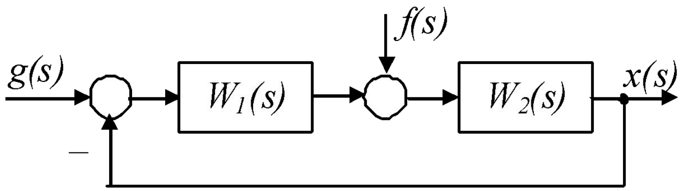
ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТЫХ САР

Передаточные функции САР по управляющему и возмущающему воздействию



g(s) – задающее воздействие;
f(s) – возмущающее воздействие;
x(s) – регулируемая координата.

согласно принципа суперпозиции

$$x(s) = K_g(s)g(s) + K_f(s)f(s)$$

$K_g(s)$ - ПФ замкнутой САР по управляющему воздействию (по управлению)

$K_f(s)$ - ПФ замкнутой САР по возмущающему воздействию (по возмущению)

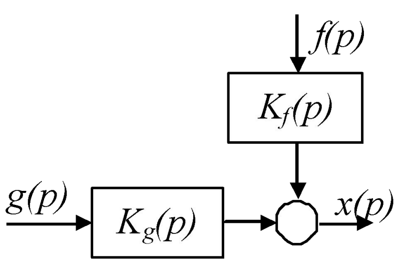
При определении ПФ замкнутой САР по одному из воздействий другое воздействие принимается равным нулю.

Полагая $f(p)=0$, ПФ по управлению:

$$K_g(p) = \frac{x(p)}{g(p)} = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2}$$

Полагая $g(p)=0$, ПФ по возмущению:

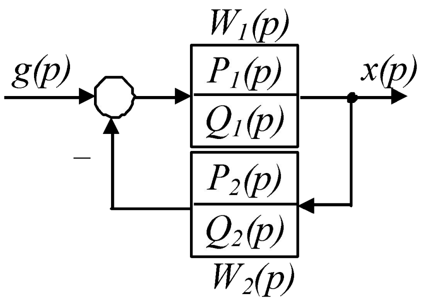
$$K_f(p) = \frac{x(p)}{f(p)} = \frac{W_2}{1 + W_1 W_2}$$



Эквивалентная схема линейной САР

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТЫХ САР

Параметры передаточных функций разомкнутых и замкнутых САР



ПФ разомкнутой САР: $$W_0(p)=W_1(p)W_2(p)=\frac{P_1(p)P_2(p)}{Q_1(p)Q_2(p)}=\frac{P(p)}{Q(p)}$$

ПФ замкнутой САР: $$K(p)=\frac{W_1(p)}{1+W_0(p)}=\frac{\dfrac{P_1(p)}{Q_1(p)}}{1+\dfrac{P_1(p)P_2(p)}{Q_1(p)Q_2(p)}}=\frac{Q_2(p)P_1(p)}{Q_1(p)Q_2(p)+P_1(p)P_2(p)}=\frac{Q_2(p)P_1(p)}{Q(p)+P(p)}=\frac{H(p)}{G(p)}$$

Из последнего равенства следует то важное соотношение, что <u>характеристический полином замкнутой САР равен сумме числителя и знаменателя ПФ разомкнутой САР</u>:

$$\boxed{G(p)=P(p)+Q(p)}$$

ПФ замкнутой САР может быть представлена как отношение двух операторов-многочленов:

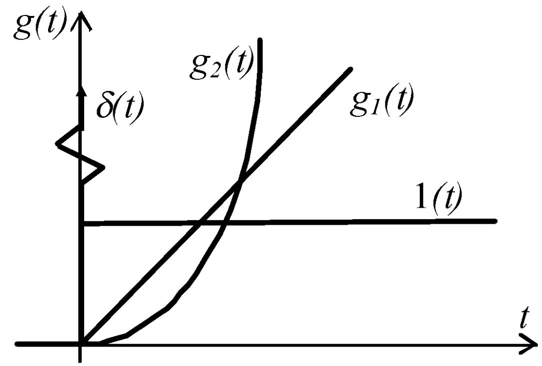
$$K(p)=\frac{H(p)}{G(p)}=\frac{b_0+b_1p+b_2p^2+\dots+b_mp^m}{a_0+a_1p+a_2p^2+\dots+a_np^n}$$

