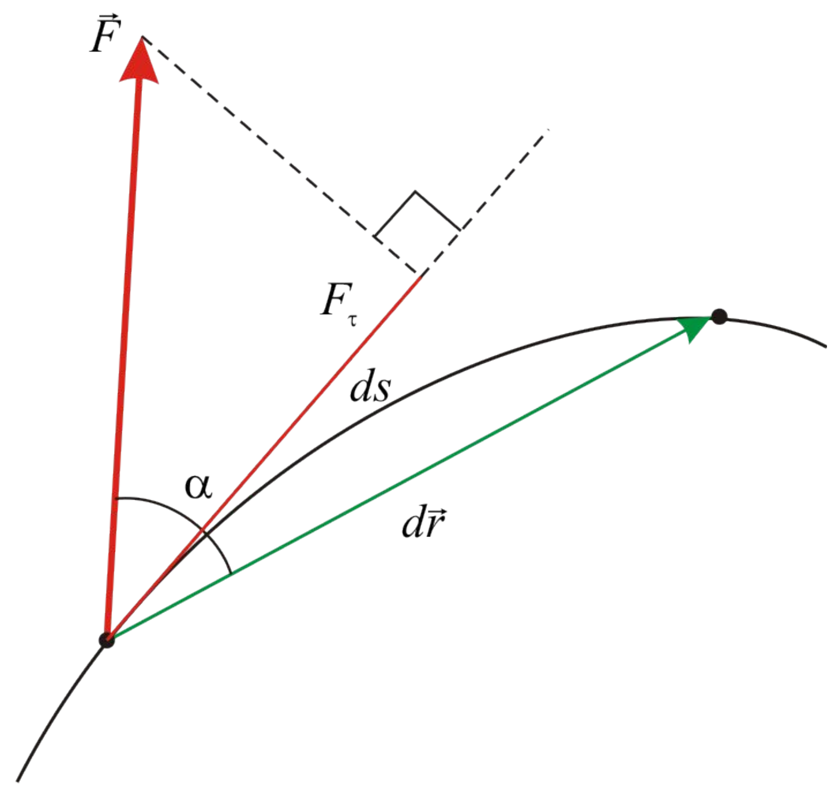
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Элементарная работа силы

- Рассмотрим частицу, которая движется под действием силы **F** (величина и направление **F** может меняться с течением времени).
- Пусть частица совершила элементарное перемещение *d***r** за промежуток времени *dt*, в течение которого силу **F** можно считать постоянной.
- **Элементарной работой** δA силы **F** называется скалярное произведение вектора силы на вектор *d***r** элементарного перемещения :

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Элементарная работа силы

- Элементарную работу можно представить в другой форме:

$$\delta A = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\alpha = \left|\vec{F}\right| ds\cos\alpha = F_{\tau} ds$$

Здесь α – угол между векторами **F** и d**r**, ds – длина пути, пройденного частицей за время dt, F_{τ} – проекция вектора на направление касательной к траектории движения частицы.

- Элементарная работа δA – скалярная величина и алгебраическая:
  - если $\alpha < \pi/2$; $\delta A > 0$,
  - если $\alpha > \pi/2$; $\delta A < 0$,
  - если $\alpha = \pi/2$, $\delta A = 0$, т.е. при условии, что сила **F** перпендикулярна перемещению d**r** и скорости **v** тела.

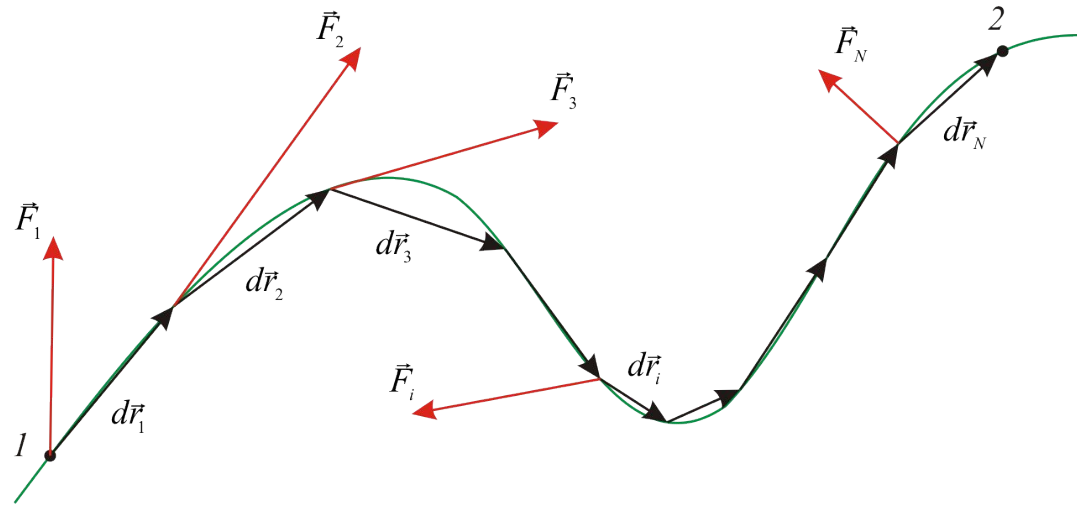
Элементарная работа силы

- В декартовой прямоугольной системе координат элементарную работу силы **F** можно представить в виде

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Работа силы на конечном перемещении

- Пусть частица под действием силы переместилась вдоль некоторой траектории из точки *1* в точку *2*.
- Чтобы вычислить работу A силы на пути между точками *1* и *2*, необходимо разделить траекторию на *N* элементарных участков так, чтобы на каждом участке силу $\mathbf{F}_i$ можно было считать величиной постоянной (для этого число *N* должно быть достаточно большим).



