Лекции 1-2. Электрическое поле системы неподвижных зарядов в вакууме. Теорема Гаусса для электростатического поля

Вопросы:

- Электрический заряд, его свойства и характеристики. Закон Кулона.
- Напряженность электростатического поля.
- Силовые линии.
- Принцип суперпозиции и его применение к расчету поля системы неподвижных зарядов.
- Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Потенциал поля.
- Циркуляция вектора напряженности.
- Связь напряженности и потенциала.
- Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса в интегральной и дифференциальной формах. (Применение теоремы Гаусса для расчета электростатических полей).
- Уравнение Пуассона.

Электрический заряд, его свойства и характеристики

Введение: Электрический заряд является одной из основных, первичных, неотъемлемых характеристик (m, q, s) элементарных частиц

- Элементарный электрический заряд (e= 1,6·10^{-19}Кл)

Заряд частицы:

электрон $q_e = -e$ протон $q_p = +e$ нейтрон $q_n = 0$

Из этих элементарных частиц построены атомы и молекулы любого вещества. Обычно частицы, несущие заряды разных знаков, присутствуют в равных количествах и распределены в теле с одинаковой плотностью. В этом случае тело в целом остается электрически нейтральным.

- Электрический заряд - квантуется

Если каким –либо внешним образом (например, путем трения) создать в теле избыток заряженных частиц одного знака (и соответственно недостаток частиц с зарядом противоположного знака) – тело окажется заряженным, т. е. приобретет некоторый электрический заряд Q, который можно представить как:

$Q = \pm N \cdot e$, где N – число элементарных заряженных частиц

Электрический заряд, его свойства и характеристики

- Плотность электрического заряда

Так как элементарный заряд очень мал, то образующийся в теле макроскопический заряд *Q* можно считать изменяющимся непрерывно. Поэтому с целью упрощения дальнейших математических расчетов заменяют истинное распределение элементарных дискретных зарядов фиктивным непрерывным распределением и вводят соответствующую геометрии тела плотность электрического заряда:

$\lambda = dq/dl$ – линейная плотность заряда, [Кл/м],

$\sigma = dq/dS$ – поверхностная плотность заряда, [Кл/м^2],

$\rho = dq/dV$ – объемная плотность заряда, [Кл/м^3],

где *dq* – элементарный заряд, заключенный соответственно на элементарной длине *dl*, на элементарной поверхности *dS* или в элементарном объеме *dV.*

Электрический заряд, его свойства и характеристики

- Электрический заряд – релятивистски инвариантен

  Величина заряда не зависит от того, движется этот заряд или покоится, т.е. величина заряда, измеряемая в различных инерциальных системах отсчета, оказывается одинаковой (инвариантной).

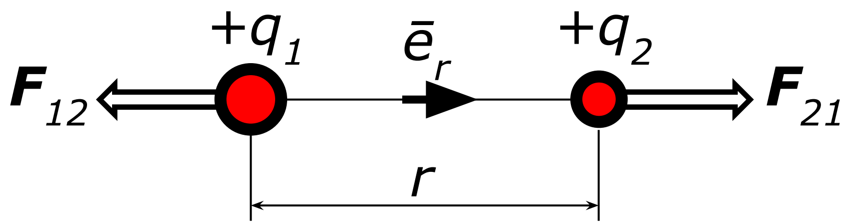
- Закон сохранения электрического заряда

  Суммарный заряд электрически изолированной системы не изменяется.

  Электрические заряды всегда возникают или исчезают парами с противоположными знаками. Например, электрон и позитрон при встрече аннигилируют, превращаясь в нейтральные фотоны; при этом исчезают заряды «-*e*» и «+*e*». А в ходе процесса, называемого рождением электронно-позитронной пары, фотон, попадая в поле атомного ядра и взаимодействуя с протоном, превращается в электрон и позитрон; при этом возникают заряды «-*e*» и «+*e*».

Замечание: Закон сохранения электрического заряда тесно связан с его релятивистской инвариантностью. Так как, если бы величина заряда зависела от его скорости, то, приведя в движение заряды одного знака, мы изменили бы суммарный заряд изолированной системы в целом.

Закон Кулона



- Закон взаимодействия электрических зарядов

Электрический заряд существует в двух видах: положительный и отрицательный; их существование проявляется в силовом взаимодействии, которое, как экспериментально (на крутильных весах) установил в 1785 г. О. Кулон, подчиняется закону:

$$\vec{F}_{12} = -k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r, \quad \text{где} \quad k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}$$

Сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов (q_1, q_2) пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними (r); направление этой центральной силы зависит от знаков зарядов.

