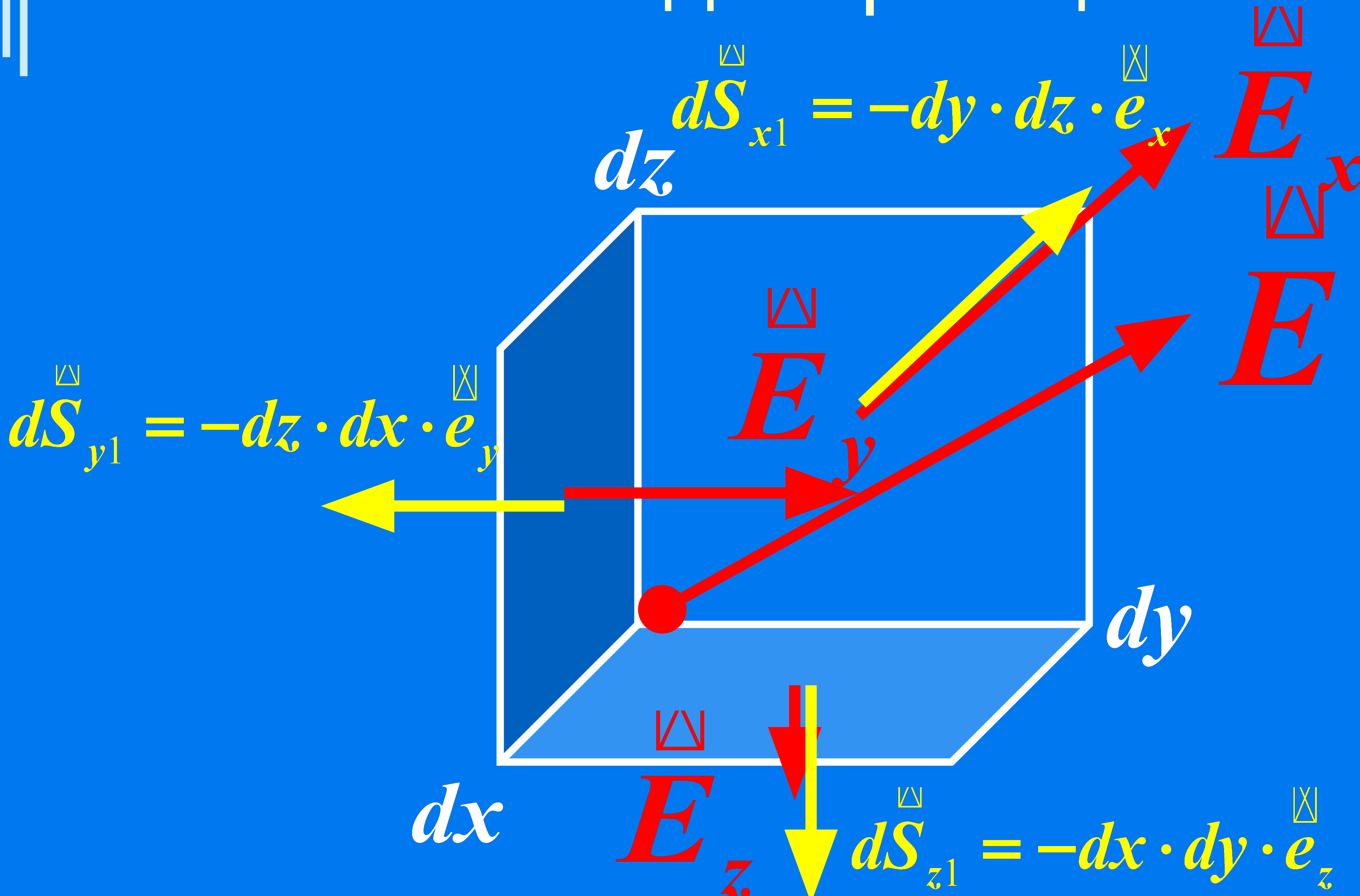
Лекция 2

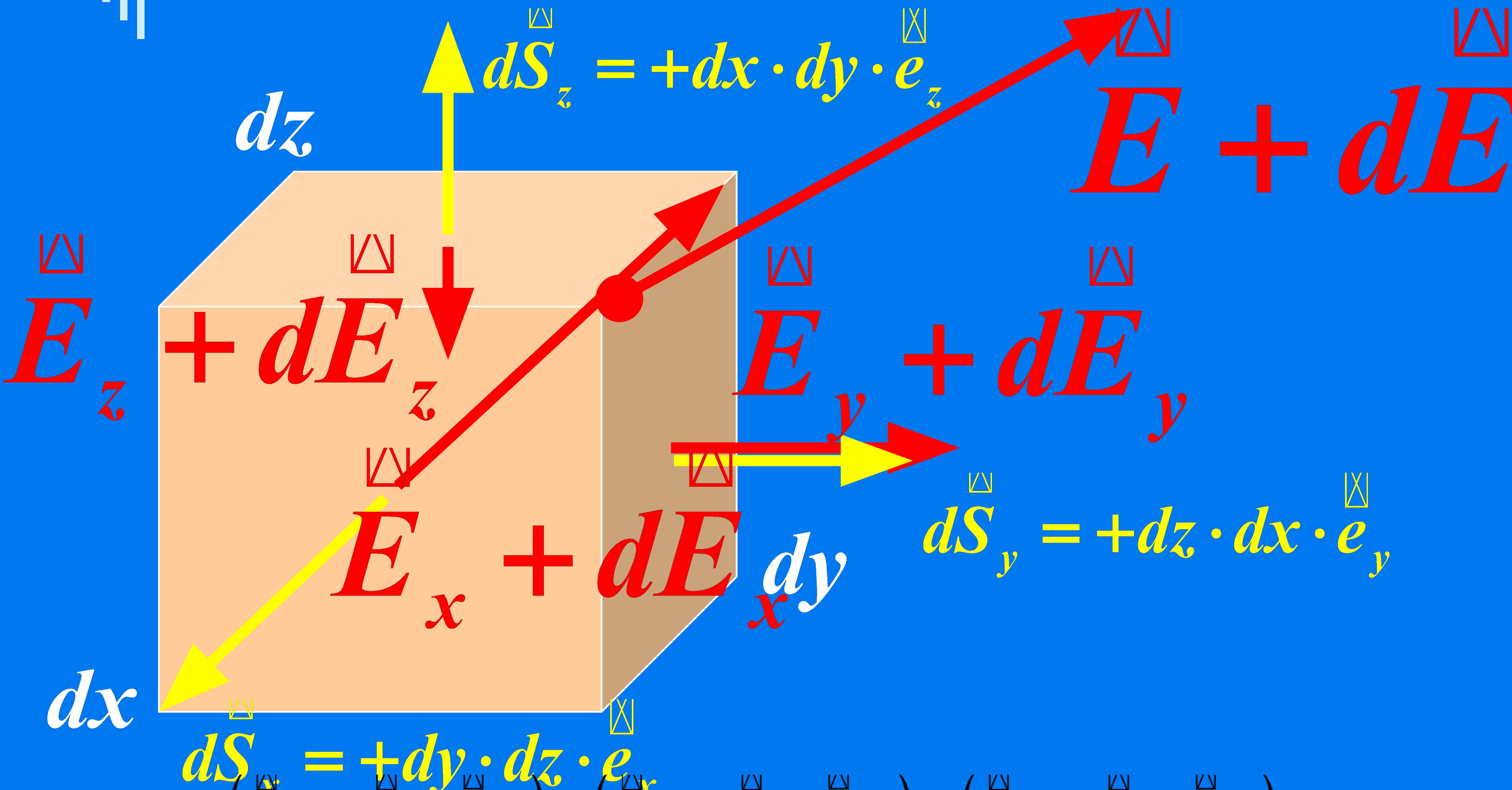
Основные уравнения электростатики в вакууме.

Понятие дивергенции



$$d\Phi_{E1} = \left(\vec E, d\vec S_{x1}\right) + \left(\vec E, d\vec S_{y1}\right) + \left(\vec E, d\vec S_{z1}\right) = \left(\vec E_x, d\vec S_{x1}\right) + \left(\vec E_y, d\vec S_{y1}\right) + \left(\vec E_z, d\vec S_{z1}\right)$$