Отметим такое <u>важное свойство полиномов</u>: если все коэффициенты полинома – действительные числа, то в общем случае нулями его могут быть как действительные, так и комплексные числа, причем комплексные нули такого полинома (при их наличии) образуют комплексно-сопряженные пары.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТЫХ САР

Типовые воздействия

При анализе характеристик САР применяются следующие типовые воздействия:



Типовые воздействия

1. Единичный скачок (единичная ступенчатая функция Хевисайда):

$$1(t)=\begin{cases}1, & \text{при } t\ge 0\\ 0, & \text{при } t<0\end{cases}$$

Такое воздействие имеет место в штатных режимах работы. Этому типу воздействия соответствуют, например, режимы включения и отключения питания электродвигателей, режима наброса и сброса нагрузки.

2. Дельта-функция:

$$\delta(t)=\frac{d1(t)}{dt}=\begin{cases}\infty, & \text{при } t=0\\ 0, & \text{при } t\ne 0\end{cases}$$

Этому типу нагрузки соответствуют случаи внезапного увеличения нагрузки электродвигателей, например, при резке или распиловке материала, вызванные технологическим циклом (начало реза) или неоднородностью материала.

Физически эта функция описывает импульс бесконечно большой амплитуды и бесконечно малой продолжительности, ограничивающий площадь, равную единице.

3. Полиномиальные воздействия вида

$$g(t)=\begin{cases}c_0+c_1t+c_2t^2+\dots+c_kt^k, & \text{при } t\ge 0;\\ 0, & \text{при } t<0.\end{cases}$$

Частными случаями такого воздействия, например, являются

$$g_1(t)=\begin{cases}c_1t, & \text{при } t\ge 0;\\ 0, & \text{при } t<0.\end{cases}$$

или

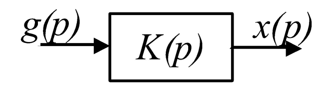
$$g_2(t)=\begin{cases}c_2t^2, & \text{при } t\ge 0;\\ 0, & \text{при } t<0.\end{cases}$$

Эти воздействия соответствуют случаям изменения управления с постоянной скоростью и с постоянным ускорением соответственно.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТЫХ САР

Временные характеристики замкнутых САР,их взаимосвязь и связь с передаточной функцией

Любая, сколь угодно сложная САР может быть представлена в виде, представленном на рис., и описана уравнениями в области изображений Лапласа:



$$x(p) = K(p)g(p) \qquad (*)$$

Помимо ДУ и ПФ, в ТАУ при описании и анализе САР широко используют переходные функции и временные характеристики.

Переходной функцией САР (или звена) называют функцию *h(t)*, описывающую реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие *1(t)* при нулевых начальных условиях. График этой функции называют *переходной характеристикой*.

Импульсной переходной или *весовой функцией* (*функцией веса*) называют функцию *w(t)*, описывающую реакцию САР (или звена) на единичное импульсное воздействие *δ(t)* при нулевых начальных условиях. График этой функции называют *импульсной переходной характеристикой* (*весовой характеристикой*).

Переходную и импульсную переходную функции называют *временными функциями*, а их графики – *временными характеристиками*.
Между ПФ в изображениях Лапласа, переходной функцией и весовой функцией существует взаимнооднозначное соответствие.

Из определения импульсной переходной функции следует, что при подстановке в (*) управляющего воздействия *g(t) = δ(t) изменение выходной координаты будет соответствовать импульсной переходной (весовой) характеристике, т.е. x(t) = w(t)*. В изображениях Лапласа:

$x(p) = L[w(t)] = w(p)$ при $g(p) = L[\delta(t)] = 1$ Подставив эти выражения в (*), получим, что $w(p) = K(p)$

то есть, *изображения Лапласа импульсной переходной функции и передаточной функции САР равны*.