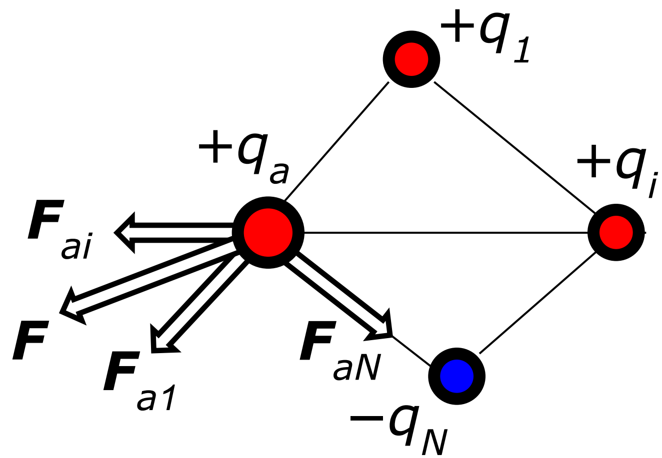
Закон Кулона

- Принцип суперпозиции сил

Экспериментально доказано, что сила взаимодействия двух точечных зарядов не изменяется, если вблизи них поместить другие заряды. Иначе говоря, результирующая сила ***F***, с которой действуют на некоторый выбранный заряд q_a все *N*-другие заряды q_i определяется как:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ai}, \quad \text{где } \vec{F}_{ai} -$$

сила, с которой действует на заряд q_a заряд q_i в отсутствие остальных *(N*-1*)*-зарядов.

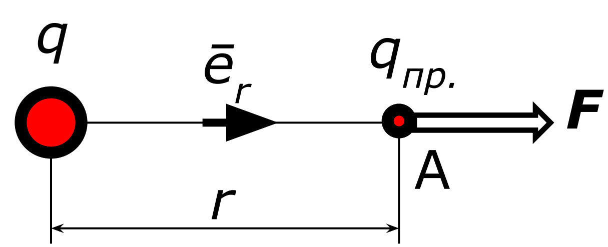


Напряженность электростатического поля

- Проявление электрического поля в пространстве

  Согласно современным представлениям силовое взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле. Всякий неподвижный электрический заряд *q* изменяет определенным образом свойства окружающего его пространства, как говорят, создает в пространстве электростатическое поле. Это поле проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо его точку другой, *пробный заряд* $q_{пр.}$ испытывает действие силы Кулона ***F***:

$$\vec{F} = q_{пр.}\cdot\left(\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\vec{e}_r\right) \qquad (1)$$



Замечание: Под пробным зарядом $q_{пр.}$ следует понимать единичный, точечный, неподвижный, положительный заряд.

Напряженность электростатического поля

- Физический смысл напряженности электрического поля

Для характеристики электрического поля в данной точке А пространства используют *вектор напряженности **E***, который задают как:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр.}} \quad (2)$$

Т.е. вектор напряженности можно определить как силу, действующую на пробный заряд, помещенный в данную точку поля. В связи с этим напряженность ***E*** считают силовой характеристикой электрического поля.

- Напряженность поля точечного заряда

Из формул (1) и (2) следует, что *напряженность электростатического поля точечного заряда пропорциональна величине этого заряда q и обратно пропорциональна квадрату расстояния r от заряда до рассматриваемой точки поля*, т.е.

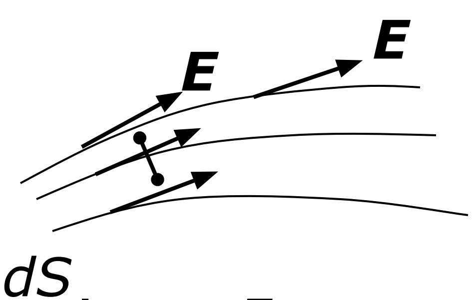
$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{e}_r \quad (3)$$

Замечание: Размерность вектора ***E*** в системе СИ – [В/м].

Силовые линии

- Геометрическое описание электрического поля

Электрическое поле - это векторное поле, характеризуемое совокупностью векторов ***E*** в каждой точке пространства. Геометрически принято изображать векторное поле ***E*** с помощью линий напряженности - их называют *силовыми линиями электрического поля.* Эти линии проводят так, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора ***E***, а густота (плотность) линий, пронизывающих единичную ортогональную площадку в данной точке, была равна модулю этого вектора. По полученной картине силовых линий легко судить о конфигурации (топологии) и величине (интенсивности) электрического поля.

