МАТЕМАТИКА 1 семестр бакалавры

I	Векторная алгебра Линейная алгебра Аналитическая геометрия	Р.З. К/Р №1
II	Математический анализ: Вычисление пределов и производных, их применение.	Р.З. К/Р №2
Экзамен		

Рекомендуемая литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1985.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Линейная алгебра. М.: Наука, 1984.
3. Каган М.Л., Самохин М.В. Математика в инженерном ВУЗе. Алгебра и геометрия. М.: Стройиздат, 1984.
4. Каган М.Л., Кузина Т.С., Мацеевич Т.А. Векторная алгебра – см. сайт МГСУ, каф. Высшей математики
5. Каган М.Л., Кузина Т.С., Мацеевич Т.А. Аналитическая геометрия – см. сайт МГСУ, каф. Высшей математики

Образец титульного листа расчетных заданий

Московский государственный строительный университет

Расчетное задание № ___

по теме: «____________________________

______________________________________»

студента: ИСА I - _____

_____Фамилия Имя Отчество_____

Вариант № _____

2013г.

Лекция №1 Векторная алгебра

1. Векторные и скалярные величины. Понятия вектора, его модуля, нулевого вектора.
2. Коллинеарные и компланарные векторы. Равенство векторов.
3. Свободный вектор. Операции над векторами.
4. Понятие противоположного вектора и орта вектора.
5. Признак коллинеарности векторов.
6. Теорема о разложении вектора на плоскости и в пространстве.
7. Прямоугольные координаты вектора и точки.
8. Операции над векторами в прямоугольной системе координат.

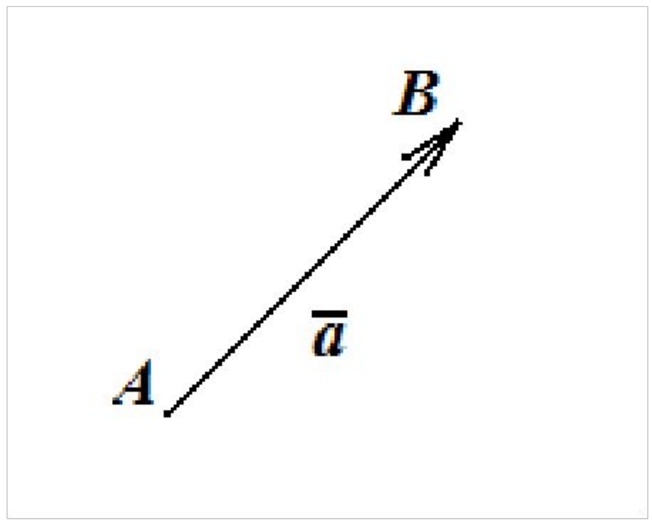
Векторные и скалярные величины

Величины

скалярные	**векторные**
вполне определяются числом	определяются числом и направлением (на плоскости и в пространстве)
масса время	скорость сила

Определение. *Вектор* $\overline{AB}$ – направленный отрезок, начало которого находится в точке A, а конец в точке B.

Обозначение: $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ …

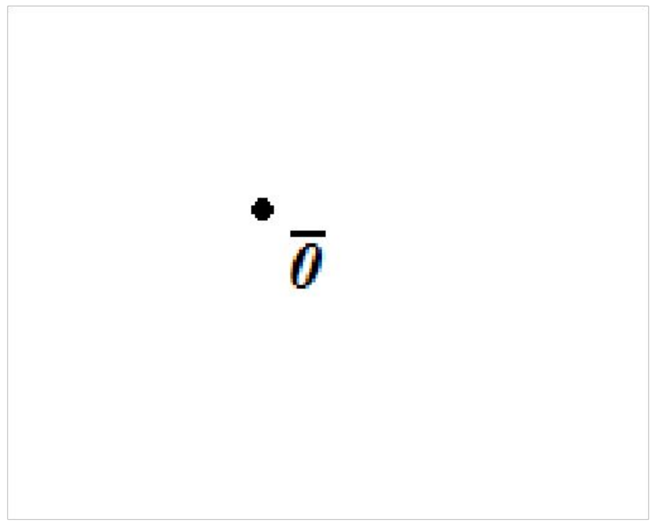


Определение. *Длиной* (*модулем*) *вектора* $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние между началом A и концом B этого вектора.

