Случайные величины

- ***Случайной величиной*** называется величина, численное значение которой может меняться в зависимости от условий эксперимента.

- Случайные величины принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита - X, Y, Z..., а их значения – соответствующими строчными буквами x, y, z....

Пример 1. В вашей группе 17 человек. **Случайная величина** ***X*** – число студентов, находящихся в аудитории перед началом занятий.

Ее возможными значениями будут числа 0, 1, 2,…,17.

Пример 2. Изменение курса валют.

Случайная величина X - стоимость валюты.

Примет некоторое значение в пределах от 57 до 62 рублей.

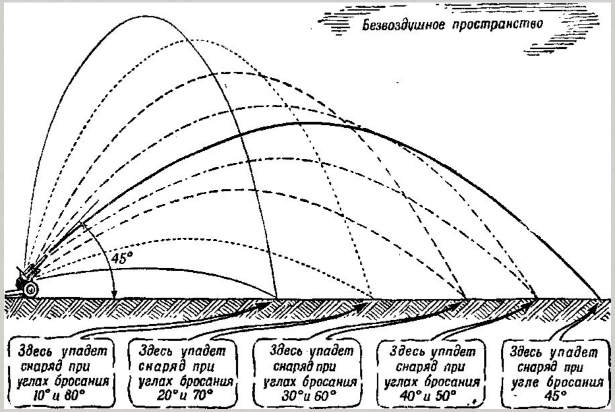
Пример 3. Однократное бросание игральной кости.

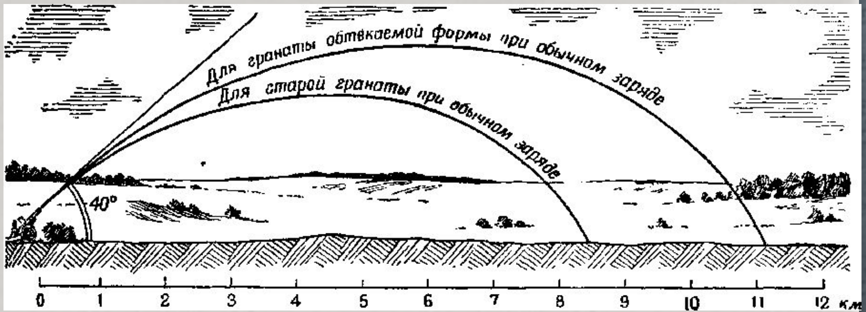
Случайная величина X – число, выпавшее на верхней грани игрального кубика

Её значения: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Пример 4. Случайная величина X -расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия

Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a; b).





- **Дискретная случайная величина** – случайная величина, которая принимает *конечное или счётное* число значений с определенными вероятностями.

- **Непрерывная случайная величина** – случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного *промежутка*.

Определить вид случайной величины

- Число студентов в группе.
- Бросаем игральную кость один раз? Два раза? n раз?
- Ошибка измерения.
- ...

Дискретные случайные величины (ДСВ)

В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 рублей и десять выигрышей по 1 рублю.

Пусть **случайная величина X** – стоимость возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Найти значения этой величины и вероятности этих значений.

Запишем возможные значения случайной величины X: $x_1=50$, $x_2=1$, $x_3=0$.
Вычислим вероятность возможных значений случайной величины X:

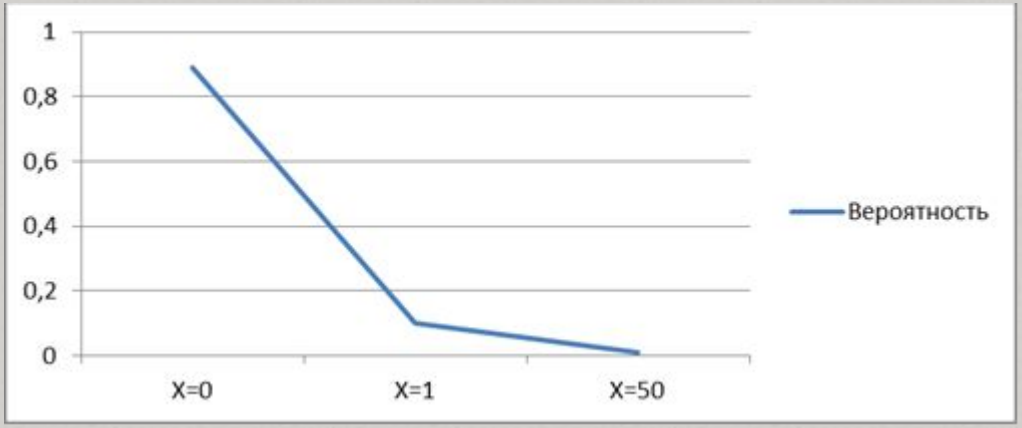
$p_1=$ $\frac{1}{100} = 0{,}01$ $p_2=$,$\frac{10}{100} = 0{,}1$