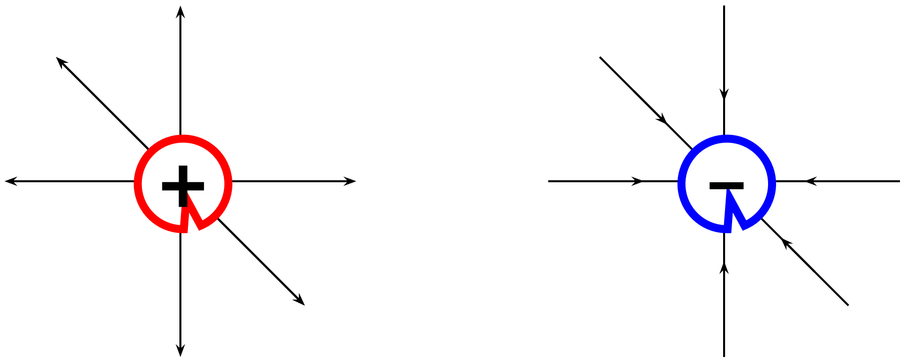


Свойство силовых линий: линии ***E*** - незамкнутые линии, они нигде, кроме зарядов, не начинаются и не заканчиваются.

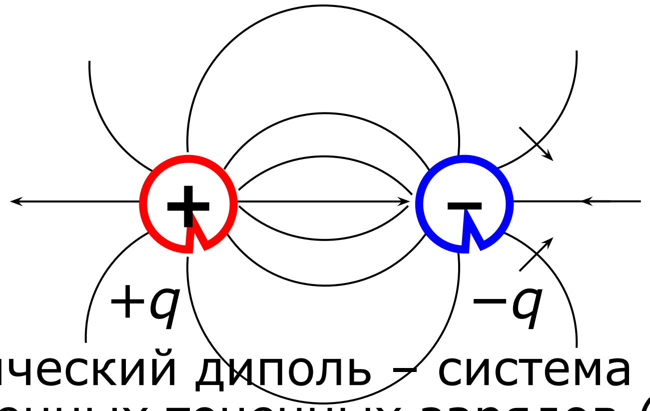
Силовые линии

- Примеры изображения электростатических полей

Поля точечных зарядов:



Поле электрического диполя:



Определение: Электрический диполь – система из двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов (*+q, -q*), находящихся друг от друга на достаточно малом расстоянии *l*.

Принцип суперпозиции и его применение к расчету поля системы неподвижных зарядов

- Принцип суперпозиции электрических полей

Определение: Напряженность поля системы точечных неподвижных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов системы в отдельности, т.е.:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{e}_{ir} \qquad (4)$$

где r_i – расстояние между зарядом q_i системы и рассматриваемой точкой поля.

- Общая задача электростатики

С помощью принципа суперпозиции и знания величины заряда q можно решить общую задачу электростатики:

по известной форме заряженного объекта и закону распределения заряда (дискретно или непрерывно) – рассчитать электрическое поле объекта.

Принцип суперпозиции и его применение к расчету поля системы неподвижных зарядов

- Метод расчета электростатических полей

В случае непрерывного распределения заряда по объему тела *V* его протяженные заряды разбивают на достаточно малые элементы величиной $dq = \rho \cdot dV$, поля которых вычисляют по формуле (3), и вместо суммирования по формуле (4) проводят интегрирование по всему заряженному объему:

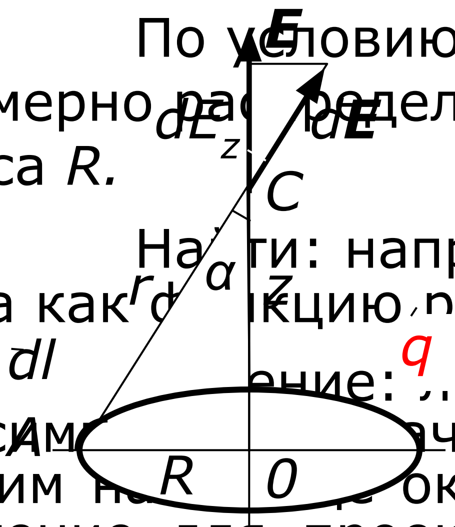
$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho}{r^2} \cdot \vec{e}_r \cdot dV \qquad (5)$$

Замечание: В общем случае расчет по формуле (5) требует значительных вычислительных затрат: для нахождения вектора ***E*** надо сначала вычислить интегралы для его проекций E_x, E_y, E_z. И только в тех случаях, когда система зарядов обладает той или иной симметрией, задача упрощается.

Принцип суперпозиции и его применение к расчету поля системы неподвижных зарядов

- Пример расчета электростатических полей

Поле на оси тонкого равномерно заряженного кольца



По условию: заряд $q > 0$ равномерно распределен по тонкому кольцу радиуса R.

Найти: напряженность E поля на оси кольца как функцию расстояния z от его центра.

