Кванторы

Рассматриваемые вопросы

1. Кванторы.
2. Квантор всеобщности.
3. Квантор существования.
4. Понятие формулы логики предикатов. Значение формулы логики предикатов.
5. Равносильные формулы логики предикатов.

Понятие квантора

Квантор - (от лат. quantum - сколько), логическая операция, дающая количественную характеристику области предметов, к которой относится выражение, получаемое в результате её применения.

*В обычном языке носителями таких характеристик служат слова типа "**все**", "**каждый**", "**некоторый**", "**существует**", "**имеется**", "**любой**", "**всякий**", "**единственный**", "**несколько**", "**бесконечно много**", "**конечное число**", а также все количественные числительные.*

Операции для предиката

Для предикатов вводятся две новые по сравнению с логикой высказываний операции:

квантор общности
квантор существования

Квантор общности

Пусть P(x) – одноместный предикат, определенный на предметном множестве М.

<u>Универсальным высказыванием</u>, соответствующим предикату P(x), называется высказывание:

«каждый элемент множества М удовлетворяет предикату P(x)»

или

«для всякого х выполняется предикат»

Это высказывание обозначается - $(\forall x)P(x)$

Высказывание $(\forall x)P(x)$ считается *истинным*, если предикат P(x) тождественно истинный, а *ложным* – в противном случае.

Квантор общности

Символ $\forall x$ называется ***квантором общности по переменной x***, его читают так:

«для всех x»

«для каждого x»

«для любого x»

Выражение $(\forall x)P(x)$ читается: «*для всех x, P(x)*», или «*для каждого x, P(x)*».

Например, $\forall x(x=x)$ – это истинное универсальное высказывание, а $\forall x(x>2)$ – ложное универсальное высказывание.

Если *P(x)*- одноместный предикат, определенный на конечном множестве $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$, то:

$$\forall P(x) \leftrightarrow [P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_m)]$$

Квантор общности

Таким образом, **квантор общности** можно понимать как *оператор конъюнкции по квантифицируемой переменной*.

Квантор существования

<u>Экзистенциональным высказыванием</u>, соответствующим предикату P(x), называется высказывание **«существует элемент множества M, удовлетворяющий предикату P(x)»**, которое обозначается **$\exists$x P(x)** и считается *истинным*, если предикат P(x) выполнимый, а *ложным* – в противном случае.

Символ $\exists$x называют *квантором существования*, а выражение $\exists$x, в котором этот квантор предшествует переменной x, читают так:

«существует x такой, что…»

«для некоторого x, …»

Квантор существования

НАПРИМЕР

$\exists$ **x(x>2)** –истинное *экзистенциональное высказывание*

$\exists$ **x(x=x+1)** – ложное *экзистенциональное высказывание*.

Если ***P(x)***- одноместный предикат, определенный на конечном множестве **$\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$,** то

$$\exists P(x) \leftrightarrow \left[P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_m)\right]$$

Квантор существования

Таким образом, квантор существования можно понимать *как оператор дизъюнкции по квантифицируемой переменной.*

Примеры

Примеры записей формул и их словесные выражения:

$\forall x(x^2 - 1 = (x-1)(x+1))$ Для всех x выполняется предикат…

$\exists x(|x| \leq 0)$ Для некоторого x, справедливо неравенство...

$\forall x(|x| > 0)$ Для всех x, справедливо…..

$\exists y(5 + y = 5)$ Существует y такой, что 5+y=5

$\forall y(y^2 + y + 1 > 0)$ Для всех y выполняется предикат

$\exists y(y^2 + y + 1 = 0)$ Существует y, что ….

$\exists x(x^3 < x^2)$ Для некоторого x, справедливо

Формулы логики предикатов

В логике предикатов имеется следующая символика:

Символы p, q, r, …- переменные высказывания, принимающие два значения: 1- истина , 0 – ложь.

Предметные переменные – x, y, z, …, которые пробегают значения из некоторого множества **M**;

$\mathbf{x^0, y^0, z^0}$ – предметные константы, т. е. значения предметных переменных.

P(·), Q(·), F(·), … - одноместные предикатные переменные;

Q(·,·,…,·), R(·,·, …,·) – n-местные предикатные переменные.

P0(·), Q0(·,·, …,·) – символы постоянных предикатов.

Символы логических операций: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$,

Символы кванторных операций: $\forall x$, $\exists x$.

Вспомогательные символы: скобки, запятые.

Формулы логики предикатов

Предметная переменная называется **свободной**, если она не следует непосредственно за квантором и не входит в область действия квантора по этой переменной, все другие переменные, входящие в формулу, называются **связанными**.

$\exists y\ \forall z\ (P(x,y) \Leftrightarrow P(y,z))$

Формулой логики предикатов являются:

Каждая предикатная буква и предикатная буква со следующими за ней в скобках предметными переменными.