$p_3=1-0{,}01-0{,}1=0{,}89$

- Можно составить таблицу соответствий значений случайной величины и их вероятностей:

X	0	1	50
P	0,89	0,1	0,01

- Графически решение данной задачи будет иметь вид:



Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называют **законом распределения дискретной случайной величины**.

Способы задания закона распределения дискретной случайной величины.

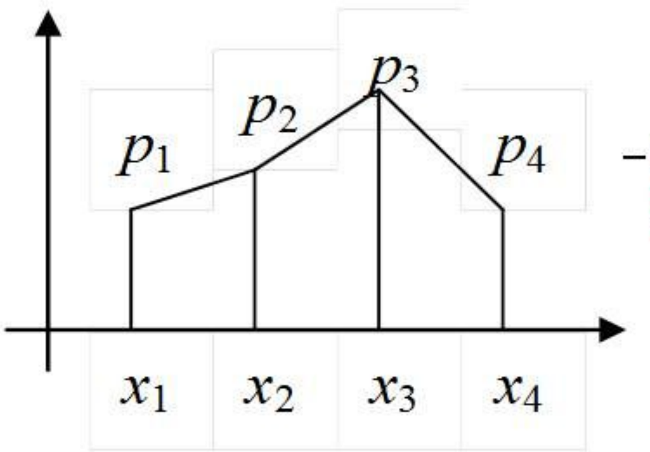
Таблично:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Аналитически: $p(x_i) = f(i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Графически:



– *многоугольник распределения*

Числовые характеристики ДСВ

Пусть закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием (средним) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности, т.е. число:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n.$$

Свойства математического ожидания:

$$1. M(c) = c, c = const$$

$$2. M(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = M(x_1) + M(x_2) + \dots + M(x_n)$$

$$3. M(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = M(x_1) * M(x_2) * \dots * M(x_n)$$

$$4. M(cx) = cM(x), c = const$$

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X — M(X)]^2 = M(X^2) - M^2(X)$$

Свойства дисперсии:

$$1. D(c) = 0, c = const$$

$$2. D(cX) = C^2 D(X)$$

$$3. D(x_1 + x_2 + ... + x_n) = D(x_1) + D(x_2) + ... + D(x_n)$$

Среднеквадратичное отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Непрерывные случайные величины

(НСВ)

НСВ называется такая величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Число всех возможных значений НСВ бесконечно.

Пример: Случайное отклонение по дальности точки падения снаряда от цели.

Функция распределения НСВ

Функцией распределения (или интегральной функцией распределения) называют функцию F(x), определяющую для каждого значения x вероятность того, что СВХ примет значение, меньшее x, т.е.

F(x)=P(X<x)

(F(x) определяется и для ДСВ).

Свойства:

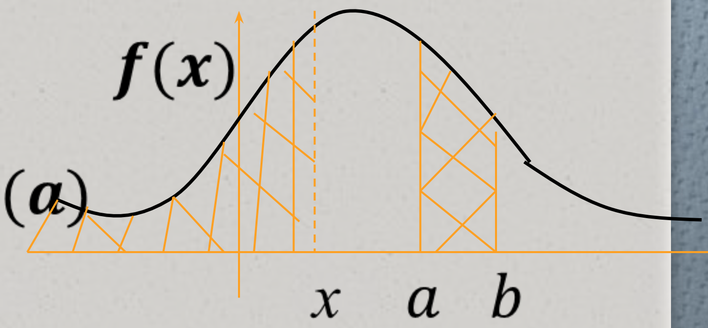
1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Функция плотности вероятности