Решение: легко сообразить, что в силу симметрии задачи, вектор **E** направлен по оси кольца; выделим на кольце около т. A элемент контура dl и запишем выражение для проекции dE_z напряженности поля от этого участка в т. C:

$$dE_z = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{\lambda\cdot dl}{r^2}\cdot\cos\alpha \quad (6),$$

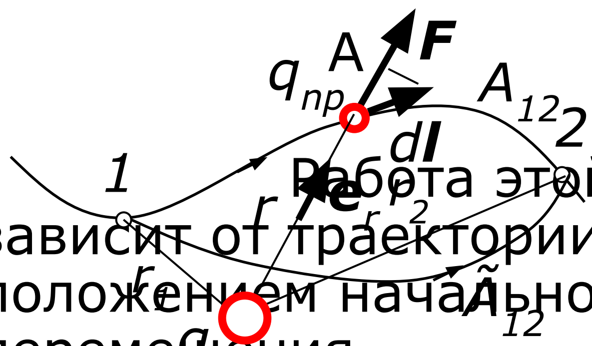
здесь $\lambda = q/2\cdot\pi\cdot R$ – линейная плотность заряда на кольце, $\cos\alpha = z/r = z/\sqrt{(R^2+z^2)}$; с учетом постоянства r и α для всех элементов кольца интегрирование (6) дает

$$E(z) = \frac{q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \quad (7)$$

Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Потенциал поля

- Определение работы при перемещении заряда

Рассматривается поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом *q*. В любой точке *A* этого поля на помещенный пробный заряд $q_{пр}$ действует сила Кулона:



$$\vec{F} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot q_{np}}{r^2}\cdot\vec{e}_r = F(r)\cdot\vec{e}_r \quad (8)$$

Работа этой центральной силы не зависит от траектории, а определяется только положением начальной т. *1* и – конечной т. *2* перемещения заряда $q_{пр}$, т.е. $A_{12} = \tilde{A}_{12}$, и вычисляется как:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_1^2 F(r)\cdot\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_1^2 F(r)\cdot dr = \frac{q\cdot q_{np}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\left(\frac{q\cdot q_{np}}{r_1} - \frac{q\cdot q_{np}}{r_2}\right) \quad (9)$$

Работа сил консервативного поля может быть представлена также как убыль потенциальной энергии:

$$A_{12} = W_{P1} - W_{P2} \quad (10)$$

Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Потенциал поля

- Понятие потенциала электростатического поля

Из сравнения (9) и (10) следует, что потенциальная энергия пробного заряда в поле заряда *q*:

$$W_p = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot q_{np}}{r} \quad (11)$$

Отношение W_P / q_{np} не зависит от пробного заряда и используется для характеристики поля, его принято называть *потенциалом электрического поля* в данной точке:

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{np}} \quad (12)$$

Определение 1: Потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке поля единичный положительный точечный заряд. Поэтому потенциал рассматривается как энергетическая характеристика поля.

Потенциал точечного заряда q:

$$\varphi = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r} \quad (13)$$

Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Потенциал поля

- Потенциал поля системы точечных зарядов

При рассмотрении электростатического поля, создаваемого системой точечных зарядов $\{q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots q_N\}$ можно утверждать, что работа сил этого поля над пробным зарядом равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных действием каждого заряда q_i системы в отдельности:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{N} A_{i12} = W_{p1} - W_{p2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \cdot q_{np}}{r_{i1}} - \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \cdot q_{np}}{r_{i2}} \quad (14)$$

После «нормировки» выражения энергии W_p для некоторой точки на q_{np} получаем потенциал электрического поля системы зарядов как алгебраическую сумму потенциалов, созданных каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i} = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \quad (15)$$

Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Потенциал поля

- Работа сил поля над некоторым зарядом q

  Из определения потенциала (12) следует, что заряд q, находящийся в точке поля с потенциалом φ, обладает потенциальной энергией $W_p = q \cdot \varphi$. Следовательно, *работу сил поля над зарядом q можно представить через разность потенциалов*:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (16)$$

  Если заряд q из точки с потенциалом φ удаляется на бесконечность (где $\varphi_\infty = 0$), то эта работа будет:

$$A_\infty = q \cdot \varphi \quad (17)$$

Определение 2: Потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки поля на бесконечность.

Замечание: Единицей измерения потенциала φ в системе СИ является 1 [В] – это такой потенциал в точке поля, для перемещения в которую из бесконечности заряда q = 1 Кл нужно совершить работу A = 1 Дж.