Понятие дивергенции



$$d\Phi_{E2} = \left(\vec{E} + d\vec{E}, d\vec{S}_{x2}\right) + \left(\vec{E} + d\vec{E}, d\vec{S}_{y2}\right) + \left(\vec{E} + d\vec{E}, d\vec{S}_{z2}\right) =$$

$$d\Phi_{E2} = d\Phi_{E_x 2} + d\Phi_{E_y 2} + d\Phi_{E_z 2} = \left(\vec{E} + d\vec{E}, d\vec{S}_{x2}\right) + \left(\vec{E} + d\vec{E}, d\vec{S}_{y2}\right) + \left(\vec{E} + d\vec{E}, d\vec{S}_{z2}\right)$$

$$= \left(E_x + dE_x\right) \cdot dy \cdot dz + \left(E_y + dE_y\right) \cdot dz \cdot dx + \left(E_z + dE_z\right) \cdot dx \cdot dy$$

Понятие дивергенции

$$\Phi_{E1} = -E_x \cdot dy \cdot dz - E_y \cdot dz \cdot dx - E_z \cdot dx \cdot dy$$

$$\Phi_{E2} = (E_x + dE_x) \cdot dy \cdot dz +$$

$$(E_y + dE_y) \cdot dz \cdot dx + (E_z + dE_z) \cdot dx \cdot dy$$

$$\Phi_{E} = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} =$$

$$= dE_x \cdot dy \cdot dz + dE_y \cdot dz \cdot dx + dE_z \cdot dx \cdot dy$$

Понятие дивергенции

$$d\Phi_E = d\Phi_{E1} + d\Phi_{E2} =$$

$$= dE_x \cdot dy \cdot dz + dE_y \cdot dz \cdot dx + dE_z \cdot dx \cdot dy$$

$$div(\vec{E}) = \lim_{V \to 0} \frac{\Phi_E}{V} = \frac{d\Phi_E}{dV} =$$

$$= \frac{dE_x \cdot dy \cdot dz + dE_y \cdot dz \cdot dx + dE_z \cdot dx \cdot dy}{dx \cdot dy \cdot dz}$$

$$div(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Оператор $\vec{\nabla}$

$$div(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = \left(E_x; E_y; E_z \right) \equiv E_x \cdot \vec{e}_x + E_y \cdot \vec{e}_y + E_z \cdot \vec{e}_z$$

$$div(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

Теорема Гаусса в дифференциальной форме

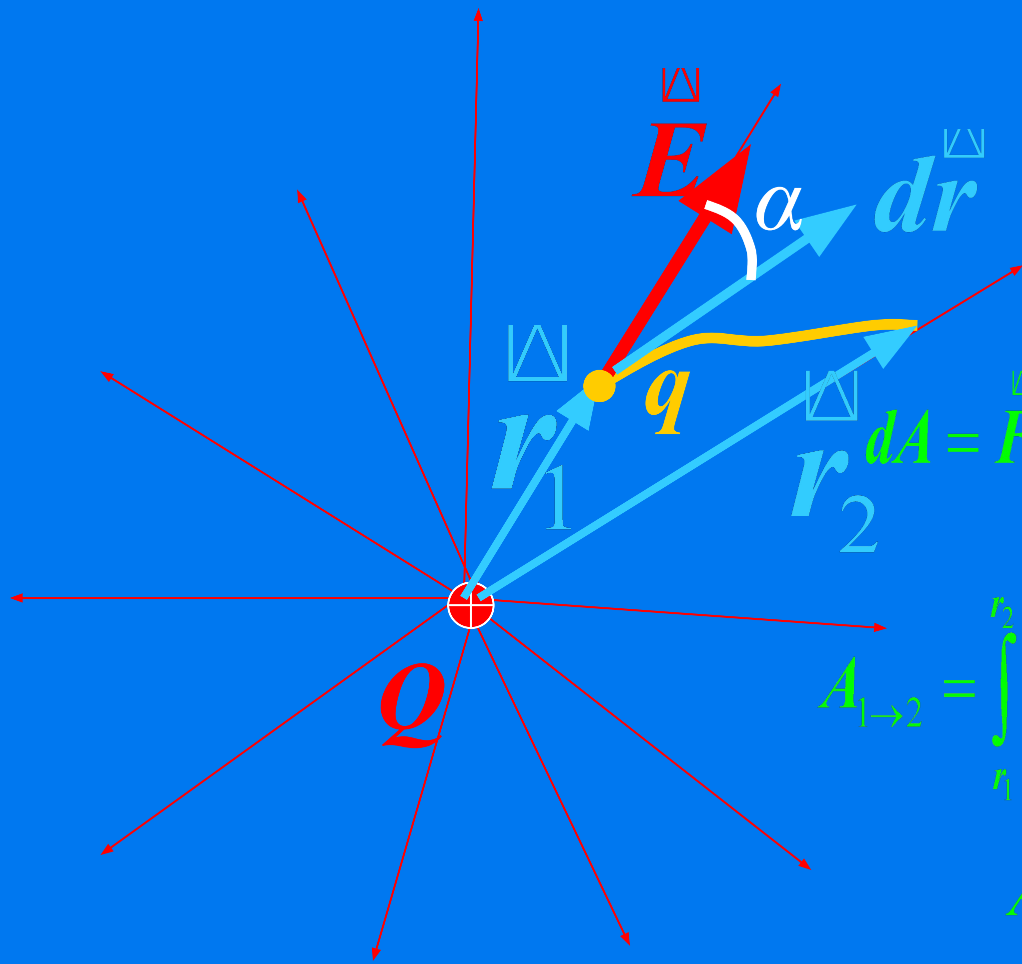
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$div(\vec{E}) = \frac{d\Phi_E}{dV} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$div(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{dV}$$