Вычислим и сложим элементарные работы на всех участках:

$$A = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Работа силы на конечном перемещении

- Таким образом, *работа A силы* **F** *на конечном пути* равна

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Единицей работы в системе СИ является **джоуль** **(Дж)**.
- Один джоуль равен работе силы в 1 Н на перемещении 1 м при условии, что направления силы и перемещения совпадают: 1 Дж = 1 Н · м.

Принцип суперпозиции работ

- *Если действующую на частицу силу можно представить в виде векторной суммы нескольких составляющих:* $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_N$, *то работа A силы* **F** *равна алгебраической сумме работ каждой из составляющих:*

$$A = \sum_i A_i$$

- Пусть, например, на частицу действуют две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, так что результирующая сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. При перемещении частицы из точки *1* в точку *2* траектории сила **F** совершит работу:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_2 = A_1 + A_2$$

- Здесь A_1 и A_2 – работы сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ соответственно.

Мощность

- **Мощность** – это скалярная физическая величина, которая характеризует работу силы, произведенную в единицу времени.
- Пусть за бесконечно малый промежуток времени dt сила $\mathbf{F}$ совершила работу δA.
- **Мгновенной мощностью силы** называется величина, равная

$$P = \frac{\delta A}{dt}$$

- Единицей мощности в системе СИ является **ватт** (**Вт**):

1 Вт = 1 Дж/с.

Мощность

- Мгновенную мощность можно выразить через скорость **v** движения частицы и действующую на нее силу **F**:

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- Таким образом, в прямоугольной декартовой системе координат

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$$

Мощность

- Выразим работу *A* силы на конечном пути через мгновенную мощность *P*:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = Pdt$$

- С учетом этого соотношения, работу *A* силы на конечном пути можно представить в виде

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} Pdt$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Вычисление работы сил в механике

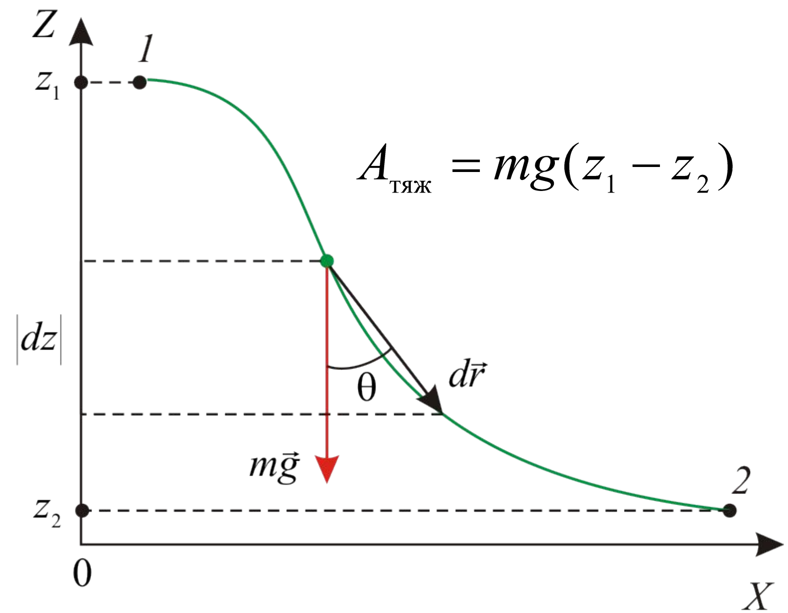
Работа однородной силы тяжести

- Частица массы *m* переместилась вдоль произвольной траектории из точки *1* в точку *2*.
- Мысленно разделим всю траекторию на элементарные участки и вычислим элементарную работу на одном из них:

$$\delta A = m\vec{g}\,d\vec{r} = mg\left|d\vec{r}\right|\cos\theta = -mgdz$$

Здесь θ – угол между векторами $m\mathbf{g}$ и $d\mathbf{r}$, dz – элементарное приращение координаты z тела.

$$A = \int_1^2 \delta A = -\int_{z_1}^{z_2} mgdz = mg(z_1 - z_2)$$



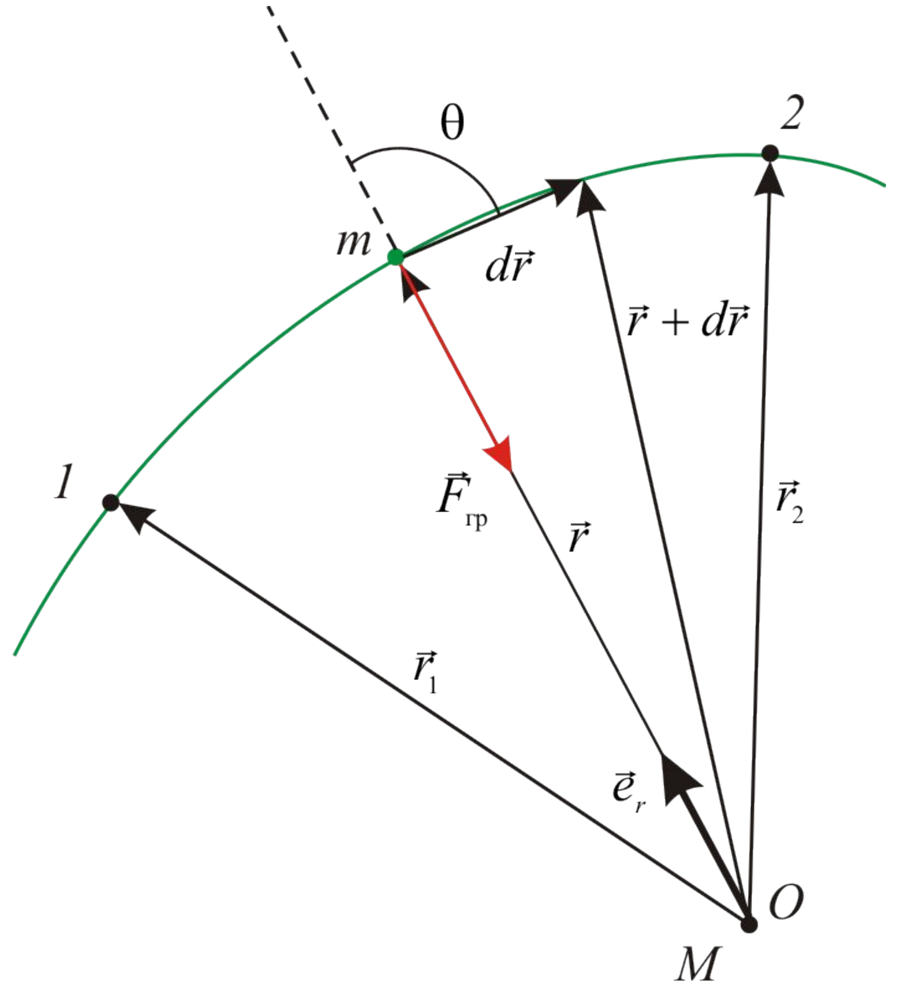
Работа однородной силы тяжести не зависит от формы траектории движения частицы, а определяется только ее координатой z в начальном и конечном положениях.