Это означает, что, если известна ПФ замкнутой САР *K(p)*, то импульсная переходная функция *w(t)* может быть определена с помощью обратного преобразования Лапласа: $w(t) = L^{-1}[K(p)]$

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТЫХ САР

Временные характеристики замкнутых САР,их взаимосвязь и связь с передаточной функцией

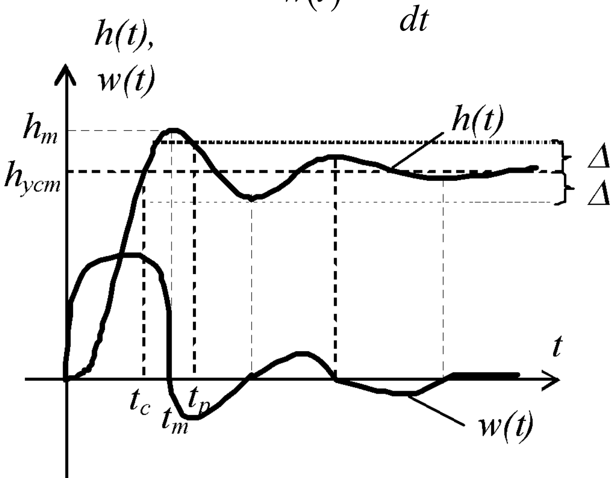
Импульсная переходная функция является исчерпывающей динамической характеристикой САР в том смысле, что, зная ее, всегда можно определить реакцию САР на любое воздействие.
Из определения переходной функции следует, что при подстановке воздействия $g(t)=1(t)$ в (*) будет

$x(t)=h(t)$, или в изображениях Лапласа: $x(p)=L[h(t)]=h(p)$ при $g(p)=L[1(t)]=\frac{1}{p}$

Подставив эти выражения в (*), получим, что $K(p)=ph(p)$

Если для этого выражения применить обратное преобразование Лапласа, то в левой части, согласно $w(t)=L^{-1}[K(p)]$, будем иметь импульсную переходную функцию, а в правой части – производную от переходной функции по времени:

$$w(t)=\frac{dh(t)}{dt}$$



Временные функции замкнутых САР

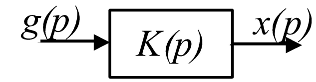
При этом переходная функция *h(t)* замкнутой системы имеет следующие показатели:
$h_{уст}$ – установившееся значение переходной функции (регулируемой координаты);
h_m – максимальное значение;
Δ – величина, определяющая окрестность точки $h_{уст}$, внутри которой процесс можно считать установившимся (обычно в технических системах $\Delta=0{,}05h_{уст}$

t_c – время первого согласования переходной функции с установившимся значением;
t_m – время достижения переходной функцией значения h_m;
t_p – время регулирования, по истечении которого переходный процесс войдет в зону $h_{уст}\pm\Delta$ и больше из нее не выйдет.

Временные показатели t_c, t_m, t_p характеризуют *быстродействие САР*.
Колебательность САР характеризуется показателем *перерегулирования*, который обычно измеряется в процентах:

$$\sigma=\frac{h_m-h_{уст}}{h_{уст}}\times 100\%$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТЫХ САР



Понятие установившегося и свободного процессов. Частотная функция

Реакция САР на произвольное воздействие *g(t)* может быть определена по выражению: $x(t)=\int_0^t k(\tau)g(t-\tau)d\tau$ (**)

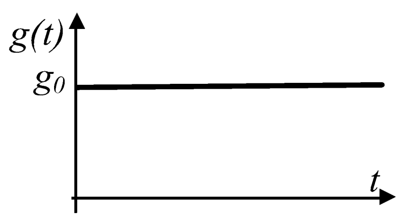
где *t* – время наблюдения за реакцией САР.

При переходном процессе в нормально функционирующей системе все величины (координаты САР) состоят из установившихся (вынужденных) и свободных составляющих.

Таким образом для рассматриваемой САР, если устремить $t \to \infty$, выражение (**) будет описывать *вынужденный процесс*, который имеет место после затухания всех свободных составляющих

$$x(t)=\int_0^t k(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^\infty k(\tau)g(t-\tau)d\tau-\int_t^\infty k(\tau)g(t-\tau)d\tau=x_{вын}(t)+x_{св}(t)$$

Пример 1. Определить вынужденный процесс в САР при скачкообразном воздействии $g(t)=g_0$



Вынужденный процесс: $x_{вын}(t)=\int_0^\infty k(\tau)g(t-\tau)d\tau=g_0\int_0^\infty k(\tau)d\tau$