Обозначение: $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\vec{a}\right|$ …

Определение. Вектор, длина которого равна 0 (нулю) – называется *нулевым* вектором

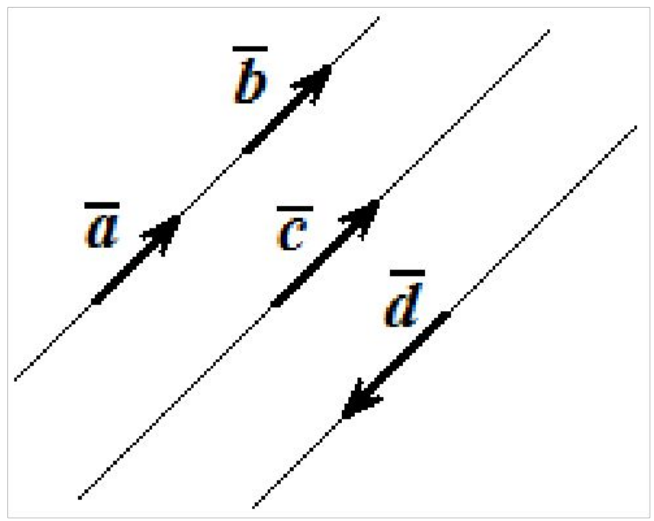
Обозначение: $\overline{0}$



Направление нулевого вектора

Определение. Ненулевые векторы называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Обозначение: $\overline{a} \parallel \overline{b}$



$$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}, \quad \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{c}, \quad \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{d}$$

Определение. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными* $(\overline{a} = \overline{b})$,

если: 1) $|\overline{a}| = |\overline{b}|$

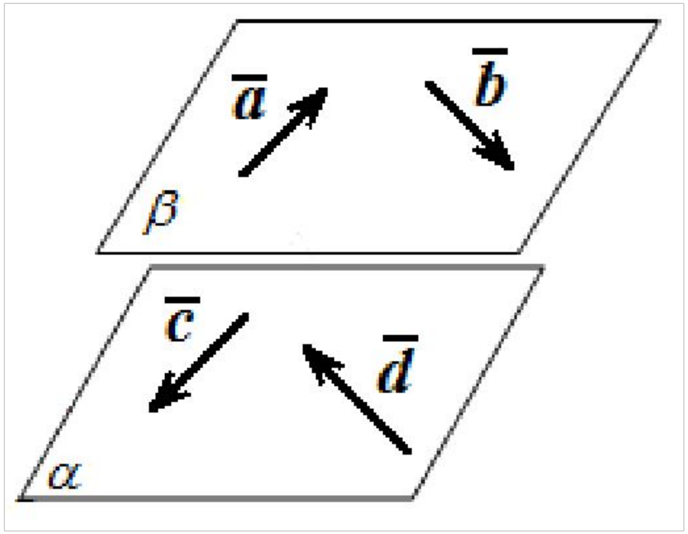
2) $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$

Равные векторы могут быть получены один из другого параллельным переносом

$$\overline{a} \uparrow \frac{- - -}{- - -} \uparrow \overline{b}$$

Будем рассматривать *свободные* векторы, т.е. для любого вектора точка приложения может быть выбрана где угодно.

