Тема 1.3 Транспортная задача

Постановка задачи

- Имеются m пунктов отправления (ПО) A_1, A_2, ..., A_m, в которых сосредоточены запасы каких-то однородных грузов в количестве соответственно a_1, a_2, ..., a_m единиц. Имеются n пунктов назначения (ПН) B_1, B_2, ..., B_n, подавших заявки соответственно на b_1, b_2, ..., b_n единиц груза.

Постановка задачи

- Сумма всех заявок равна сумме всех запасов:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{b=1}^{n} b_j$$

- Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы груза от каждого пункта отправления A_i до каждого пункта назначения B_j (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n).

Постановка задачи

- Все числа c_{ij}, образующие прямоугольную таблицу (матрицу), заданы:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

- Считается, что стоимость перевозки нескольких единиц груза пропорциональна их числу.

Постановка задачи

- Требуется составить такой план перевозок (откуда, куда и сколько единиц везти), чтобы все заявки были выполнены, а общая стоимость всех перевозок была минимальна.

- Обозначим x_{ij} — количество единиц груза, отправляемого из i-го ПО A_i в j-й ПН B_j. Неотрицательные переменные x_{ij} тоже можно записать в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

- Совокупность чисел (x_{ij}) называется ***планом перевозок***, а сами величины x_{ij} — ***перевозками***.

Неотрицательные переменные x_{ij} должны удовлетворять следующим условиям

1. Суммарное количество груза, направляемого из каждого ПО во все ПН, должно быть равно запасу груза в данном пункте. Это даст *m* условий-равенств:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{cases}$$

Неотрицательные переменные x_{ij} должны удовлетворять следующим условиям

2. Суммарное количество груза, доставляемого в каждый ПН из всех ПО, должно быть равно заявке, поданной данным пунктом. Это даст n условий-равенств:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_m \end{cases}$$

Неотрицательные переменные x_{ij} должны удовлетворять следующим условиям

3. Суммарная стоимость всех перевозок, то есть сумма величин x_{ij}, умноженных на соответствующие стоимости c_{ij}, должна быть минимальной:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_{1j} \Rightarrow \min,$$

Алгоритм решения транспортной задачи в самом общем виде:

1. Построение транспортной таблицы.
2. Проверка задачи на закрытость.
3. Составление опорного плана.
4. Проверка опорного плана на вырожденность.
5. Вычисление потенциалов для плана перевозки.
6. Проверка опорного плана на оптимальность.
7. Перераспределение поставок.
8. Если оптимальное решение найдено, переходим к п. 9, если нет — к п. 5.
9. Вычисление общих затрат на перевозку груза.
10. Построение графа перевозок.

Пример 6.1. Решить транспортную задачу, заданную в таблице условий методом потенциалов:

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	1	2	150
A_2	3	4	5	1	100
A_3	3	6	3	4	100
Потребности	140	100	70	40	0

Решение. Найдем сначала опорный план с помощью одного из методов описанного выше. Пусть это будет метод минимального элемента. Тогда после $m+n-1$ шагов получим следующую таблицу с опорным планом:

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 80	3	1 70	2	0 [150]
A_2	3 60	4	5	1 40	0 [100]
A_3	3 0	6 100	3	4	0 [100]
Потребности	0 [140]	0 [100]	0 [70]	0 [40]	350

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 80	3	1 70	2	0 [150]
A_2	3 60	4	5	1 40	0 [100]
A_3	3 0	6 100	3	4	0 [100]
Потребности	0 [140]	0 [100]	0 [70]	0 [40]	350

Опорный план имеет следующий вид:

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{80} & 0 & \mathbf{70} & 0 \\ \mathbf{60} & 0 & 0 & \mathbf{40} \\ \mathbf{0} & \mathbf{100} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

При этом плане стоимость перевозок вычисляется так:

$$F = 2\cdot80 + 1\cdot70 + 3\cdot60 + 1\cdot40 + 3\cdot0 + 6\cdot100 = 1050$$

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 80	3	1 70	2	0 [150]
A_2	3 60	4	5	1 40	0 [100]
A_3	3 0	6 100	3	4	0 [100]
Потребности	0 [140]	0 [100]	0 [70]	0 [40]	350