Поскольку $g(t-\tau)=g_0$. Второй множитель есть не что иное, как ПФ САР

$K(p)=\int_0^\infty k(\tau)e^{-p\tau}d\tau$ при $p\to 0$, т.е. $K(0)$

Из этого выражения видно, что вынужденный процесс от скачкообразного воздействия не зависит от времени и пропорциональный площади, ограниченной импульсной характеристикой САР:

$$x_{вын}(t)=K(0)g_0$$

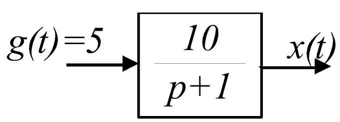
Таким образом, вынужденный процесс от постоянного (скачкообразного) воздействия равен произведению величины этого воздействия на ПФ *K(p)* при *p=0*.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТЫХ САР

Понятие установившегося и свободного процессов. Частотная функция

Пример 1   Этот же результат можно получить, если учесть, что в рассматриваемом примере $g(p)=g_0/p$, и воспользоваться теоремой о конечном значении, согласно которой

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=x_{вын}(t)=\lim_{s\to 0} px(p)=\lim_{s\to 0} pg(p)K(p)=\lim_{s\to 0} p\frac{g_0}{p}K(p)=K(0)g_0$$



Например, для САР вынужденный процесс будет: $x_{вын}(t)=5\cdot 10=50$

Пример 2. Определить вынужденный процесс при гармоническом воздействии $\tilde{g}(t)=g_0 e^{j\omega t}$

Вычислим $\tilde{g}(t-\tau)=g_0 e^{j\omega(t-\tau)}=g_0 e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau}=\tilde{g}(t)e^{-j\omega\tau}$

Вынужденный процесс: $x_{вын}(t)=\int\limits_0^\infty k(\tau)g(t-\tau)d\tau=\tilde{g}(t)\int\limits_0^\infty k(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

Второй множитель есть ПФ САР $K(p)=\int\limits_0^\infty k(\tau)e^{-p\tau}d\tau$ при $p=j\omega$

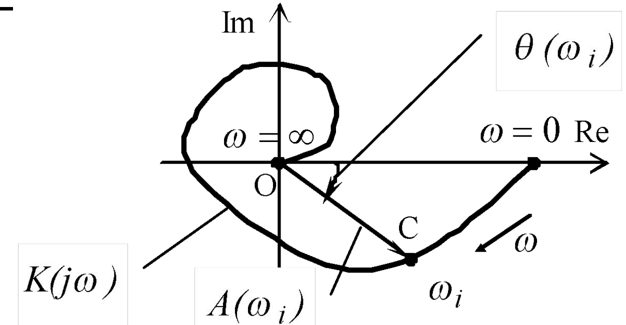
Тогда $x_{вын}(t)=K(j\omega)\tilde{g}(t)$

Зависимость $K(j\omega)=K(p)\big|_{p=j\omega}$ называется *частотной передаточной функцией* САР.

Таким образом, вынужденный процесс от гармонического воздействия является также гармоническим, и равен произведению частотной функции на входное воздействие.

<u>ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТЫХ САР</u>

<u>Частотные характеристики и их физический смысл</u>



Частотные характеристики (примерный вид)

Частотную функцию САР изображают графически на комплексной плоскости при изменении частоты *w* гармонического сигнала от нуля (или от $-\infty$) до $+\infty$. Такой график изменения положения годографа частотной функции при изменении частоты называется *частотной характеристикой.*

Частотную характеристику можно представить в следующем виде:

$$K(j\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$A(\omega) = |K(j\omega)|$ – *амплитудно-частотная характеристика* (АЧХ) САР, равная длине годографа частотной характеристики);

$\theta(\omega) = \arg[K(j\omega)]$ – *фазо-частотная характеристика* (ФЧХ) САР, равная угловому положению годографа частотной характеристики.

Таким образом, АЧХ есть коэффициент передачи между амплитудой входного гармонического сигнала и амплитудой выходного сигнала. Другими словами, значение АЧХ при определенной частоте входного гармонического сигнала равно отношению амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала.