Работа гравитационной силы

- Пусть в точке O пространства находится неподвижное тело (материальная точка) массы M, которое действует на частицу A массы m с силой $\mathbf{F}_{\text{гр}}$:

$$\vec{F}_{\text{гр}} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$$

- Здесь $\mathbf{r}$ – проведенный из точки O к частице A радиус-вектор, r – его модуль, $\mathbf{e}_r$ – сонаправленный с $\mathbf{r}$ единичный вектор, G – гравитационная постоянная.



Работа гравитационной силы

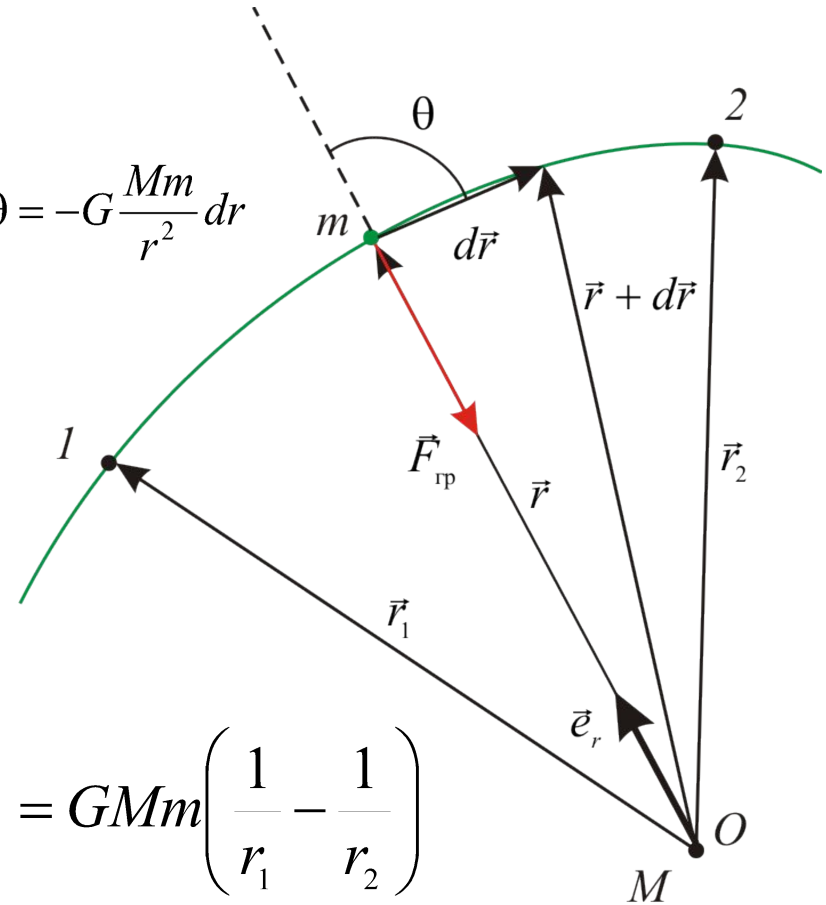
- Элементарная работа гравитационной силы:

$$\delta A = \vec{F}_{\text{гр}} \cdot d\vec{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r d\vec{r} = -G\frac{Mm}{r^2}|\vec{e}_r| \cdot |d\vec{r}|\cos\theta = -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

Здесь величина $dr = |d\mathbf{r}|\cos\theta$ приблизительно равна приращению dr модуля радиуса-вектора частицы.

Т.о., работа гравитационной силы:

$$A = \int_1^2 \delta A = -\int_{r_1}^{r_2} G\frac{Mm}{r^2}dr = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$