Выражения вида $F \wedge G$, $F \vee G$, $\neg G$, $F \Rightarrow G$, $F \Leftrightarrow G$, $(\forall y)F$, $(\exists y)G$, где F и G – формулы логики предикатов, переменная $y \in M$.

Формулы логики предикатов

Каждое высказывание как переменное, так и постоянное, является **формулой (элементарной).**

Если F(·,·, …,·) – n-местная предикатная переменная или постоянный предикат, а x1, x2,…, xn– предметные переменные или предметные постоянные (не обязательно все различные), то **F(x1, x2,…, xn) есть формула.** Такая формула называется **элементарной**, в ней предметные переменные являются свободными, не связанными кванторами.

Формулы логики предикатов

Если А и В – формулы, причем, такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то слова **А ⋀ В, А ⋁ В, А □ В** есть **формулы**. В этих формулах те переменные, которые в исходных формулах были свободны, являются **свободными**, а те, которые были связанными, являются **связанными**.

Если А – формула, то **¬А**– **формула**, и характер предметных переменных при переходе от формулы А к формуле **¬А** не меняется.

Формулы логики предикатов

Если A(x) – формула, в которую предметная переменная x входит свободно, то слова $\forall$**xA(x)** и $\exists$**xA(x)** являются **формулами**, причем, предметная переменная входит в них связанно.

Всякое слово, отличное от тех, которые названы формулами в предыдущих пунктах, **не является формулой.**

Формулы логики предикатов

Например, если P(x) и Q(x,y) – одноместный и двухместный предикаты, а q, r – переменные высказывания, то формулами будут, выражения:

$$q, P(x), P(x) \wedge Q(x^0, y), \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x, y), \overline{(Q(x, y)} \vee q) \rightarrow r$$

Не является формулой, например, слово: $\forall x Q(x, y) \rightarrow P(x)$

Здесь нарушено условие п.3, так как формулу ***∀xQ(x,y)*** переменная **x** входит связанно, а в формулу ***P(x)*** переменная **x** входит свободно.

Из определения формулы логики предикатов ясно, что всякая формула алгебры высказываний является формулой логики предикатов.

Интерпретация формулы предикатов

Интерпретацией формулы исчисления предикатов называется конкретизация множеств, из которых принимают значения предметные переменные и конкретизация отношений и соответствующих множеств истинности для каждой предикатной буквы.

Формулы исчисления предикатов

- ***тождественно истинные*** при любой интерпретации, т.е. общезначимые
- ***тождественно ложные*** при любой интерпретации, т.е. противоречивые
- ***выполнимые*** (формулы, истинность которых зависит от интерпретации)

Значение формулы логики предикатов

В качестве примера рассмотрим формулу

$$\exists y \forall z (P(x, y) \to P(y, z))$$

В формуле двухместный предикат $P(x, y)$ определен на множестве MxM, где $M=\{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$, т.е. $MxM=NxN$.

В формулу входит переменный предикат $P(x,y)$, предметные переменные x,y,z, две из которых y и z – связанные кванторами, а x – свободная.

Возьмем за конкретное значение предиката $P(x,y)$ фиксированный предикат $P^0(x,y)$: «$x<y$», а свободной переменной x придадим значение $x^0=5 \in M$.
Тогда при значениях y, меньших $x^0=5$, предикат $P^0(x0,y)$ принимает значение “***ложь***”, а импликация $P(x,y)$ □ $P(y,z)$ при всех $z \in M$ принимает значение “***истина***”, т.е. высказывание имеет значение “***истина***”.

Равносильные формулы логики предикатов

Определение 1.

Две формулы логики предикатов A и B называются **равносильными** на области M, если они принимают одинаковые логические значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области M.

Определение 2.

Две формулы логики предикатов A и B называются **равносильными**, если они равносильны на всякой области.

Равносильные формулы логики предикатов

Пусть ***A(x)*** и ***B(x)*** – переменные предикаты, а ***C*** – переменное высказывание (или формула, не содержащая ***x***). Тогда имеют место следующие равносильности:

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}.$
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}.$
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}.$
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}.$
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[A(x) \wedge B(x)]$
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[C \wedge B(x)].$
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x[C \vee B(x)]$
8. $C \to \forall x B(x) \equiv \forall x[C \to B(x)]$
9. $\forall x[B(x) \to C] \equiv \exists x B(x) \to C.$
10. $\exists x[A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x).$
11. $\exists x[C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x).$
12. $\exists x[C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x).$
13. $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y[A(x) \wedge B(y)].$
14. $\exists x[C \to B(x)] \equiv C \to \exists x B(x).$
15. $\exists x[B(x) \to C] \equiv \forall x B(x) \to C.$

Равносильные формулы логики предикатов

Пример

Предикат ***Мать(x,y)*** означает, что ***x*** является матерью для ***y***. Тогда $\forall y \exists x$***Мать(x,y)*** означает, что *у каждого человека есть мать*, - истинное утверждение.