ФЧХ характеризует сдвиг по фазе выходного гармонического сигнала относительно входного. Если $\theta < 0$, то выходной сигнал отстает по фазе от входного сигнала, в противном случае – опережает.
Таким образом, если САР работоспособна, то при входном воздействии $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ после окончания переходного процесса выходной сигнал будет иметь вид:

$$x = U_m A(\omega)\sin[\omega t + \varphi + \theta(\omega)]$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТЫХ САР

Частотные характеристики и их физический смысл

Пример. Построить частотную характеристику САР с ПФ $K(p)=\dfrac{k}{Tp+1}$

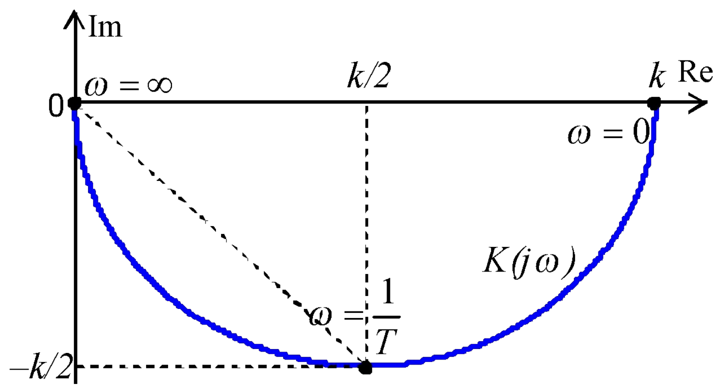
Решение. Записываем выражения для частотных характеристик:

$$K(j\omega)=\frac{k}{j\omega T+1}=\frac{k}{j\omega T+1}\cdot\frac{1-j\omega T}{1-j\omega T}=\frac{k\cdot(1-j\omega T)}{1+\omega^2T^2}=\frac{k}{1+\omega^2T^2}-j\frac{k\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

$$A(\omega)=|K(j\omega)|=\frac{|\text{числителя}|}{|\text{знаменателя}|}=\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$$

$$\theta(\omega)=\arg[K(j\omega)]=arctg\frac{-k\omega T}{k}=-arctg\omega T$$

ω	$K(j\omega)$	$A(\omega)$	$\theta(\omega)$
0	k	k	0
$1/T$	$\frac{k}{2}-j\frac{k}{2}$	$0,707k$	$\pi/4$
∞	0	0	$\pi/2$



Очевидно, что с ростом частоты *A(w)* снижается, а $\theta(\omega)$ возрастает. В действительности частотная характеристика *K(jw)* будет иметь форму полукруга.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТЫХ САР

Частотные характеристики и их физический смысл

Графическое же изображение АЧХ и ФЧХ будет очень неудобным для восприятия, поэтому используют так называемые *логарифмические частотные характеристики*.

Логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ) называется зав-мость $L(\omega)=20\lg\left|K(j\omega)\right|$

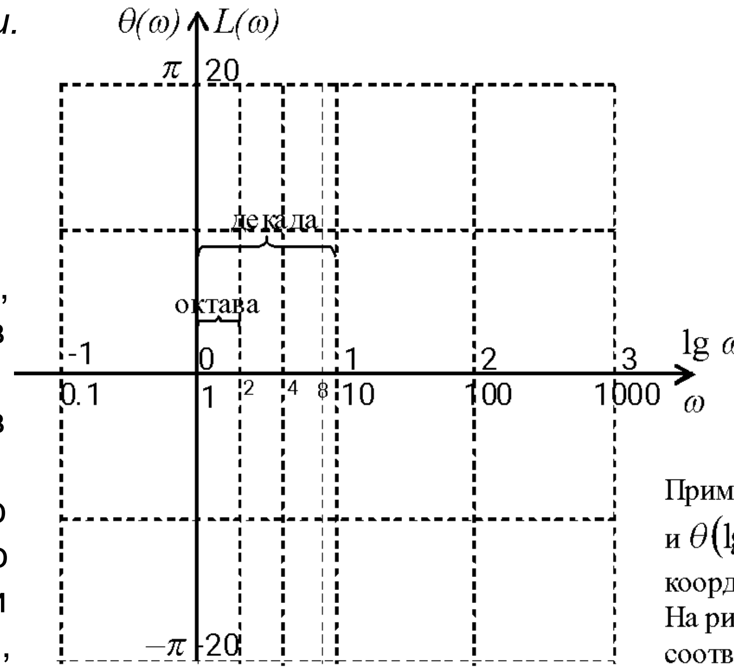
которая строится в осях lg ω, L и измеряется в децибелах (дБ).

Бел – логарифмическая единица двух одноименных физических величин, соответствующая десятикратному увеличению мощности.

