ТЕОРИЯ РЯДОВ

Теория рядов широко используется в теоретических исследованиях различных вопросах естествознания и в приближенных вычислениях. С помощью рядов вычисляются значения различных функций (логарифмических, тригонометрических, показательных и др.), вычисляются значения интегралов, решаются дифференциальные уравнения и т.п.

В частности, программы приближенного вычисления значений элементарных функций и решения многих стандартных задач, заложенные в память компьютеров и микрокалькуляторов, основаны на применении теории рядов.

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ.

1.1. Понятие о рядах

- Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad u_n \in \mathbb{R}$$

называется **числовым рядом.**

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ - члены ряда

u_n - общий член ряда

- Сумма n первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется n**-ой частичной суммой ряда** и обозначается через

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = u_1 \\ S_2 = u_1 + u_2 \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] \textit{частичные суммы}$$

При изменении n меняется и Sn; при этом возможны два случая:

1) величина S_n при $n \to \infty$ имеет предел S, т.е. $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$

Тогда ряд называется сходящимся, а S- суммой ряда.

2) величина S_n при $n \to \infty$ предела не имеет или её предел равен ∞.

Тогда ряд называется расходящимся. Такой ряд суммы не имеет.

Пример 1
(бесконечно убывающая геометрическая прогрессия):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$$

$$S_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

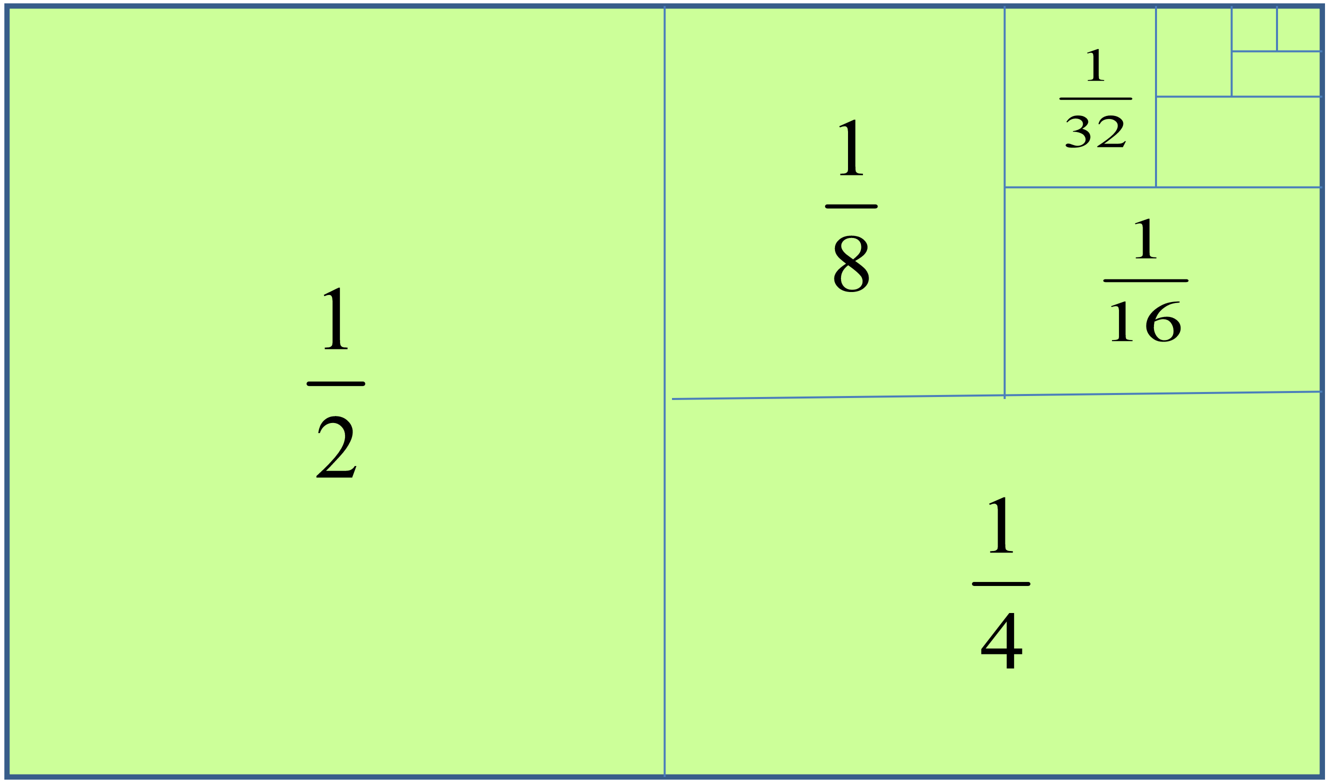
$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

$$S_5=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

частичные суммы всё меньше и меньше отличаются от 1.



Объединение всех этих прямоугольников дает исходный прямоугольник, значит, и сумма их площадей д.б. равна площади исходного:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$$

Ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots.+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

сходится, т.к.

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

формула для геометрической прогрессии $|q|<1$

Пример 2
(бесконечно возрастающая геометрическая прогрессия):

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^n + \ldots$$

Ряд расходится, т.к

$$S = \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{aq^n - a}{q - 1}}_{\textit{формула для геометрической прогрессии}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^n - 2}{2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \left(2^{n+1} - 2\right) = \infty$$

Ряд геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

Ряд сходится при $|q| < 1$ *(см.пример 1)*

Ряд расходится при $|q| \geq 1$ *(см. пример 2)*

Пример 3 (гармонический ряд):

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Ряд расходится.