Для **непрерывной** случайной величины производная функции распределения $F^{I}(x) = f(x)$ называется **функцией плотности вероятности или дифференциальной функцией распределения.**

$$F(x) = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$P\{a < X < b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$



$f(x) \geq 0$ (*как производная неубывающей функции)*

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (*условие нормировки*) - **площадь под графиком плотности вероятности равна 1.**

Числовые характеристики непрерывной случайной величины: **математическое ожидание** $M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x)dx =$$

$$= M[X^2] - M^2[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2[X]$$

Некоторые законы распределения случайных величин

Биномиальное распределение

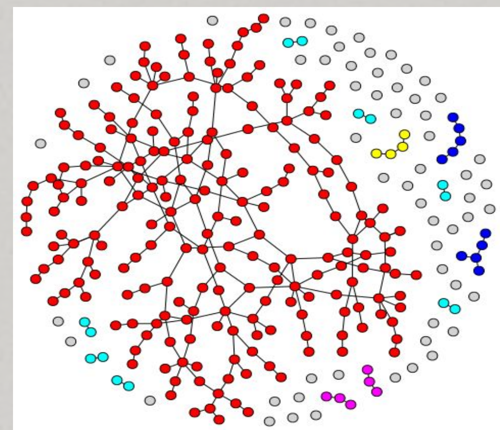
Дискретная случайная величина X распределена по биномиальному закону, если она имеет значения {0…n}, а вероятность X=m

P(X=m)= $C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$

Биномиальное распределение описывает вероятность m успехов при n возможных исходов

- **M[X]=np - мат. ожидание**
- **D[X]=npq - дисперсия,**

где p - вероятность успеха,
q - вероятность неуспеха

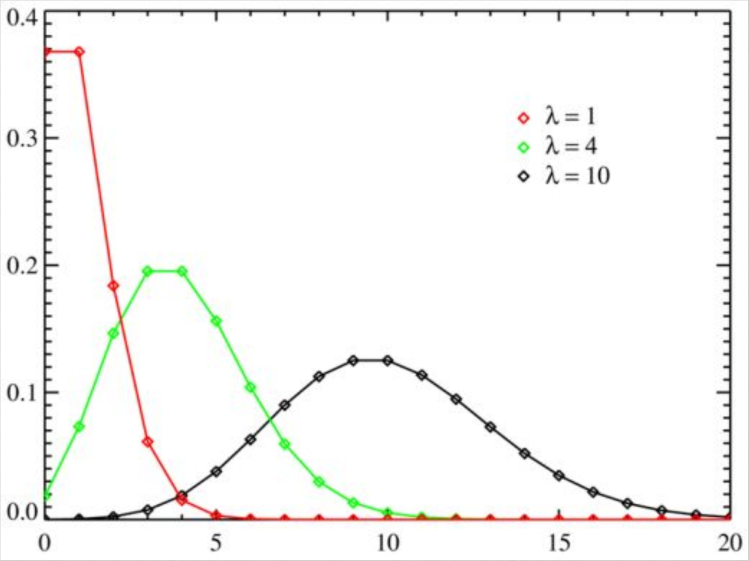


Пуассоновское распределение

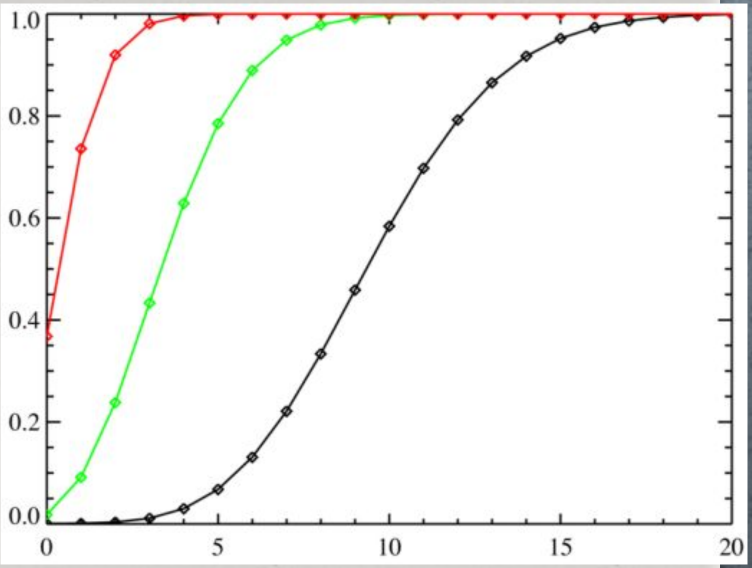
$$p_k = P(\mu = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где k= 0, 1, 2, …,$\lambda > 0$ – параметр пуассоновского распределения.