$$div(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Работа сил электростатического поля



$$\vec F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qq}{r^2}\cdot\vec e_r = q\cdot\vec E$$

$$dA = \vec F\cdot d\vec r = q\cdot\vec E\cdot d\vec r = q\cdot E\cdot dr\cdot\cos(\alpha)$$

$$A_{1\to 2} = \int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qq}{r^2}\cdot dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$A_{1\to 2} = W_{n1} - W_{n2} = -\Delta W_n$$

Потенциал поля

$$W_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r} = q \cdot \varphi$$

$$\varphi = \frac{W_n}{q}$$

$$[\varphi] = \frac{Дж}{Кл} = В$$

$$A = -q \cdot \Delta\varphi$$

Для точечного заряда: $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$

Связь между напряжённостью и потенциалом

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$dA = -q \cdot d\varphi$$

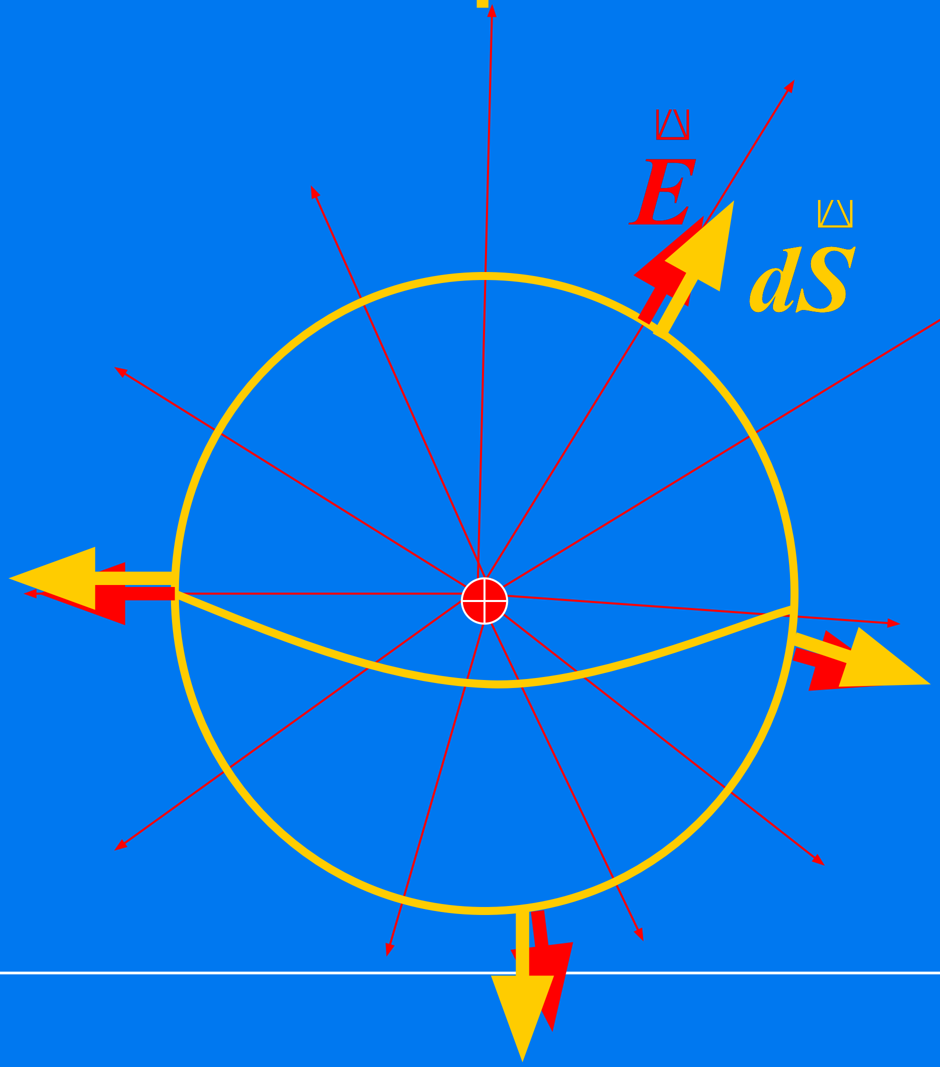
$$\Rightarrow \quad d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta\varphi = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