$$A_{\text{гр}} = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

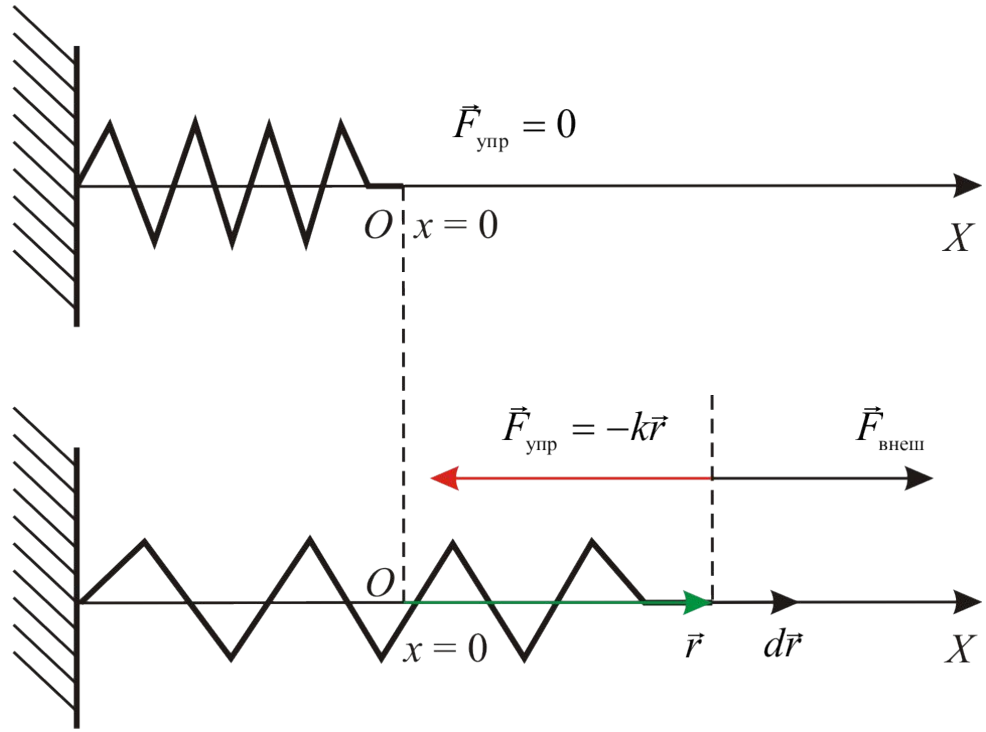
Работа гравитационной силы не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положениями частицы, а именно, расстояниями r_1 и r_2 до силового центра.

Работа силы упругости

- Пусть один конец спиральной пружины с жесткостью k закреплен неподвижно, а другой может перемещаться горизонтально под действием внешней силы.
- При растяжении или сжатии пружины возникает упругая сила

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{r}$$

- Здесь **r** – радиус-вектор, проведенный из точки O к незакрепленному концу деформированной пружины.



Работа силы упругости

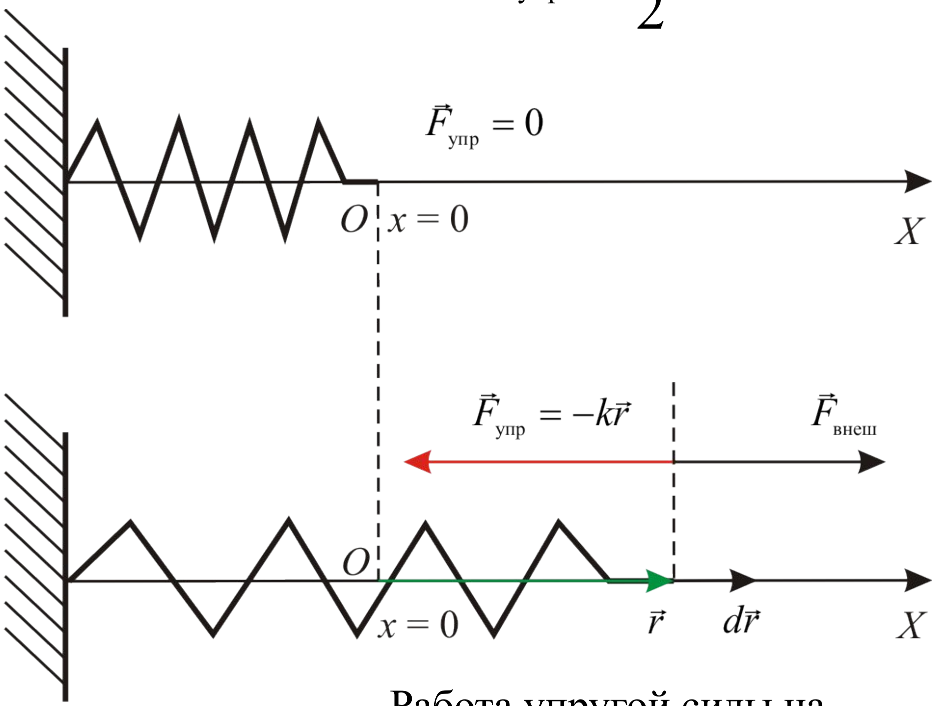
- Пусть под воздействием внешней силы $\mathbf{F}_{внешн}$, работа которой нас интересовать не будет, незакрепленный конец пружины, к которому приложена также сила $\mathbf{F}_{упр}$, переместится вдоль оси X из точки *1* в точку *2* с координатами x_1 и x_2 соответственно.
- Работа упругой силы на одном из таких элементарном перемещении равна:

$$\delta A = \vec{F}_{упр} \cdot d\vec{r} = -k\vec{r}d\vec{r} = -kxdx$$

- Полная работа:

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{F}_{упр} \cdot d\vec{r} = -\int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

$$A_{упр} = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$



Работа упругой силы на конечном пути зависит только от начальной $x1$ и конечной $x2$ координат точки ее приложения.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кинетическая энергия частицы и системы частиц

Кинетическая энергия частицы

- Пусть частица массы m движется со скоростью $\mathbf{v}$.
- **Кинетической энергией частицы** называется величина:

$$\mathrm{K} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

- Здесь $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – модуль импульса частицы

Кинетическая энергия системы частиц

- **Кинетическая энергия системы частиц**, массы которых $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_N$, а скорости $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_N$, равна сумме кинетических энергий каждой из частиц:

$$\mathrm{K} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{K}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Теорема о кинетической энергии частицы

- Пусть частица массы m движется под действием некоторой силы **F** (равнодействующая всех сил, приложенных к частице).