Функция вероятности



Функция распределения



$M(X) = \lambda$

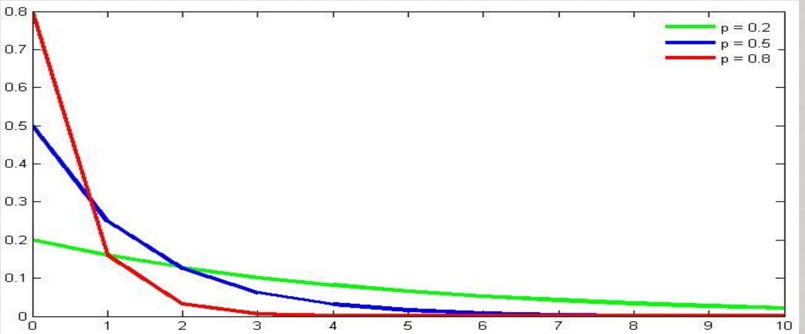
$D(X) = \lambda$

Геометрическое распределение

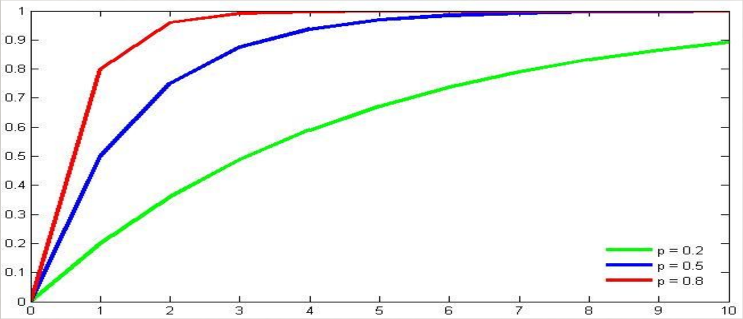
$$p_k = P(\eta = k) = p^k q$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, \ldots, n$,

Функция вероятности



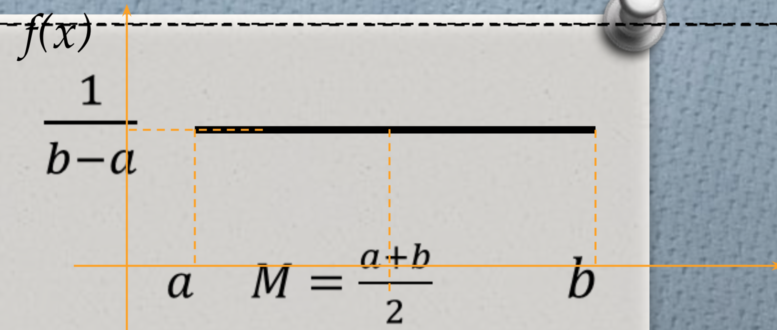
Функция распределения



$$M(X) = \frac{1-p}{p} \qquad D(X) = \frac{q}{p^2}$$

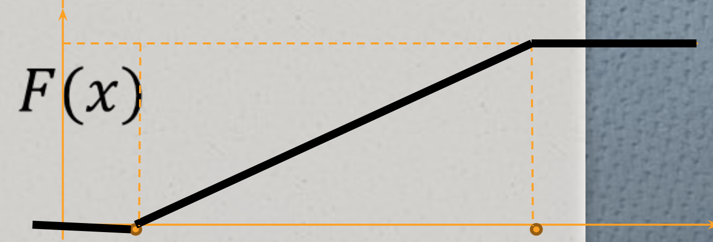
Равномерное распределение

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, x\epsilon(a,b)\\ 0, \quad x\in(-\infty,a\cup b,\infty)\end{cases}$$



$$M[X]=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

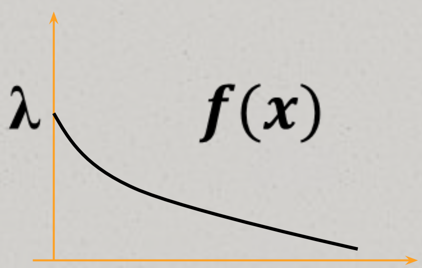
$$D[X]=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{12}$$

