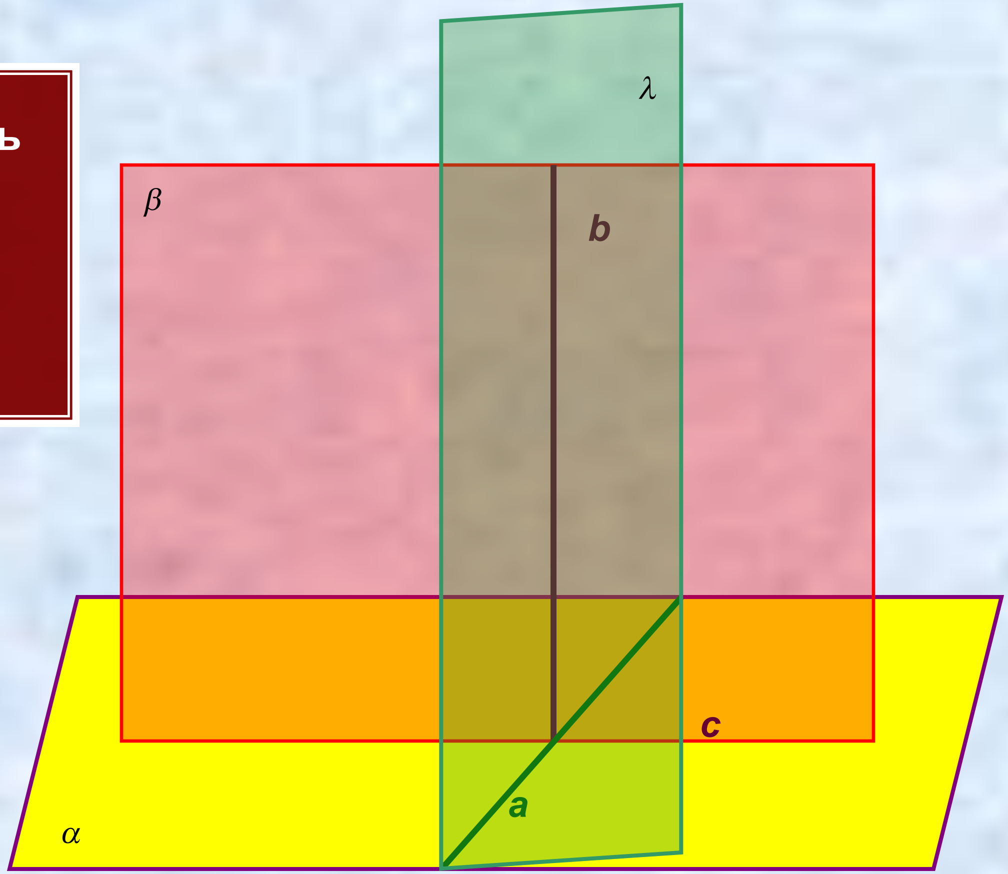
Перпендикулярность плоскостей.

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей пересекает их по перпендикулярным прямым.

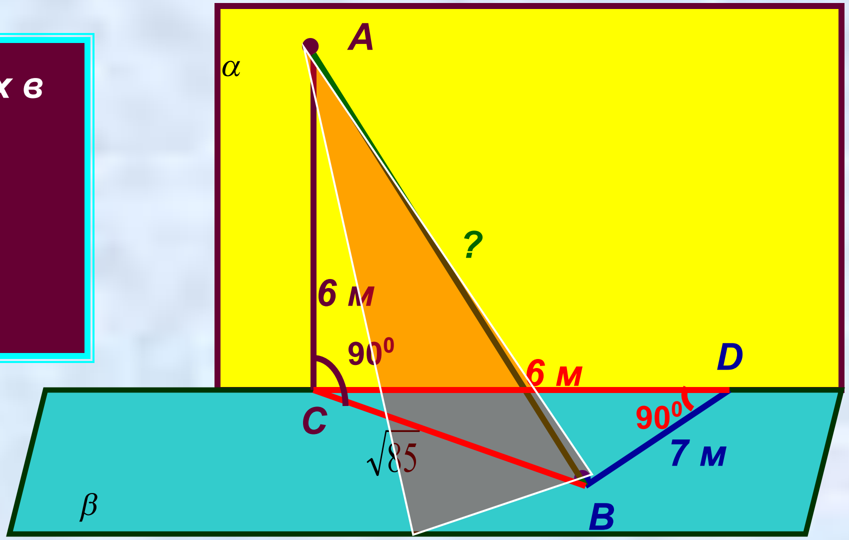


Признак перпендикулярности плоскостей.

Теорема 3.6 Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



Задача № 6.1 *Из точек А и В, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры АС и ВD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка АВ, если: АС = 6 м, ВD = 7 м, CD = 6 м.*



Дано: $\alpha \perp \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AC \perp CD$, $BD \perp CD$

АС = 6 м, ВD = 7 м, CD = 6 м.

Найти: АВ.