- **Теорема о кинетической энергии.** *Работа равнодействующей всех сил, приложенных к частице, равна приращению кинетической энергии частицы*:

$$\delta A = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d\mathrm{K} \qquad A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_1 = \Delta\mathrm{K}$$

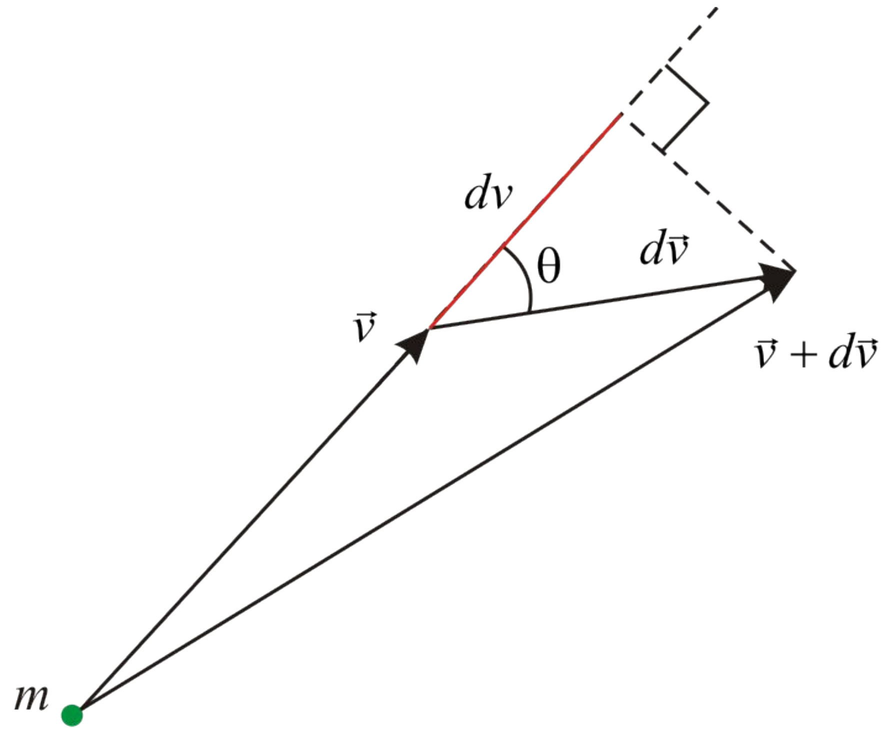
- Здесь $d\mathrm{K}$ – приращение кинетической энергии частицы на элементарном перемещении; v_1 и v_2, K_1 и K_2 – скорости и кинетические энергии частицы в начальном и конечном положениях соответственно.

Доказательство теоремы о кинетической энергии частицы

- Работа силы **F** на элементарном перемещении *d***r** равна:

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$m d\vec{v}\cdot\vec{v} = m|\vec{v}||d\vec{v}|\cos\theta = mvdv$$



Тогда

$$\delta A = mvdv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d\mathrm{K}$$

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 d\mathrm{K} = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_1 = \Delta\mathrm{K}$$

Теорема о кинетической энергии системы частиц

- **Теорема о кинетической энергии для системы частиц.** *При переходе системы частиц из произвольного начального положения в произвольное конечное положение работа A всех приложенных к частицам сил равна приращению* ΔK *кинетической энергии системы:*

$$A = \Delta \mathrm{K}$$

Доказательство теоремы о кинетической энергии системы частиц

- Работа A всех приложенных к частицам сил равна сумме работ A_i, совершенных над каждой частицей системы:

$$A = \sum_i A_i$$

Здесь A_i – работа равнодействующей всех приложенных к i-й частице сил:

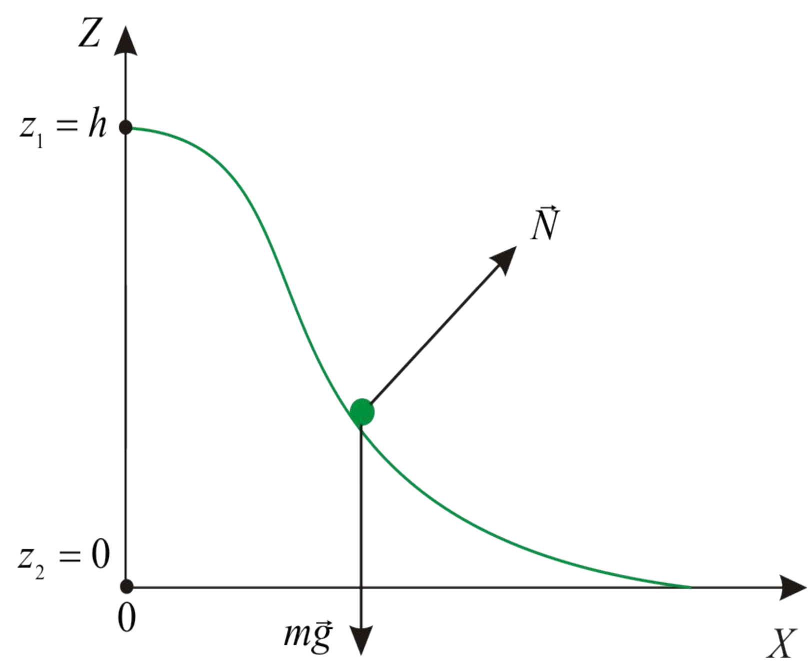
$$A_i = \frac{m_i v_{i\text{кон}}^2}{2} - \frac{m_i v_{i\text{нач}}^2}{2}$$

- Тогда работа всех сил равна:

$$A = \sum_i A_i = \sum_i \left(\frac{m_i v_{i\text{кон}}^2}{2} - \frac{m_i v_{i\text{нач}}^2}{2} \right) = \sum_i \frac{m_i v_{i\text{кон}}^2}{2} - \sum_i \frac{m_i v_{i\text{нач}}^2}{2} = \mathrm{K}_{\text{кон}} - \mathrm{K}_{\text{нач}} = \Delta \mathrm{K}$$

Пример использования теоремы о кинетической энергии при решении задач механики

- 1. По гладкой поверхности произвольной формы, плавно переходящей в гладкую горизонтальную плоскость, с высоты *h* с нулевой начальной скоростью спускается тело массой *m*. Найдем скорость *v* тела на горизонтальном участке траектории.



