Переход к новому основанию логарифма

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Основные свойства логарифмов:

Если a, b, c – положительные числа, причем $a \neq 1$, то справедливы равенства:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a b^r = r \log_a b, \text{ для любого } r$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b, \text{ для любого } r$$

Теорема. Если a, b, c – положительные числа, причем $a \neq 1$, $c \neq 1$, то имеет место равенство

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Формула перехода к новому основанию логарифма

$$\left.\begin{aligned} x &= \log_a b \\ y &= \log_c b \\ z &= \log_c a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} a^x &= b \\ c^y &= b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^x = c^y \\ &c^z = a \end{aligned}\right\} \Rightarrow (c^z)^x = c^y \Leftrightarrow c^{zx} = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{z} \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_2 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 2} \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 2 \cdot \log_2 x$$

$$\log_3 x = k \cdot \log_2 x, k = \log_3 2$$

$$\log_5 x = \frac{\log_7 x}{\log_7 5} \Leftrightarrow \log_7 x = \log_7 5 \cdot \log_5 x$$

$$\log_7 x = k \cdot \log_5 x, k = \log_7 5$$

Следствие 1. Если a, b – положительные числа, причем $a \neq 1$, $b \neq 1$, то справедливо равенство

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_7 5 = \frac{1}{\log_5 7}$$

$$\lg 9 = \frac{1}{\log_9 10}$$

Следствие 2. Если a, b – положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа $r \neq 0$ справедливо равенство

$$\mathbf{\log_a b = \log_{a^r} b^r}$$

$$\log_{a^r} b^r = \frac{\log_a b^r}{\log_a a^r} = \frac{r \log_a b}{r \log_a a} = \log_a b$$

$$\log_2 3 = \log_{2^2} 3^2 = \log_{2^{-1}} 3^{-1} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$$

Пример:

$$\log_a b = \log_{a^r} b^r$$

- Вычислить $\log_2 \frac{1}{3} + \log_4 9$.

Решение:

$$\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$$

$$\log_2 \frac{1}{3} + \log_4 9 = \log_2 \frac{1}{3} + \log_2 3 = \log_2 \left(\frac{1}{3} \cdot 3\right) = \log_2 1 = 0$$

Ответ: 0.

Пример:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

- Известно, что $\log_5 2 = b$. Найти $\log_2 \frac{1}{625}$.

Решение:

$$\log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2} = \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{625} = 5^{-4}$$

$$\log_2 \frac{1}{625} = \log_2 5^{-4} = -4 \log_2 5 = -4 \cdot \frac{1}{b} = -\frac{4}{b}$$

Ответ: $-\frac{4}{b}$.

Пример:

- Решить уравнение $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$.

Решение:

$$\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = \log_{2^2} x + \log_{2^4} x + \log_2 x = \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{4}\log_2 x + \log_2 x =$$

$$= \frac{7}{4}\log_2 x$$

$$\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7 \Leftrightarrow \frac{7}{4}\log_2 x = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_2 x^{\frac{1}{4}} = \log_2 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{1}{4}} = 2 \Leftrightarrow x = 16$$

Ответ: 16.

Пример:

- Вычислить $9^{\log_3 4} + \log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$.

Решение:

$$9^{\log_3 4} = (3^2)^{\log_3 4} = 3^{2\log_3 4} = 3^{\log_3 4^2} = 3^{\log_3 16} = 16$$

$$\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36 = \log_{6^{\frac{1}{2}}} 3 \cdot \log_3 6^2 = 2 \cdot 2\log_6 3 \cdot \log_3 6 = 4\frac{1}{\log_3 6} \cdot \log_3 6 = 4$$

$$9^{\log_3 4} + \log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36 = 16 + 4 = 20$$

Ответ: 20.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \log_{a^r} b^r$$