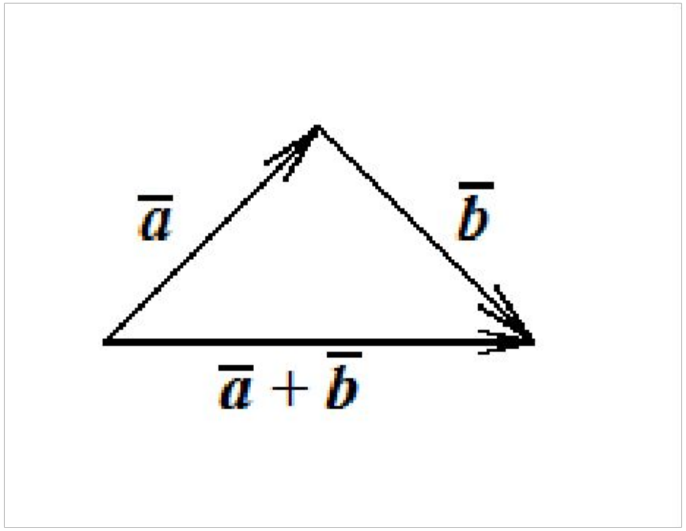
Определение. Ненулевые векторы называются *компланарными*, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.



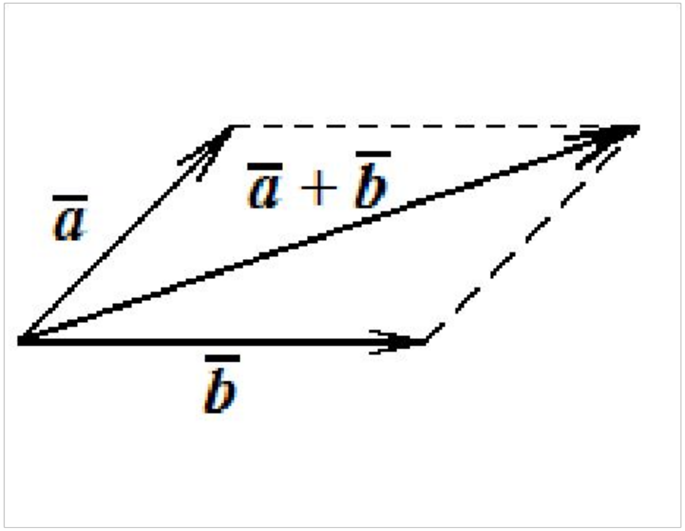
Рассматриваем свободные векторы. Поэтому, если все компланарные векторы привести к одному началу, то они будут лежать в одной плоскости.

Линейные операции над векторами.

1. Сложение векторов.



правило треугольника



правило параллелограмма

Свойства сложения

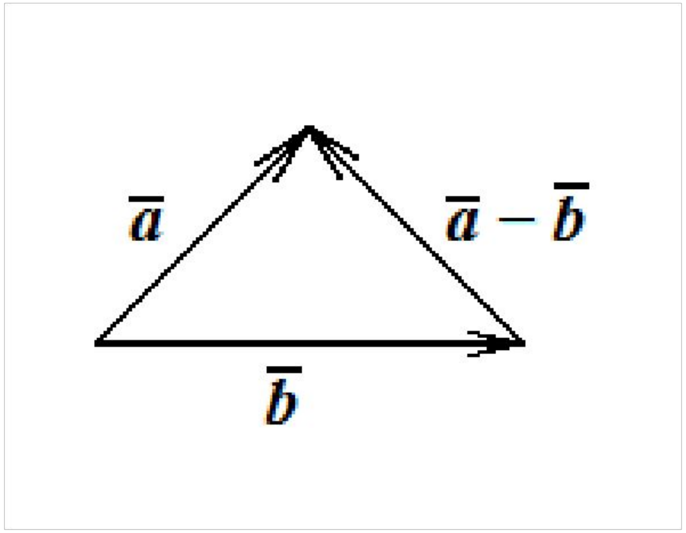
1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (переместительный закон)

2. $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c} = \bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right)$ (сочетательный закон)

3. $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$

Линейные операции над векторами.

2. Разность векторов.



Линейные операции над векторами.

3. Умножение вектора на число.