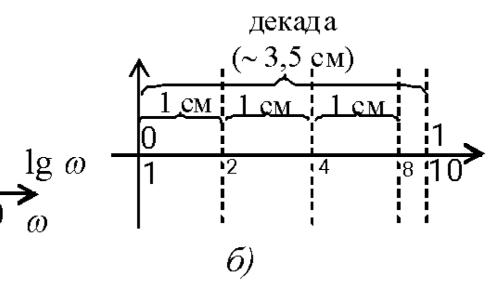
Логарифмической фазо-частотной характеристикой (ЛФЧХ) является зависимость , $\theta(\omega)$ которая строится в осях lg ω, θ (рис.а).

Отрезок на оси абсцисс, соответствующий увеличению частоты в 2 раза, называется *октавой*; соответствующий увеличению частоты в 10 раз – *декадой*.

При построении ЛАЧХ и ЛФЧХ вручную на бумаге в клетку можно воспользоваться приближенными соотношениями октавы и декады, приведенными на рис.б.



а)



б)

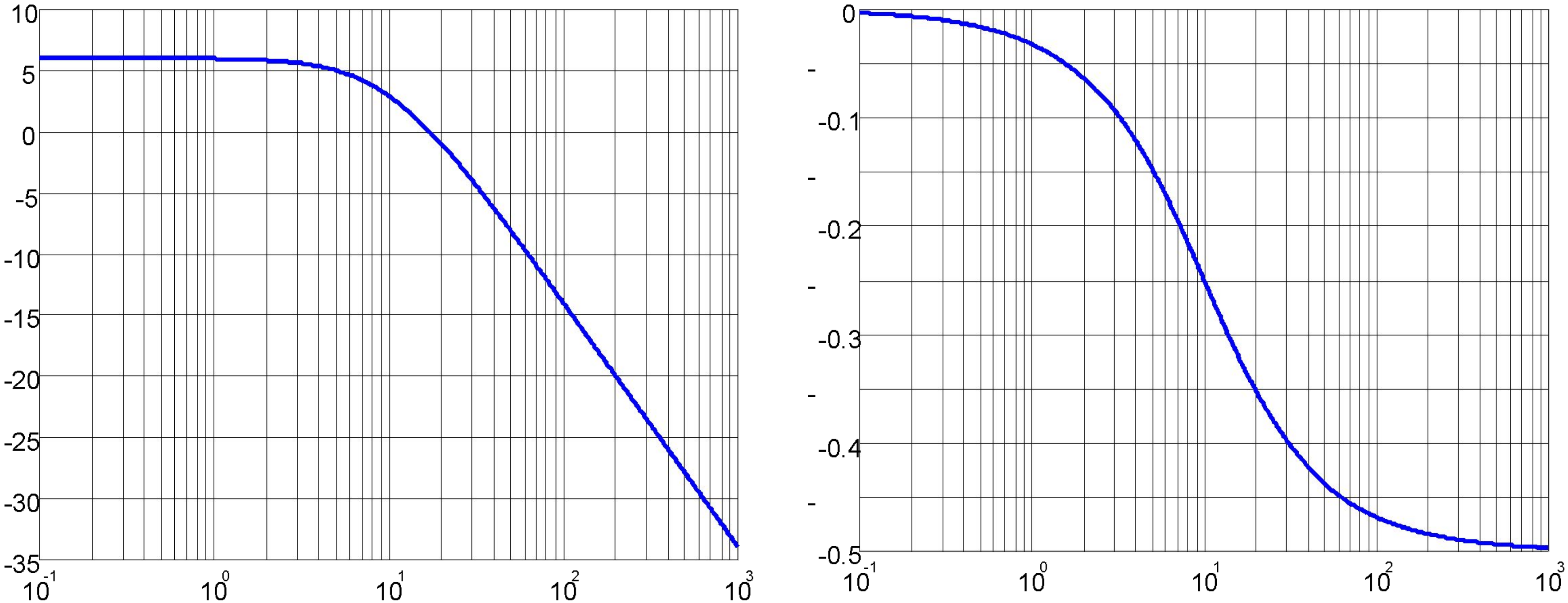
Примечание. Зависимости $L(\lg\omega)$ и $\theta(\lg\omega)$ в одной системе координат практически не строятся. На рис. а показано только соответствие осей координат

Координатная сетка для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ

<u>ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТЫХ САР</u>

<u>Частотные характеристики и их физический смысл</u>

Например, для рассмотренного выше примера при *k=2*, *T=0,1* ЛАЧХ и ЛФЧХ имеют вид



ЛАЧХ (а) и ЛФЧХ (б) для САР