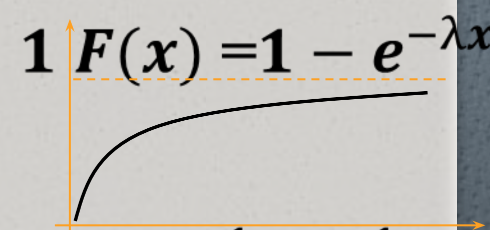


$$F[X]=\int_a^x\frac{dx}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}$$

Показательное распределение

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, \ x\epsilon\,(0,\infty)\\ 0, \ \ x\in(-\infty,0)\end{cases}$$

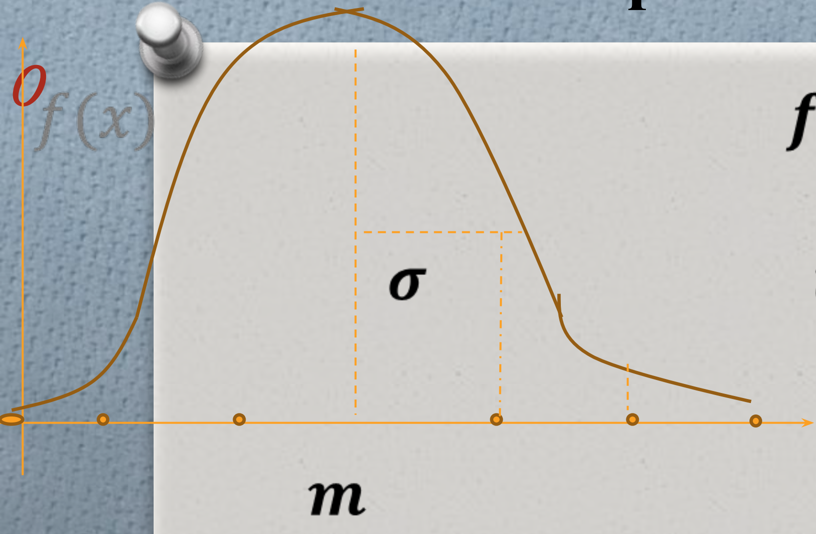




$$\boldsymbol{M[X]=\int_0^\infty\lambda x e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda};\quad D[X]=\int_0^\infty\lambda x^2 e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}}$$

Коэффициент вариации $V=\frac{\sigma[X]}{M[X]}=1$ (характерный признак)

Нормальное распределение

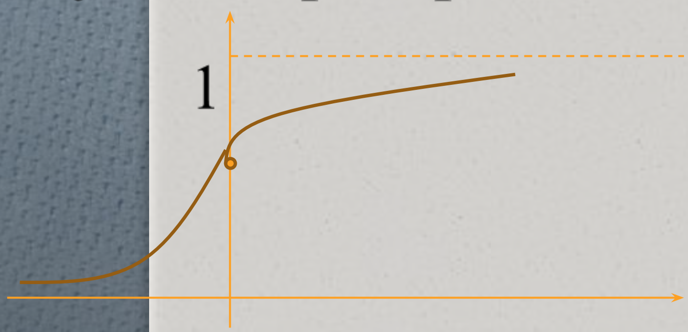


$$f(x)=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$t=\frac{x-m}{\sigma}\Rightarrow\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

$$M[X]=m;\quad D[X]=\sigma^2$$

Функция распределения $F[X]=\Phi[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$



$$\Phi(-\infty)=0;\quad \Phi(\infty)=1$$

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

$$\mathrm{P}(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

$$P(|x-m|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-1;$$

Правило 3σ : $P(|x-m|<\varepsilon)=0,9973$