- По теореме о кинетической энергии:

$$A_{\text{тяж}} + A_N = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}$$

$$A_N = 0 \quad A_{\text{тяж}} = mg(z_1 - z_2) = mg(h - 0) = mgh$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Силовое поле

- Если на частицу в каждой точке пространства действует определенная сила, то всю совокупность сил называют **силовым полем**.
- Если силы поля не зависят от времени, силовое поле называют **стационарным**. Будем рассматривать именно их.

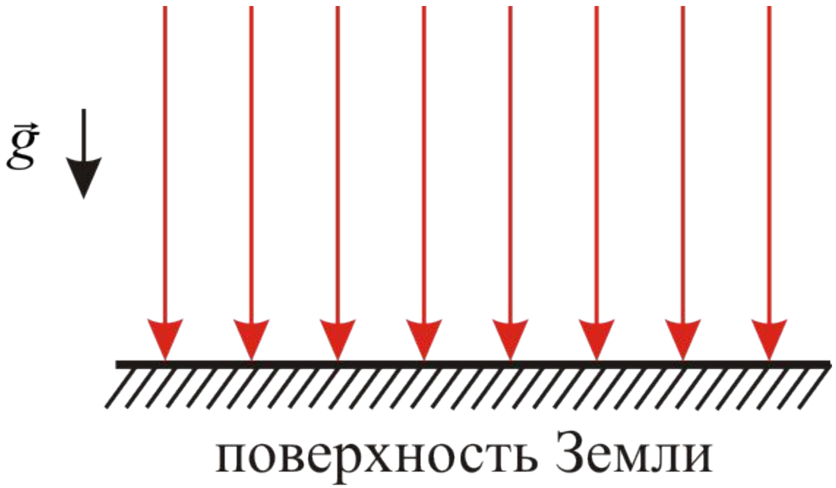
- *Пример.* Тело массой m, расположенное вблизи поверхности Земли, испытывает действие силы тяжести $m\mathbf{g}$. Величину и направление силы тяжести можно считать приблизительно одинаковыми во всех точках пространства вблизи земной поверхности. Говорят, что в этом случае *тело находится в однородном поле силы тяжести*.
- Планеты Солнечной системы находятся в *гравитационном поле* Солнца. Электрон в атоме водорода движется в *кулоновском поле* атомного ядра.

Силовые линии поля

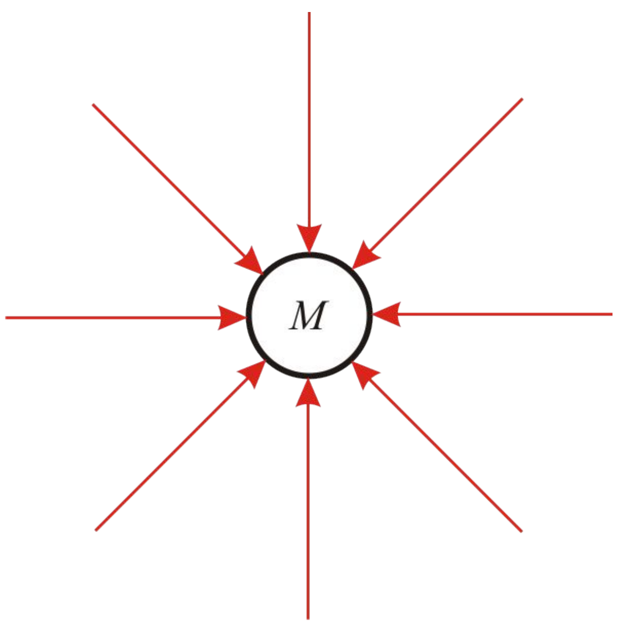
- **Силовой линией** поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с действующей на тело силой этого поля; густота линий пропорциональна модулю силы поля.

Силовые лини поля

Поле однородной силы тяжести



Поле гравитационной силы



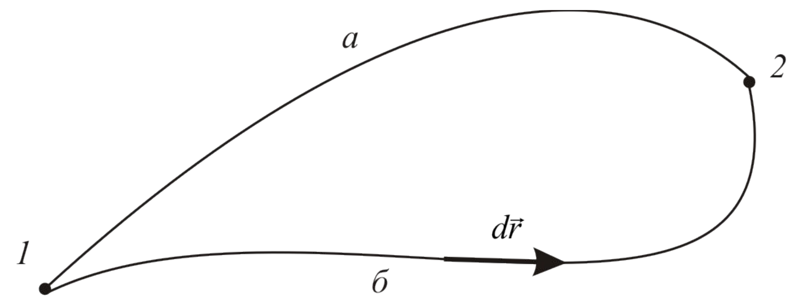
Консервативные силы

- **Консервативным** называется поле, в котором совершаемая при перемещении частицы из произвольного начального в произвольное конечное положение работа сил поля не зависит от формы траектории и характера движения, а определяется только начальным и конечным положениями частицы.
- Силы консервативного поля называются **консервативными силами**.

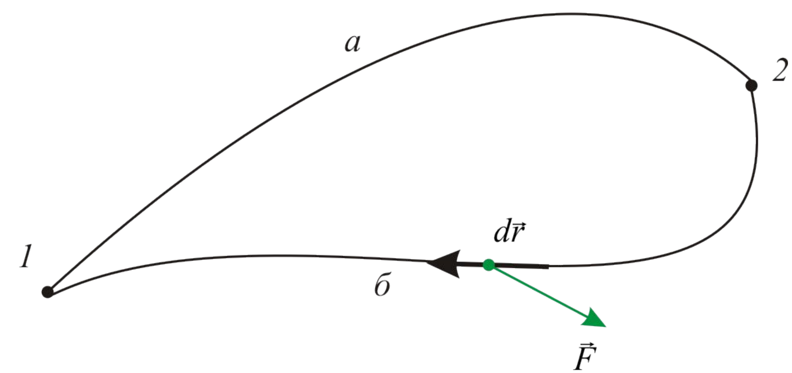
- Пример сил, которые не являются консервативными, – силы трения, силы сопротивления. Работы силы трения зависит, в частности, от длины пути. Работа силы сопротивления также зависит от формы траектории, а также от характера движения тела (сила сопротивления пропорциональна скорости тела при малых скоростях).