Решение: Δ BCD – прямоугольный,

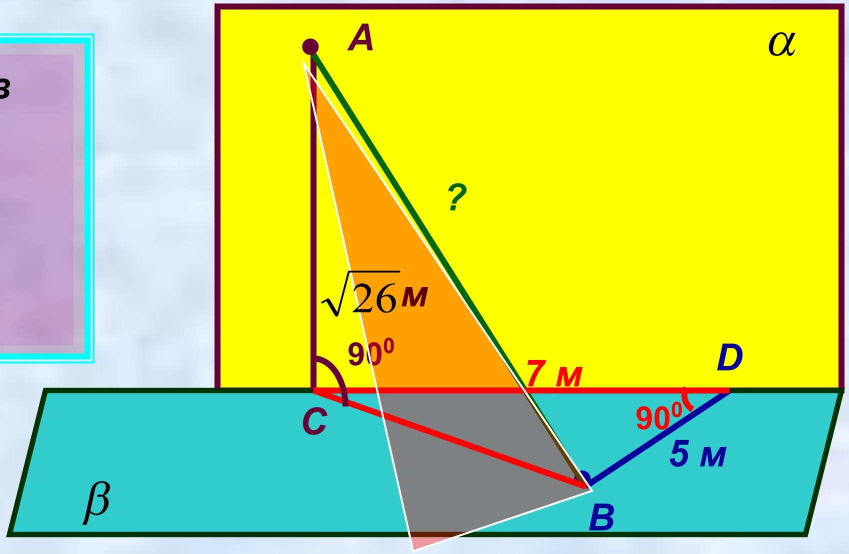
по теореме Пифагора $BC^2 = CD^2 + BD^2$, $BC^2 = 36 + 49 = 85$, $BC = \sqrt{85}$ м.

Δ ABC – прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$,

$AB^2 = 36 + 85 = 121$, AB = 11 м.

Ответ : 11 м.

Задача 6.2. Из точек А и В, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры АС и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка АВ, если: АС = $\sqrt{26}$ м, BD = 5 м, CD = 7 м.

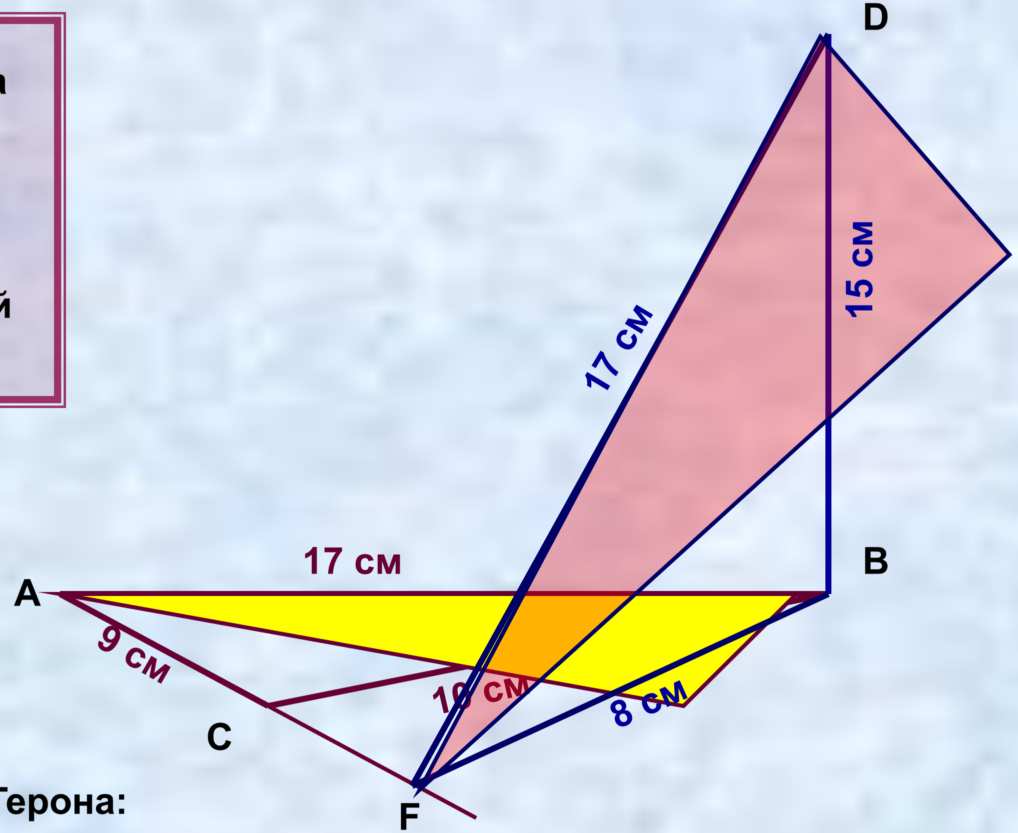


<u>**Дано:**</u> $\alpha \perp \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AC \perp CD$, $BD \perp CD$

АС = $\sqrt{26}$ м, BD = 5 м, CD = 7 м.

<u>**Найти:**</u> АВ.

Задача7. **Из меньшего угла треугольника со сторонами 9 см, 10 см и 17 см восставлен перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. Найдите расстояния от концов этого перпендикуляра до прямой, содержащей противолежащую сторону.**



Решение:

1) Т.к. Δ ABC - тупоугольный, то перпендикуляр, проведённый из точки B, мы должны провести на продолжение стороны AC.

2) Найдём площадь Δ ABC по формуле Герона:

p=(a + b + c): 2= (9 + 10 + 17): 2 = 18 (см), $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18\cdot(18-9)\cdot(18-10)\cdot(18-17)}$

$= \sqrt{18\cdot 9\cdot 8\cdot 1} = \sqrt{9\cdot 2\cdot 9\cdot 8\cdot 1}$ **= 9·4 = 36 см^2.**

3) $S_\Delta = \frac{a\cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2\cdot S}{a}$ **, BF = (2·S) : AC = (2· 36) : 9 = 8 (см).**

4) DF $\perp$ AC по теореме о трёх перпендикулярах. ΔDBF – прямоугольный, поэтому

DF^2 = BD^2 + BF^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289, DF = 17 см.

Ответ: 8 см и 17 см.

Выполнить задания:

1.2; 2.2; 3.2; 4.2; 6.2.

Сфотографировать задания, отправить на электронную почту tastas-tas-ooltas-ool1990@tas-ool1990@mailtas-ool1990@mail.tas-ool1990@mail.ru или на вайбер по тел.

8-923-550-2825.