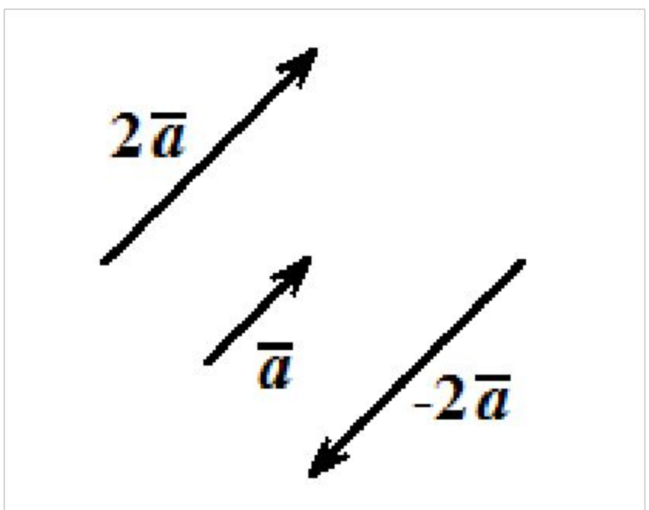
Определение. *Произведением ненулевого вектора* $\overline{a}$ *на число* $\lambda \in R,\ \lambda \neq 0$, называется вектор $\overline{c} = \lambda\,\overline{a}$ такой, что

$$1)\ |\overline{c}| = |\lambda\,\overline{a}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$$

$$2)\ \overline{c} \parallel \overline{a}$$

$$3)\ \overline{c} \uparrow\uparrow \overline{a},\ \text{если}\ \lambda > 0$$

$$\overline{c} \uparrow\downarrow \overline{a},\ \text{если}\ \lambda < 0$$



$$\overline{a} = \overline{0} \Rightarrow \lambda\,\overline{a} = \overline{0}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \lambda\,\overline{a} = \overline{0}$$

Линейные операции над векторами.

Свойства умножения вектора на число.

Пусть $\lambda, \mu \in R$

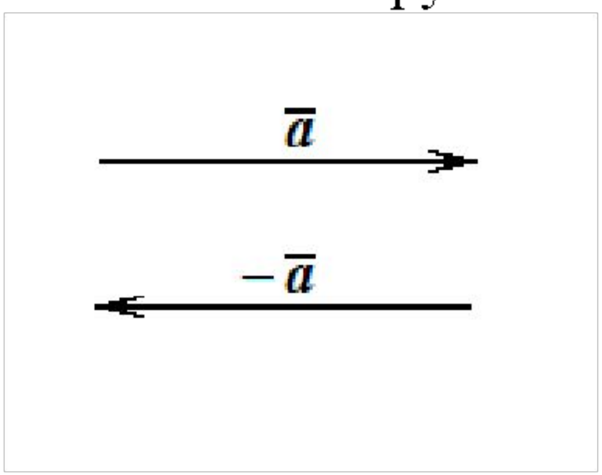
1) $(\lambda\mu)\bar{a} = \lambda(\mu\bar{a})$

2) $(\lambda+\mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ (распределительный закон)

3) $\lambda(\bar{a}+\bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ (распределительный закон)

4) $1\cdot\bar{a} = \bar{a}$

Определение. Вектор $-1\cdot\bar{a}$ $(-\bar{a})$ называется вектором *противоположным* вектору $\bar{a}$.



$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$$

$$|\bar{a}| = |-\bar{a}|$$

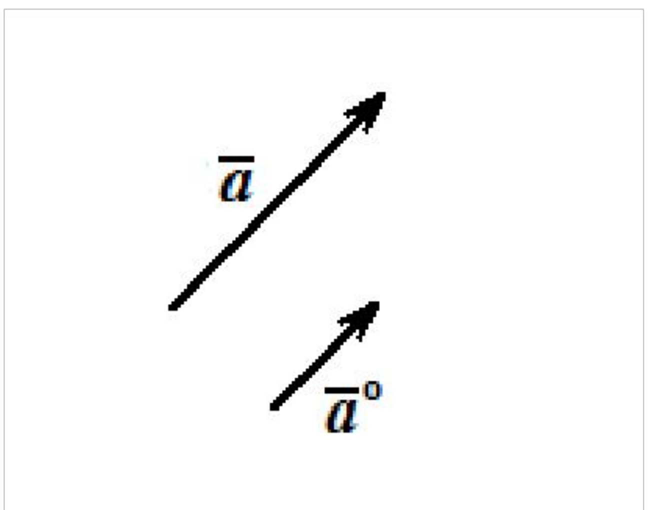
Определение. *Единичным вектором* (или *ортом*) вектора $\overline{a}$ называется вектор который:

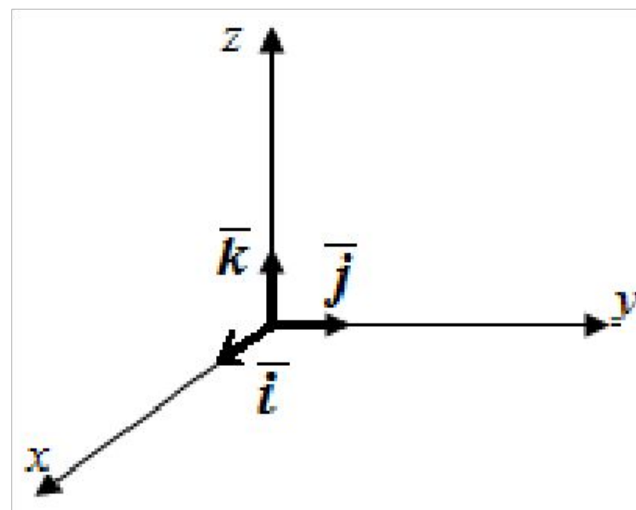
1) коллинеарен и сонаправлен вектору $\overline{a}$
2) имеет длину равную 1

Обозначение: $\overline{a}^0$ или $\overline{e}_{\overline{a}}$

1) $\overline{a}^0 \uparrow\uparrow \overline{a}$

2) $\left|\overline{a}^0\right| = 1$





Признак коллинеарности векторов в векторной форме

Теорема. Ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них может быть получен из другого умножением на некоторое число

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} = \lambda \overline{b}, \quad \lambda \in R .$$

Достаточность: Дано: $\overline{a} = \lambda \overline{b}$.

Доказать: $\overline{a} \parallel \overline{b}$

Доказательство: $\overline{a} = \lambda \overline{b}$

$$\lambda \overline{b} \parallel \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \parallel \overline{b} .$$

Признак коллинеарности векторов в векторной форме

Необходимость: Дано: $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Доказать: $\overline{a} = \lambda \overline{b}$

Доказательство:

1) если $\overline{a} = \overline{0}$, то $0 \cdot \overline{b} = \overline{0} = \overline{a}$

2) если $\overline{a} \neq \overline{0}, \overline{b} \neq \overline{0}$, $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$

$$\frac{\left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{b}\right|} = \lambda, \quad \lambda > 0 \qquad \lambda \cdot \overline{b} = \frac{\left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{b}\right|} \cdot \overline{b}$$

$$\left|\lambda \overline{b}\right| = \left|\frac{\left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{b}\right|} \cdot \overline{b}\right| = \frac{\left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{b}\right|} \cdot \left|\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|$$

$$\lambda \cdot \overline{b} \uparrow\uparrow \overline{b}, \quad \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \uparrow\uparrow \lambda \cdot \overline{b}$$

Итак $\left|\overline{a}\right| = \left|\lambda \cdot \overline{b}\right|$ и $\overline{a} \uparrow\uparrow \lambda \cdot \overline{b} \Rightarrow \overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$.

Признак коллинеарности векторов в векторной форме

3) если $\overline{a} \neq \overline{0}, \overline{b} \neq \overline{0}, \ \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$

$$\frac{\left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{b}\right|} = -\lambda, \quad \lambda < 0 \qquad \lambda \cdot \overline{b} = -\frac{\left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{b}\right|} \cdot \overline{b}$$

$$\left|\lambda \cdot \overline{b}\right| = \left| -\frac{\left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{b}\right|} \cdot \overline{b} \right| = \frac{\left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{b}\right|} \cdot \left|\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|$$

$$\lambda \cdot \overline{b} \uparrow\downarrow \overline{b}, \quad \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \uparrow\uparrow \lambda \cdot \overline{b}$$

Итак $\left|\overline{a}\right| = \left|\lambda \cdot \overline{b}\right|$ и $\overline{a} \uparrow\uparrow \lambda \cdot \overline{b} \ \Rightarrow \ \overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$.