$\exists x\ \forall y$***Мать(x,y)*** означает, что *существует мать всех людей*, что является другим утверждением, истинность которого зависит от множества значений, которые могут принимать ***y***: если это множество братьев и сестер, то оно истинно, а в противном случае оно ложно.

Таким образом, перестановка кванторов всеобщности и существования может изменить смысл и значение выражения.

Законы логических операций (общезначимые формулы логики предикатов)

16. $\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P}(x)$.

17. $\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P}(x)$.

18. $\forall x P(x) \equiv \overline{\exists x \overline{P}(x)}$.

19. $\exists x P(x) \equiv \overline{\forall x \overline{P}(x)}$.

20. $\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$.

21. $\exists x[P(x) \vee Q(x)] \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$.

22. $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$.

23. $\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y)$.

24. $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$.

25. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x[P(x) \vee Q(x)]$.

26. $\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$.

27. $\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)$.

28. $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.

29. $\forall x[P(x) \Rightarrow P(y)] \equiv \exists x P(x) \Rightarrow P(y)$.

30. $P(y) \Rightarrow \exists x P(x) \equiv \exists x[P(y) \Rightarrow P(x)]$.
$C \Rightarrow \exists x P(x) \equiv \exists x[C \Rightarrow P(x)]$.

31. $C \wedge \forall x P(x) \equiv \forall x[C \wedge P(x)]$.

32. $C \vee \forall x P(x) \equiv \forall x[C \vee P(x)]$.

33. $C \Rightarrow \forall x P(x) \equiv \forall x[C \Rightarrow P(x)]$.

34. $\exists x[C \vee P(x)] \equiv C \vee \exists x P(x)$.

35. $\exists x[C \wedge P(x)] \equiv C \wedge \exists x P(x)$.

36. $\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y) \equiv \exists x \exists y[P(x) \wedge Q(y)]$.

37. $\exists x[P(x) \Rightarrow C] \equiv \forall x P(x) \Rightarrow C$.

38. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \equiv \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \equiv$
$\equiv \forall x[P(x) \vee \forall y Q(y)] \equiv \forall x \forall y[P(x) \vee Q(y)]$.

39. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists y Q(y) \equiv$
$\equiv \exists x[P(x) \wedge \exists y Q(y)] \equiv \exists x \exists y[P(x) \wedge Q(y)]$.

Упражнение

Найти отрицание следующих формул

А) $\overline{\forall x(P(x)\wedge Q(x))}$;

Б) $\overline{\exists x(P(x)\vee Q(x))}$;

В) $\overline{\exists x\exists y(R(x,y)\to L(x,y))}$

А) $\overline{\forall x(P(x)\wedge Q(x))}\equiv\exists x\overline{(P(x)\wedge Q(x))}\equiv\exists x(\overline{P(x)}\vee\overline{Q(x)})$;

Б) $\overline{\exists x(P(x)\vee Q(x))}\equiv\forall x\overline{(P(x)\vee Q(x))}\equiv\forall x(\overline{P(x)}\wedge\overline{Q(x)})$;

В) $\overline{\exists x\exists y(R(x,y)\to L(x,y))}\equiv\exists x\overline{\exists y(R(x,y)\to L(x,y))}\equiv\exists x\forall y\overline{(R(x,y)\to L(x,y))}\equiv$

$\equiv\exists x\forall y\overline{(\overline{R(x,y)}\vee L(x,y))}\equiv\exists x\forall y(r(x,y)\wedge\overline{L(x,y)})$

Упражнение

Доказать равносильность

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

Пусть предикаты ***A(x)*** и ***B(x)*** тождественно ложны. Тогда будет ложным и предикат $A(x) \vee B(x)$

При этом будут ложными высказывания $\exists x(A(x) \vee B(x))$

$\exists x A(x) \exists x B(x)$

Пусть хотя бы один из предикатов (например, ***A(x)***) не тождественно ложный. Тогда будет не тождественно ложным и предикат $A(x) \vee B(x)$

При этом будут истинными высказывания $\exists x A(x)$ $\exists x(A(x) \vee B(x))$

Значит, будут истинными и исходные формулы

Следовательно: $\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

Самостоятельно

Для более подробного изучения материала самостоятельно читаем:
УЧЕБНИК: «Математическая логика и теория алгоритмов»,
автор Игошин В.И.

Страницы 157-164
Страницы 165-178
Страницы 178-183

Домашнее задание

Доказать равносильность $C \wedge \forall x A(x) \equiv \forall x (C \wedge A(x))$

Доказать что формула является общезначимой

$$A \equiv V(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$$

Доказать что формула является противоречивой

$$A \equiv \exists x((F(x) \to \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \to F(x)))$$