Пример 4

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$$

$$\left.\begin{aligned}
&S_1 = 1\\
&S_2 = 1-1 = 0\\
&S_3 = 1-1+1 = 1\\
&S_4 = 1-1+1-1 = 0\\
&S_5 = 1-1+1-1+1 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right]$$

последовательность частичных сумм не имеет предела

Ряд расходится.

Пример 5

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

Ряд сходится к $\frac{\pi}{4}$. Сумму ряда нашёл Г.Лейбниц

Пример 6

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

Ряд сходится к $\frac{\pi^2}{6}$. Сумму ряда нашёл Л.Эйлер

Свойства конечных сумм , такие как ассоциативность (произвольная группировка членов), коммутативность (произвольная перестановка членов), для рядов вообще говоря не имеют места.

Однако, если ряд с положительными членами сходится, то его члены м.б. сгруппированы произвольным образом- полученный ряд также сходится и имеет ту же сумму, что и данный.

Свойства рядов

1^0. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и его сумма равна S,

то ряд $$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots, \quad c \in \mathbb{R}$$

также сходится и его сумма равна cS.

Если все члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то ряд останется сходящимся, а его сумма умножится на это число.

1^0. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится и $c \neq 0$,

то ряд $$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots, \quad c \in \mathbb{R}$$

также расходится.

Пример 7

Известно, что ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+....+\frac{1}{2^n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

сходится. Показать, что сходится и ряд

$$2^4+2^3+2^2+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+....+\frac{1}{2^{n-4}}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-4}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot 2^{-4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^4}{2^n}=2^4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

Последний ряд получился из первого умножением на $c=2^4$

2^0. Если ряды $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots$$

сходятся и их суммы равны соответственно S' и S'', то

и каждый из двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ сходится и

сумма каждого равна соответственно $S' \mp S''$.

Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать.

Пример 8

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = 2 + \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \ldots + \frac{2^n + 3^n}{6^n} + \ldots$$

и если он сходится, найти его сумму S.

Решение

Данный ряд м.б. представлен в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{6^n}+\frac{3^n}{6^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=(1+1)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots$$

или $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

Рассмотрим получившиеся два ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Т.к. они являются рядами убывающей геометрической прогрессии, то они сходятся и их суммы равны соответственно:

$$S' = \lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$S'' = \lim_{n\to\infty} S''_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Следовательно, данный ряд сходится и его сумма:

$$S = S' + S'' = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

3^0. Если в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$

добавить или отбросить конечное число членов, то полученный ряд сходится или расходится одновременно с данным.

В случае сходимости рассматриваемых рядов их суммы отличаются на сумму добавленных или отброшенных членов.

Пример 9

Известно, что ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+....+\frac{1}{2^n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

сходится. Тогда сходящимся является и ряд:

$$100+\sqrt{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+....+\frac{1}{2^{n+1}}+...$$

который получается из данного отбрасыванием и добавлением конечного числа членов.

- Сумма $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+k}$

называется *n*-ым остатком ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Т.к. остаток получается из данного ряда отбрасыванием, а данный ряд из остатка- добавлением конечного числа членов, то согласно свойству 3^0*, они одновременно сходятся или расходятся.*

- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(S - S_n\right) = \lim_{n\to\infty} S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$

Т.е. остаток стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

В вопросах приближенного вычисления важную роль играет оценка точности приближения.

Если значение данной величины представлено в виде ряда, то оценку приближения при помощи частичных сумм можно получить путем исследования остатка ряда.

Четкое определение сходимости ряда, основанное на понятии предела последовательности частичных сумм, появилось лишь в начале XIX века. Тогда же началось систематическое изучение рядов.

1.2. Необходимый признак сходимости ряда

- Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

сходится, то его общий член $u_n \to 0$ при неограниченном возрастании n ($n \to \infty$)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится

Пример 10

Известно, что ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+....+\frac{1}{2^n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

сходится. Проверим необходимое условие $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Необходимое условие выполнено.

Пример 11

Ряд $$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right)^3+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ldots$$

расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$$

Необходимое условие не выполнено $\Rightarrow$ ряд расходится

Пример 12

Известно, что ряд $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+....+\frac{1}{n}+...$$

гармонический .

Необходимое условие сходимости ряда выполняется:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Между тем этот ряд расходится.

Доказательство:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

Прологарифмируем по основанию е:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \ln e$$

$$n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$\ln\left(\frac{1+n}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$\ln(1+n) - \ln n < \frac{1}{n}$$

$$\ln(1+n)-\ln n<\frac{1}{n}$$

Пусть $n = 1,2,3,4,5,\ldots$ Тогда получаем:

$$\ln 2-\ln 1<1$$

$$\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$$

$$\ln 4-\ln 3<\frac{1}{3}$$

$$\ln 5-\ln 4<\frac{1}{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\ln(1+n)-\ln n<\frac{1}{n}$$

Складывая эти неравенства, получим:

$$\ln(1+n) < \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}}_{}$$

S_n- частичная сумма гармонического ряда

$$\ln(1+n) < S_n$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+n)=\infty$ то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$

Ряд расходится.

Рассмотренный признак является только необходимым, но не является достаточным.

Иными словами: нарушение этого условия гарантирует расходимость ряда, но его выполнение не гарантирует сходимости!