Проверяем полученный опорный план на оптимальность. Для этого находим потенциалы пунктов отправления и назначения. Для заполненных клеток составляем систему из 6 уравнений с 7 неизвестными:

$$\beta_1-\alpha_1=2$$
$$\beta_3-\alpha_1=1$$
$$\beta_1-\alpha_2=3$$
$$\beta_4-\alpha_2=1$$
$$\beta_1-\alpha_3=3$$
$$\beta_2-\alpha_3=6$$

Полагая α_1=0, находим β_2=2, β_3=1, α_2=-1, α_3=-3, β_4=0, β_2=5

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 80	3	1 70	2	0 [150]
A_2	3 60	4	5	1 40	0 [100]
A_3	3 0	6 100	3	4	0 [100]
Потребности	0 [140]	0 [100]	0 [70]	0 [40]	350

Для каждой свободной клетки вычисляем число $\alpha_{ij}=\beta_j-\alpha_i-c_{ij}$. α_{12}=2, α_{14}=-2, α_{22}=2, α_{23}=-3, α_{33}=-1, α_{34}=-3.

Полученные числа заключаем в рамки и записываем их в соотвестствующие клетки таблицы:

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 80	3 $\boxed{2}$	1 70	2 $\boxed{-2}$	150
A_2	3 60	4 $\boxed{2}$	5 $\boxed{-3}$	1 40	100
A_3	3 0	6 100	3 $\boxed{-1}$	4 $\boxed{-3}$	100
Потребности	140	100	70	40	350

Среди чисел α_{ij} есть положительные. Следовательно данный опорный план не является оптимальным. Наибольшее положительное число 2 находится в пересечении строки A_1 и столбца B_2. Для данной свободной клетки строим цикл пересчета. Для этого вставим в эту клетку знак "+" а остальные клетки цикла поочередно знаки "−" и "+".

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 − 80	3 + $\boxed{2}$	1 70	2 $\boxed{-2}$	150
A_2	3 60	4 $\boxed{2}$	5 $\boxed{-3}$	1 40	100
A_3	3 + 0	6 − 100	3 $\boxed{-1}$	4 $\boxed{-3}$	100
Потребности	140	100	70	40	350

Наименьшее из чисел в минусовых клетках равно 80. Клетка, в которой находится это число становится свободной. В новой таблице другие числа получаются так. Числам, находящимся в плюсовых клетках добавляется 80, а из чисел, находящихся в минусовых клентках вычитается это число.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3 80	1 70	2	150
A_2	3 60	4	5	1 40	100
A_3	3 80	6 20	3	4	100
Потребности	140	100	70	40	350

Опорный план имеет следующий вид:

$$X=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{80} & \mathbf{70} & 0 \\ \mathbf{60} & 0 & 0 & \mathbf{40} \\ \mathbf{80} & \mathbf{20} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

При этом плане стоимость перевозок вычисляется так:

$$F = 3\cdot 80 + 1\cdot 70 + 3\cdot 60 + 1\cdot 40 + 3\cdot 80 + 6\cdot 20 = 890$$

Проверяем полученный опорный план на оптимальность. Для этого находим потенциалы пунктов отправления и назначения. Для заполненных клеток составляем систему из 6 уравнений с 7 неизвестными:

$$\beta_2 - \alpha_1 = 3$$
$$\beta_3 - \alpha_1 = 1$$
$$\beta_1 - \alpha_2 = 3$$
$$\beta_4 - \alpha_2 = 1$$
$$\beta_1 - \alpha_3 = 3$$
$$\beta_2 - \alpha_3 = 6$$

Полагая α_1=0, находим β_2=3, β_3=1, α_3=-3, β_1=0, α_2=-3, β_4=-2

Для каждой свободной клетки вычисляем число $\alpha_{ij}=\beta_j-\alpha_i-c_{ij}$. α_{11}=-2, α_{14}=-4, α_{22}=2, α_{23}=-1, α_{33}=1, α_{34}=-3.