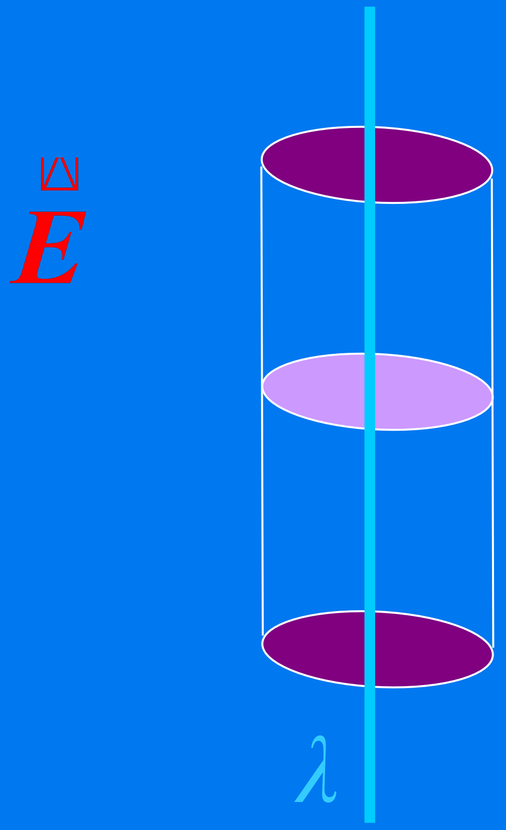
$$[E] = \frac{Н}{Кл} = \frac{В}{м}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -grad(\varphi) = -\vec{\nabla}\varphi$$