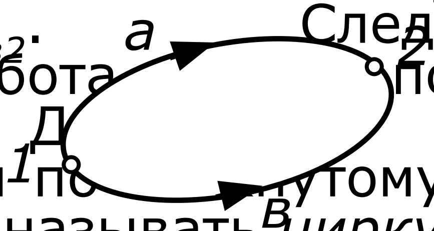
Циркуляция вектора напряженности

- Работа кулоновских сил по замкнутому контуру

Зная вектор напряженности электростатического поля ***E***, работу по перемещению заряда $q_{пр}$ можно определить как линейный интеграл:

$$A_{12} = q_{пр}\cdot\int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{dl} \quad (18)$$

Как известно, работа кулоновских сил (как консервативных сил) не зависит от направления перемещения (от пути), т.е. $A_{1a2} = \tilde{A}_{1в2}$. Следовательно можно утверждать, что работа по замкнутому контуру равна 0. Д определяют линейный интеграл по утому контуру *L*, который в «теории поля» принято называть *циркуляцией*:



$$A_{1a2в1} = q_{пр}\cdot\oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl} \quad (19)$$

Представление интеграла (19) в виде суммы двух линейных интегралов и с учетом, что $A_{2в1}=-\tilde{A}_{1в2}$, доказывает положение о работе по замкнутому контуру:

$$A_{1a2в1} = q_{пр}\cdot\left(\int_{1a2}\vec{E}\cdot\vec{dl} + \int_{2в1}\vec{E}\cdot\vec{dl}\right) = A_{1a2} - \tilde{A}_{1в2} = 0 \quad (20)$$

Циркуляция вектора напряженности

- Теорема о циркуляции вектора напряженности

После «нормировки» работы в (19) на величину $q_{пр}$ получаем выражение для записи теоремы о циркуляции вектора **E**:

$$\oint_L \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \quad (21)$$

Определение: Циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна нулю.

Замечание: Принято называть векторное поле, подчиняющееся условию (21) – *потенциальным*. Следовательно, электростатическое поле – потенциальное поле.

Теорема о циркуляции вектора ***E*** подтверждает положения о конфигурации электростатического поля: силовые линии поля (линии ***E***) не могут быть замкнутыми, эти линии всегда начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (или уходят в бесконечность). Если бы это было не так – мы сразу же пришли бы к противоречию с теоремой о циркуляции и получили бы интеграл вида (21), неравный нулю.

Связь напряженности и потенциала

- Связь вектора напряженности и потенциала

Так как напряженность электрического поля ***E*** пропорциональна силе, действующей на заряд, а потенциал *φ* пропорционален потенциальной энергии заряда, то между ***E*** и *φ* должна существовать связь, аналогичная известной связи между потенциальной энергией и силой, т.е.

$$\vec{F} = -\nabla W_p, \text{ где оператор набла } \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\overrightarrow{e_z} \qquad (22)$$

После подстановки в (22) выражений для силы ***F*** = *q* · ***E*** и энергии $W_p = q \cdot \varphi$ и сокращения на постоянную величину *q* окончательно получаем:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi \qquad (23)}$$

Раскрыв оператор набла, можно записать для проекций вектора ***E***:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (24)$$

Аналогично для проекции вектора ***E*** на направление силовой линии:

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l} \qquad (25)$$

Связь напряженности и потенциала

- Определение разности потенциалов по заданному полю ***E***

Для этого воспользуемся выражением работы сил поля по перемещению заряда *q* из т. 1 в т. 2: $A_{12} = q\cdot\int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{dl}$ и приравняем его выражению для той же работы через разность потенциалов: $A_{12} = q\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)$.

После сокращения на величину *q* получаем связь разности потенциалов между рассматриваемыми точками электрического поля и его напряженностью:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{dl} \qquad (26)$$

- Эквипотенциальные поверхности и силовые линии поля

Определение: Поверхность, во всех точках которой потенциал имеет одно и то же значение, называется *эквипотенциальной*.

Так как вдоль этой поверхности $d\varphi = 0$, то и составляющая вектора ***E***, касательная к поверхности, также

$$E_\tau = -\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0$$

Таким образом, вектор ***E*** в каждой точке поля направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку.