Свойство консервативных сил

- Покажем, что *при перемещении тела в консервативном поле по замкнутой траектории работа консервативных сил равна нулю.*



- Пусть частица совершила перемещение по замкнутой траектории *1-a-2-б-1*, где точка *1* – начальное положение тела, точка *2* – произвольное промежуточное положение, буквами *а* и *б* обозначим участки траектории между точками *1* и *2*. Работу сил поля на замкнутой траектории *1-a-2-б-1* можно представить как сумму работа на участках *1-a-2* и *2-б-1*:

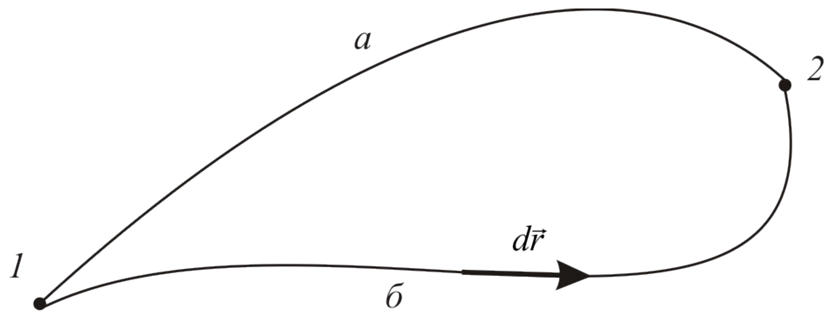


$$A_{1-a-2-б-1} = A_{1-a-2} + A_{2-б-1}$$

Работа консервативной силы при движении по замкнутой траектории

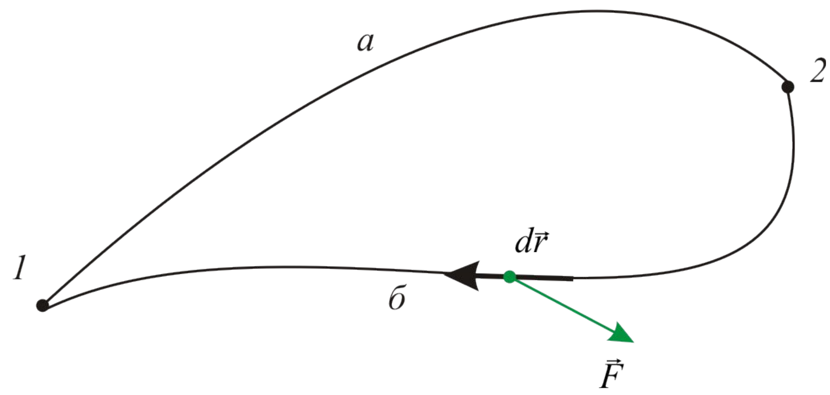
- Работа сил поля при перемещении частиц из точки *2* в точку *1* по участку *б* равна по величине и противоположна по знаку работе сил поля при обратном перемещении из точки *1* в точку *2* по тому же участку *б*:

$$A_{2-б-1} = -A_{1-б-2}$$



- Причем это равенство справедливо и для элементарных работ. Тогда

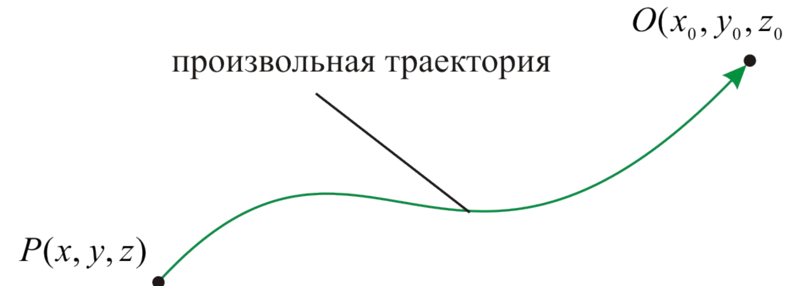
$$A_{1-a-2-б-1} = A_{1-a-2} - A_{1-б-1} = 0$$



- Аналогично обратное утверждение: *если работа сил поля по замкнутой траектории равна нулю, поле является консервативным.*

Потенциальная энергия частицы

- Рассмотрим консервативное поле. Частица расположена в точке P поля с координатами x, y, z. Выберем произвольную точку O с координатами x_0, y_0, z_0 и назовем ее *началом отсчета потенциальной энергии* (в точке O потенциальная энергия частицы равна нулю).



Потенциальной энергией П частицы в точке P консервативного поля называется работа сил поля, совершаемая при перемещении частицы из данной точки P в точку O, принятую за начало отсчета потенциальной энергии:

$$\Pi = \int_P^O \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Здесь **F** – сила поля; интеграл вычисляется по произвольной траектории между точками P и O. В силу свойства консервативного поля интеграл не зависит от вида траектории и характера движения частицы, а определяется только положение точек P и O в пространстве.

Свойства потенциальной энергии частицы

1. Потенциальная энергия является функцией только координат x, y, z точки поля, в которой расположена частица:

$$\Pi = \Pi(x, y, z)$$

Доказательство. Поскольку поле консервативное, интеграл

$$\Pi = \int_P^O \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

зависит только от положения точке P и O, т.е. только от координат этих точек. Поэтому $\Pi = \Pi(x,y,z,x_0,y_0,z_0)$. Положение точки O фиксировано, поэтому ее координаты x_0, y_0, z_0 можно рассматривать в качестве параметров функции П. Следовательно П зависит только от трех переменных x, y, z.