Полученные числа заключаем в рамки и записываем их в соотвестствующие клетки таблицы:

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 $\boxed{-2}$	3 80	1 70	2 $\boxed{-4}$	150
A_2	3 60	4 $\boxed{2}$	5 $\boxed{-1}$	1 40	100
A_3	3 80	6 20	3 $\boxed{1}$	4 $\boxed{-3}$	100
Потребности	140	100	70	40	350

Среди чисел α_{ij} есть положительные. Следовательно данный опорный план не является оптимальным. Наибольшее положительное число 2 находится в пересечении строки A_2 и столбца B_2. Для данной свободной клетки строим цикл пересчета. Для этого вставим в эту клетку знак "+" а остальные клетки цикла поочередно знаки "−" и "+".

<table>
<tr><th rowspan="2">Пункты отправления</th><th colspan="4">Пункты назначения</th><th rowspan="2">Запасы</th></tr>
<tr><th>B_1</th><th>B_2</th><th>B_3</th><th>B_4</th></tr>
<tr><td>A_1</td><td>2 $\boxed{-2}$</td><td>3 80</td><td>1 70</td><td>2 $\boxed{-4}$</td><td>150</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3 − 60</td><td>4 + $\boxed{2}$</td><td>5 $\boxed{-1}$</td><td>1 40</td><td>100</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>3 + 80</td><td>6 − 20</td><td>3 $\boxed{1}$</td><td>4 $\boxed{-3}$</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Потребности</td><td>140</td><td>100</td><td>70</td><td>40</td><td>350</td></tr>
</table>

Наименьшее из чисел в минусовых клетках равно 20. Клетка, в которой находится это число становится свободной. В новой таблице другие числа получаются так. Числам, находящимся в плюсовых клетках добавляется 20, а из чисел, находящихся в минусовых клентках вычитается это число.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3 80	1 70	2	150
A_2	3 40	4 20	5	1 40	100
A_3	3 100	6	3	4	100
Потребности	140	100	70	40	350

Опорный план имеет следующий вид:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{80} & \mathbf{70} & 0 \\ \mathbf{40} & \mathbf{20} & 0 & \mathbf{40} \\ \mathbf{100} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

При этом плане стоимость перевозок вычисляется так:

$$F = 3\cdot 80 + 1\cdot 70 + 3\cdot 40 + 4\cdot 20 + 1\cdot 40 + 3\cdot 100 = 850$$

Проверяем полученный опорный план на оптимальность. Для этого находим потенциалы пунктов отправления и назначения. Для заполненных клеток составляем систему из 6 уравнений с 7 неизвестными:

$$\beta_2-\alpha_1=3$$
$$\beta_3-\alpha_1=1$$
$$\beta_1-\alpha_2=3$$
$$\beta_2-\alpha_2=4$$
$$\beta_4-\alpha_2=1$$
$$\beta_1-\alpha_3=3$$

Полагая α_1=0, находим β_2=3, β_3=1, α_2=-1, β_1=2, β_4=0, α_3=-1

Для каждой свободной клетки вычисляем число $\alpha_{ij}=\beta_j-\alpha_i-c_{ij}$. α_{11}=0, α_{14}=-2, α_{23}=-3, α_{32}=-2, α_{33}=-1, α_{34}=-3.

Среди чисел α_{ij} нет положительных. Следовательно данный опорный план является оптимальным.

Ответ. Оптимальный план имеет следующий вид:

$$X=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{80} & \mathbf{70} & 0 \\ \mathbf{40} & \mathbf{20} & 0 & \mathbf{40} \\ \mathbf{100} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

При этом плане стоимость перевозок вычисляется так:

$$F = 3\cdot 80+1\cdot 70+3\cdot 40+4\cdot 20+1\cdot 40+3\cdot 100=850$$

- Решить транспортную задачу, заданную распределительной таблицей:

	70	30	20	40
90	1	3	4	5
30	5	3	1	2
40	2	1	4	2