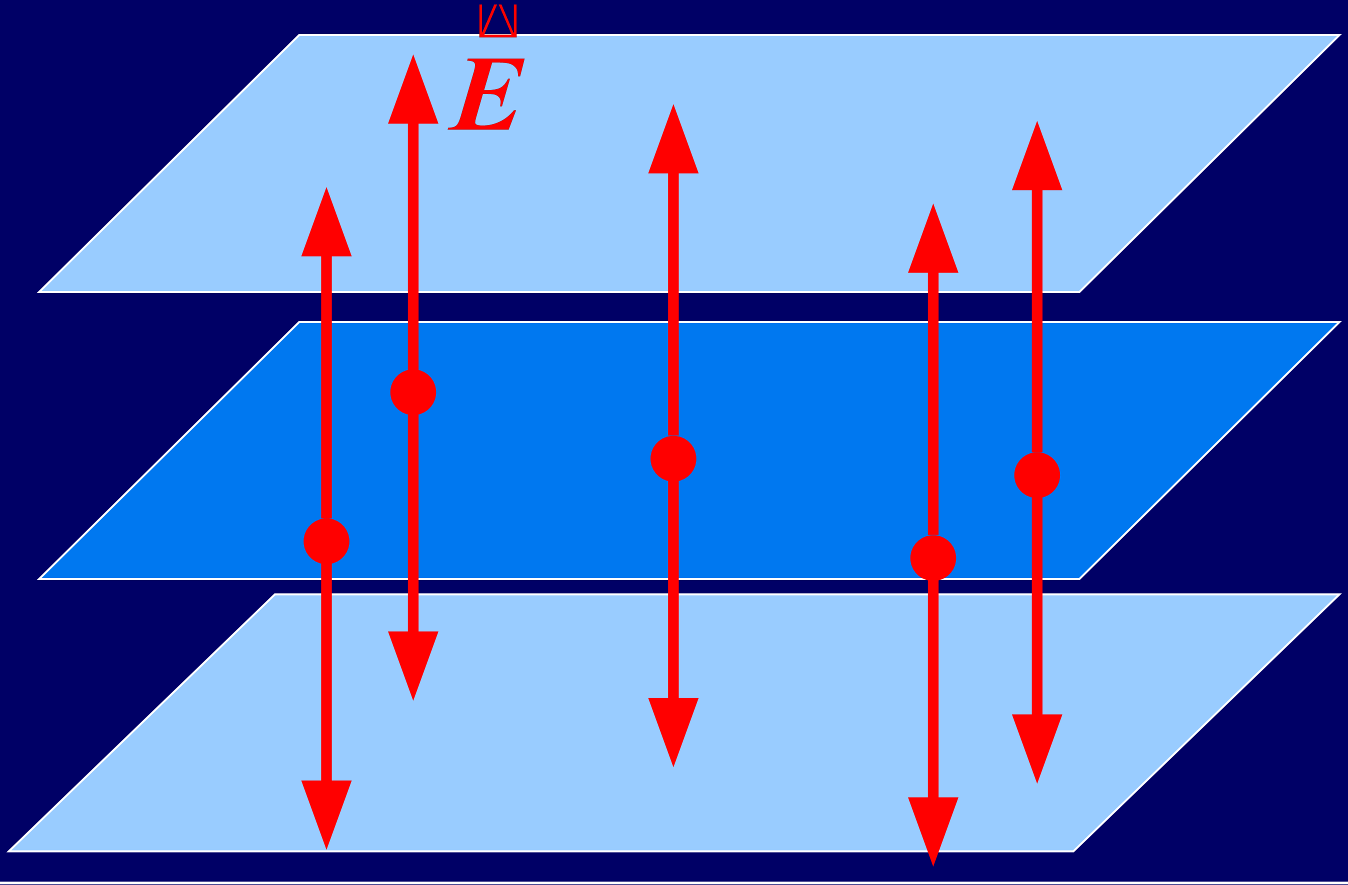
Эквипотенциальные поверхности. Точечный заряд



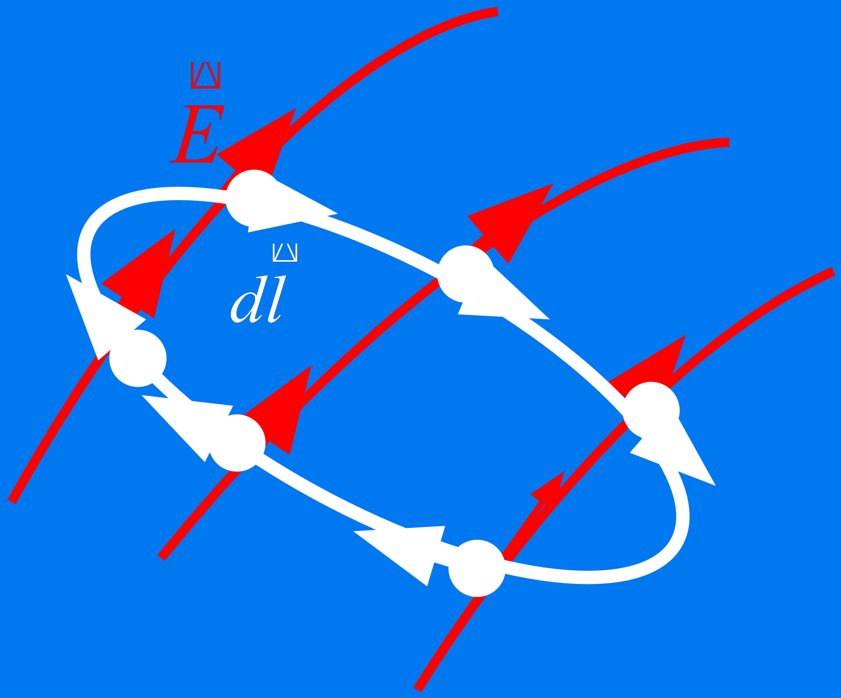
Эквипотенциальные поверхности. Равномерно заряженная бесконечная нить