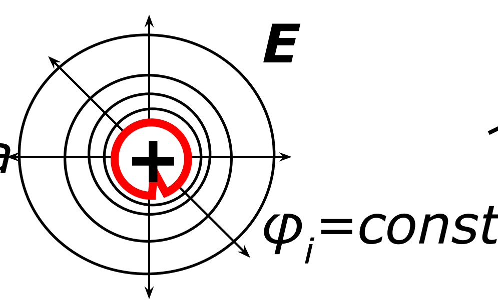
Связь напряженности и потенциала

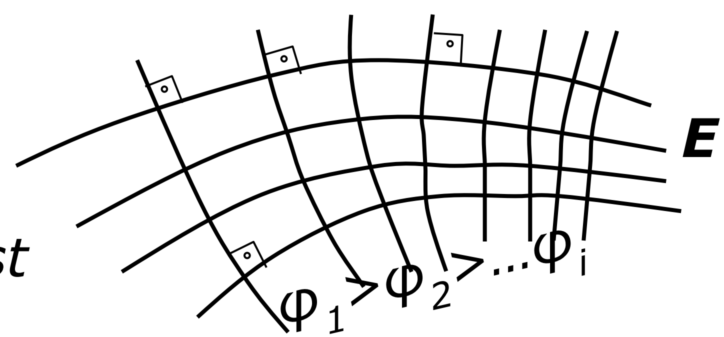
- Эквипотенциальные поверхности и силовые линии поля

Так как сам вектор ***E*** направлен по касательной к силовой линии поля, то и силовые линии (линии ***E***) в каждой точке ортогональны эквипотенциальным поверхностям. Причем в соответствии с фундаментальной связью ***E*** и φ эти линии направлены в сторону уменьшения потенциала поля.

Замечание: Эквипотенциальную поверхность можно провести через любую точку поля; следовательно, таких поверхностей может быть проведено бесконечное множество. Однако, целесообразно их проводить так, чтобы разность потенциалов ($\varphi_1 - \varphi_2$) для двух соседних поверхностей была бы постоянной. Тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей (или их сечений плоскостью рисунка – *эквипотенциалей*) можно судить о значении напряженности поля в разных точках. Чем гуще располагаются поверхности (эквипотенциали), тем быстрее изменяется потенциал при перемещении вдоль нормали к поверхности, а значит больше ***E*** – силовые линии сгущаются.

Поле точечного заряда



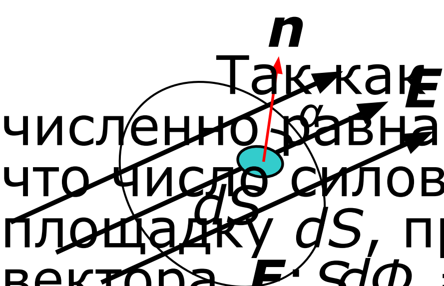


Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса в интегральной и дифференциальной формах

- Поток вектора напряженности электрического поля

В «теории поля» принято называть *потоком некоторого вектора **E** через замкнутую поверхность S* интеграл вида:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_S E_n \cdot dS \qquad (27), \quad \text{где } E_n = E \cdot \cos\alpha$$



Так как густота силовых линий поля численно равна модулю вектора ***E***, то можно считать, что число силовых линий, пронизывающих малую площадку *dS*, представляет элементарный поток вектора ***E***: $d\Phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, а поверхностный интеграл (27) можно рассматривать как полное число силовых линий поля, пронизывающих всю поверхность *S*

- Теорема Гаусса в электростатике

Определение: Поток вектора ***E*** через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ε_0.

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \qquad (28)}$$

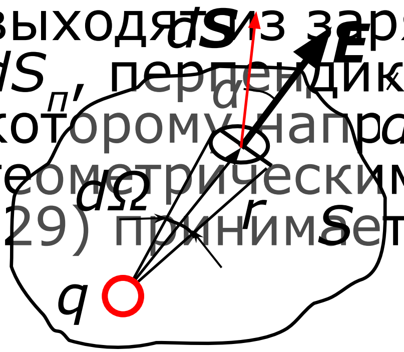
Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса в интегральной и дифференциальной формах

- Доказательство теоремы Гаусса

Рассмотрим поле точечного положительного заряда *q*. Окружим этот заряд произвольной замкнутой поверхностью *S* и определим поток вектора ***E*** сквозь ее элемент *dS*:

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = E\cdot dS\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot dS\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot dS_n \qquad (29)$$

Вводя телесный угол *dΩ*, лучи которого выходят из заряда и опираются на площадку dS_n, перпендикулярную радиусу-вектору ***r*** (по которому направлен ***E***), и в соответствии с геометрическим соотношением $dS_n=r^2\cdot d\Omega$ выражение (29) принимает вид:



$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot d\Omega$$

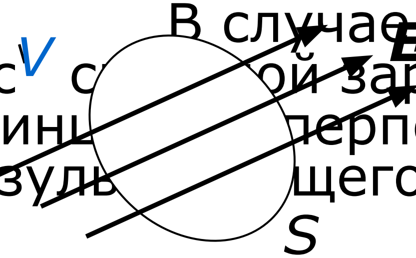
Интегрирование последнего выражения сводится к интегрированию по всему телесному углу *Ω* и приводит к доказательству теоремы:

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = \frac{q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q\cdot 4\cdot\pi}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса в интегральной и дифференциальной формах

- Поток вектора ***E*** как алгебраическая величина

Поток Φ_E – алгебраическая величина, его знак совпадает со знаком заряда q. Отсутствие каких-либо зарядов в объеме V, ограниченном замкнутой поверхностью S (или их полная компенсация), определяет нулевой поток ***E*** через рассматриваемую поверхность; на рисунке это изображается одним и тем же количеством силовых линий поля, вошедших в объем и вышедших из него.