Свойства потенциальной энергии частицы

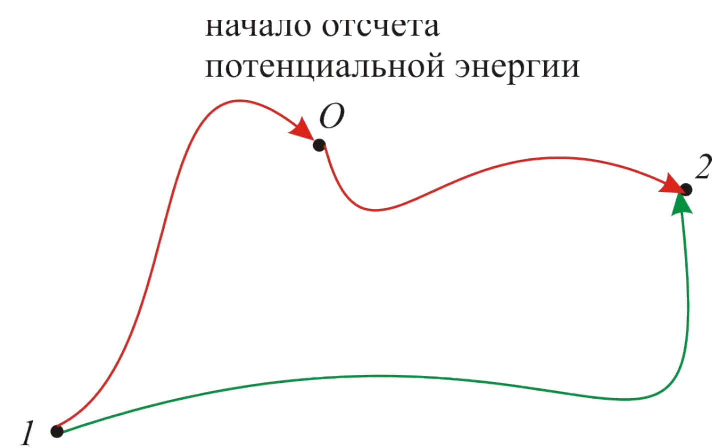
2. Работа сил поля при перемещении частицы из произвольного начального в произвольное конечное положение равна убыли потенциальной энергии частицы:

$$A_{12} = -\Delta \Pi = \Pi_1 - \Pi_2$$

Здесь Π_1 и Π_2 – значения потенциальных энергий частицы в начальном и конечном положениях соответственно.

Свойства потенциальной энергии частицы

- Докажем это свойство. Пусть частица перемещается из начального положения (точка *1*) в конечное положение (точка *2*) по двум траекториям, одна из которых проходит через точку *O* – начало отсчета потенциальной энергии. Работу сил поля на этих траекториях обозначим A_{12} и A_{1O2}. Поскольку поле консервативное, эти работы друг другу:



$$A_{12} = A_{1O2}$$

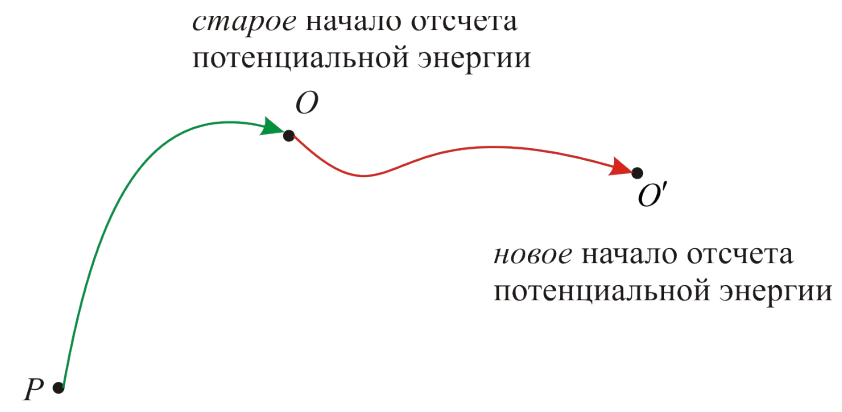
- Представив как сумму работ на участках *1-O* и *O-2* траектории *1-O-2*. получим:

$$A_{1O2} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O} = \Pi_1 - \Pi_2$$

Свойства потенциальной энергии частицы

- 3. Потенциальная энергия частицы определена с точностью до произвольной постоянной величины.

- Поясним смысл этого утверждения. Заменим точку *O* начала отсчета потенциальной энергии на другую точку *O′* и выразим потенциальную энергию П′, начало отсчета которой находит в точке *O′*, через потенциальную энергию П, начало отсчета которой – в точке *O*. С этой целью вычислим работу сил поля по перемещению частицы из точки *P* в точку *O′* по траектории *P*-*O*-*O′*, проходящей через точку *O*:



$$\Pi' = A_{PO'} = A_{PO} + A_{OO'} = \Pi + C$$

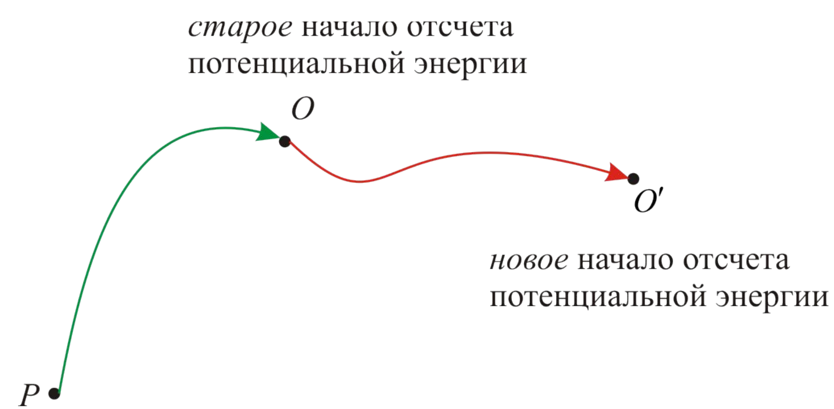
$$C = A_{OO'} = \int_{O}^{O'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Величина *C* зависит только от положения точек *O* и *O′* и не зависит от траектории перехода.

Свойства потенциальной энергии частицы

- Таким образом, при изменении начала отсчета потенциальная энергия П частицы в произвольной точке *P* изменится на постоянную величину *C* и станет равна П′. Величина *C* не зависит от положения точки *P*. Следовательно, при *изменении начала отсчета потенциальная энергия во всех точках поля изменится на одинаковую величину C*.

- Поскольку начало отсчета потенциальной энергии выбирается произвольно, можно утверждать, что *потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной величины*.



Вычисление потенциальной энергии частицы

- Для вычисления потенциальной энергии частицы в консервативном силовом поле в соответствии с определением этой величины $\Pi = A_{PO}$, необходимо придерживаться следующей схемы:

  - - выбрать положение начала отсчета потенциальной энергии, т.е. точку, в которой потенциальная энергия частицы станет равной нулю (точка O);
  - вычислить работу сил поля, совершаемую при перемещении частицы по произвольной траектории из точки P поля в начало отсчета потенциальной энергии – точку O. Полученная величина равна потенциальной энергии Π частицы в точке P поля.