Эквипотенциальные поверхности. Равномерно заряженная бесконечная плоскость



Циркуляция электростатического поля

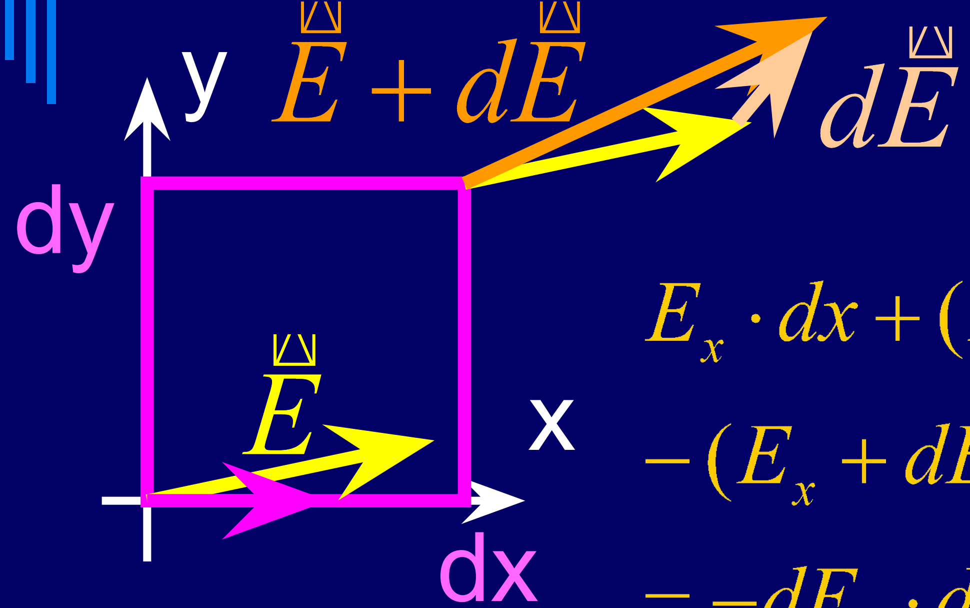


$$dA = q\vec{E}d\vec{l}$$

$$A = q\oint \vec{E}d\vec{l}$$

$$C_{E} = \oint \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Понятие ротора



$$C_E=\oint \vec{E}d\vec{l}$$

$$E_x\cdot dx+(E_y+dE_y)\cdot dy-$$
$$-(E_x+dE_x)\cdot dx-E_y\cdot dy=$$
$$=-dE_x\cdot dx+dE_y\cdot dy$$

$$\frac{-dE_x\cdot dx+dE_y\cdot dy}{dS_z}=\frac{-dE_x\cdot dx+dE_y\cdot dy}{dx\cdot dy}=-\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$rot(\vec{E})_z=-\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

Понятие ротора

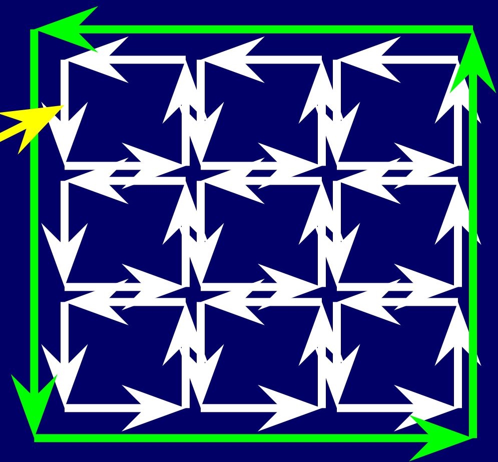
$$rot(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}; \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}; \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

$$rot(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$rot(\vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} = [\vec{\nabla}, \vec{E}]$$

Теорема Стокса

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$C_{E} = \oint \vec{E} d\vec{l}$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S rot(\vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

Теорема о циркуляции в дифференциальной форме

$$C_{E} = \oint_{S} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$rot(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}; \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}; \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

$$rot(\vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right] = 0$$

Интегральные теоремы электростатики в вакууме

Теорема о потоке вектора $\vec{E}$: $\Phi_{E} = \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$: $C_{E} = \oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0$

Дифференциальные теоремы электростатики в вакууме

$$div(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$rot(\vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right] = 0$$