В случае, когда электрическое поле создается системой зарядов $\{q_1, q_2, \ldots, q_i\}$, то согласно принципу суперпозиции $\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\ldots+\mathbf{E}_i$ поток результирующего вектора ***E***:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oint_S (\vec{E_1}+\vec{E_2}+\ldots+\vec{E_i})\cdot\vec{dS} = \Phi_{E_1}+\Phi_{E_2}+\ldots+\Phi_{E_i} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot(q_1+q_2+\ldots+q_i) = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\sum_i q_i$$

Последний результат еще раз доказывает теорему Гаусса.

Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса в интегральной и дифференциальной формах

- Интегральная форма теоремы Гаусса

При рассмотрении полей, создаваемых заряженными телами с объемной плотностью заряда *ρ,* можно считать, что каждый элементарный объем *dV* содержит элементарный заряд *dq =ρ·dV,* и тогда в правой части выражения (28) для теоремы Гаусса имеем вместо суммы точечных зарядов интеграл по объемному заряду, а *теорема Гаусса* в целом принимает так называемую *интегральную форму:*

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\int_V \rho\cdot dV \qquad (30)}$$

- Дифференциальная форма теоремы Гаусса

Согласно теореме Остроградского-Гаусса имеем: $\oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \int_V \nabla\vec{E}\cdot dV$

Приравнивая правые части последнего выражения и формулы (30), получаем уравнение $\int_V \nabla\vec{E}\cdot dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\int_V \rho\cdot dV$ которое будет выполняться для любого произвольного объ-ема при соблюдении условия:

$$\boxed{\nabla\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho \qquad (31)}$$

Формула (31) является *дифференциальной формой теоремы Гаусса*

Замечание: Дивергенция $\nabla\vec{E}$ определяет удельную мощность источников (или стоков) рассматриваемого векторного поля.

Применение теоремы Гаусса для расчета электростатических полей

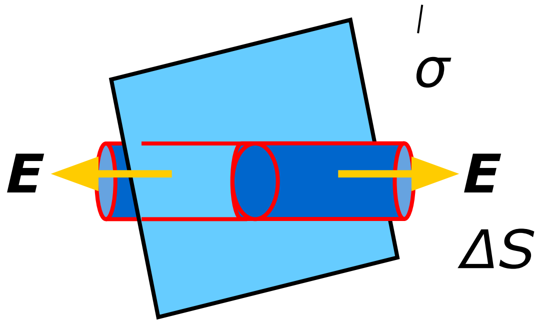
- Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

Пусть поверхностная плотность положительного заряда во всех точках плоскости равна σ. Из симметрии задачи следует, что вектор $\boldsymbol{E}$ перпендикулярен заряженной плоскости, одинаков по модулю и противоположен по направлению в симметричных относительно плоскости точках.

Выбрав в качестве замкнутой поверхности цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями величиной ΔS, применим теорему Гаусса. Поток $\boldsymbol{E}$ через боковую поверхность цилиндра равен 0, а - через каждое основание $\Phi_{E0}=E\cdot\Delta S$; следовательно суммарный поток $\Phi_E=2\Phi_{E0}=2E\cdot\Delta S$. Заряд, заключенный внутри цилиндра $\sigma\cdot\Delta S$, таким образом, согласно теореме Гаусса имеем уравнение:

$$2E\cdot\Delta S = \sigma\cdot\Delta S/\varepsilon_0 \text{ или } \underline{E = \sigma/2\varepsilon_0}$$

Полученный результат свидетельствует об однородности поля.



Применение теоремы Гаусса для расчета электростатических полей

- Поле бесконечного равномерно заряженного цилиндра

Пусть электрическое поле создается бесконечной цилиндрической поверхностью радиуса r_0, заряженной равномерно так, что на единицу ее длины приходится заряд λ.

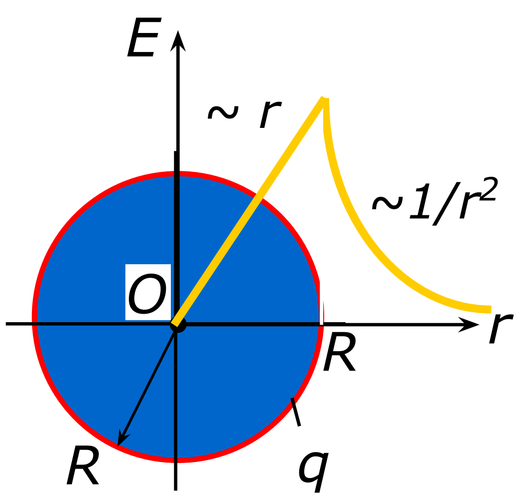
Из соображений симметрии следует, что поле здесь имеет радиальный характер, т.е. $\boldsymbol{E} \perp$ OO', а модуль – $E(r)$. Выбрав в качестве гауссовой поверхности коаксиальный цилиндр радиуса r, определим поток вектора $\boldsymbol{E}$ через его боковую поверхность: $\Phi_E = E_r \cdot 2\pi r \cdot h$ где E_r – радиальная проекция (поток через основания цилиндра равен 0). Таким образом, согласно теореме Гаусса получаем уравнение для случая $r \geq r_0$: $E_r \cdot 2\pi r \cdot h = \lambda h/\varepsilon_0$, откуда следует, что $\underline{E(r) = E_r = \lambda/2\pi\varepsilon_0 r}$.

В случае $r < r_0$ гауссова поверхность не содержит внутри себя зарядов, поэтому в этой области поле отсутствует: $\boldsymbol{E} = 0$.

Применение теоремы Гаусса для расчета электростатических полей

- Поле равномерно заряженного шара

Пусть заряд q равномерно распределен по объему шара радиуса R. Поле такого заряженного объекта, очевидно, - центрально-симметричное, т.е. для него $E = f(r)$ и, следовательно, в качестве гауссовой поверхности здесь следует выбрать концентрическую сферу радиуса r.



В случае $r \leq R$ гауссова поверхность будет «охватывать» заряд величиной $q \cdot (r/R)^3$ (так как он пропорционален объему рассматриваемой сферы $4/3 \cdot \pi r^3$, а весь заряд равномерно распределен по объему шара $V = 4/3 \cdot \pi R^3$), поэтому здесь имеем: $E_r \cdot 4\pi r^2 = 1/\varepsilon_0 \cdot q(r/R)^3$; откуда следует, что

$$E_r = q/4\pi\varepsilon_0 \cdot (r/R^3).$$

Для случая поля вне шара при $r > R$ имеем уравнение, отвечающее теореме Гаусса: $E_r \cdot 4\pi r^2 = q/\varepsilon_0$, откуда следует, что

$$E(r) = E_r = q/4\pi\varepsilon_0 r^2.$$

Уравнение Пуассона

- Вывод уравнения Пуассона

В электростатике существуют задачи, в которых распределение зарядов неизвестно, но заданы потенциалы проводников (заряженных тел), их форма и относительное расположение. Требуется определить потенциал $\varphi(\boldsymbol{r})$ в любой точке электрического поля между проводниками.

Определим дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять потенциальная функция $\varphi(r)$. Для этого в дифференциальную форму теоремы Гаусса $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$ вместо вектора $\boldsymbol{E}$ подставим его выражение через потенциал $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$, в результате получим общее дифференциальное уравнение для потенциала – *уравнение Пуассона:*

$$\nabla.(-\nabla\varphi) = \rho/\varepsilon_0 \text{ или } \nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0\,, \qquad (32)$$

где оператор Лапласа в декартовой системе координат

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Уравнение Лапласа

Если между проводниками нет зарядов (ρ=0), то уравнение (32) переходит в более простое *уравнение Лапласа:*

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad (33)$$

Уравнение Пуассона

- Теорема единственности

Определение потенциала сводится к нахождению такой функции $\varphi(r)$, которая во всем пространстве между проводниками удовлетворяет либо уравнению Пуассона, либо уравнению Лапласа, а на поверхностях самих проводников принимает известные значения: φ_1, φ_2 и т.д. Эта задача имеет единственное решение.

В теории это утверждение носит название *теоремы единственности*. С физической точки зрения этот вывод очевиден: если решение не одно, то будет не один потенциальный «рельеф», следовательно, в каждой точке поле ***E***, вообще,- неоднозначно… Т.е. мы пришли к физическому абсурду.

По теореме единственности можно также утверждать, что заряд на поверхности проводника в статическом случае распределяется тоже единственным образом.

Решение уравнений (32) или (33) – задача очень сложная. Однако использование теоремы единственности весьма облегчает решение ряда электростатических задач. А, если решение найдено и оно удовлетворяет тому, или иному уравнению, то можно утверждать, что полученное решение является правильным и единственным.