Определение. Пусть даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ и действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Вектор

$$\overline{a} = \lambda_1 \cdot \overline{a_1} + \lambda_2 \cdot \overline{a_2} + \ldots + \lambda_n \cdot \overline{a_n}$$

называется *линейной комбинацией векторов* $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ *с коэффициентами* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Определение. *Базис векторов* – это множество таких векторов в векторном пространстве, что любой вектор этого пространства может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов из этого множества.

Теорема. (*О разложении вектора на плоскости по базису двух неколлинеарных векторов*)

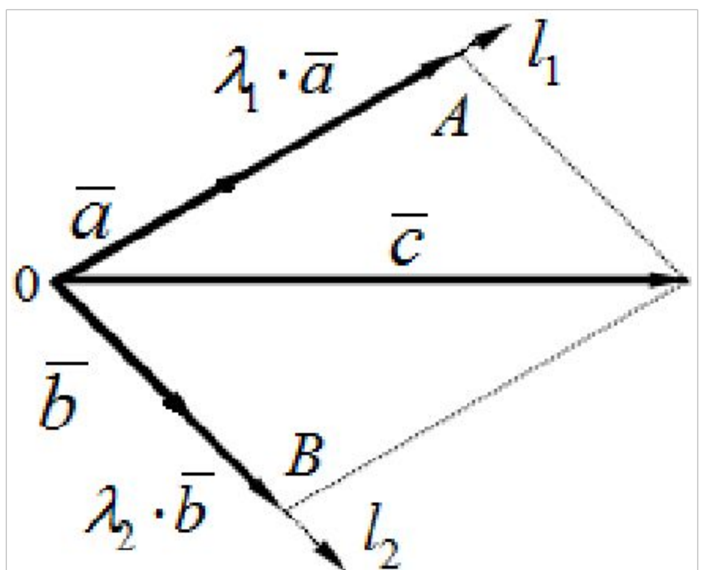
Если $\overline{a} \nparallel \overline{b}$, то любой ненулевой вектор $\overline{c}$ на плоскости может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$

$$\left(\forall \overline{c} \quad \exists \lambda_1, \lambda_2 \in R, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0: \quad \overline{c} = \lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{b} \right)$$

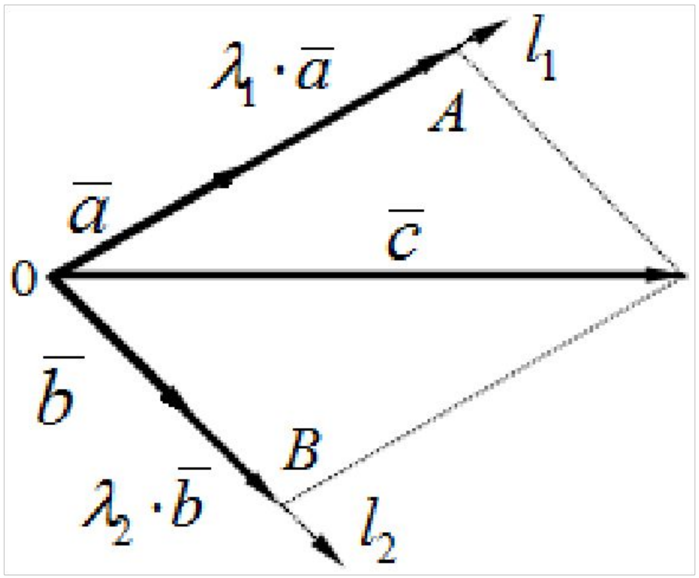
и такое представление единственное.

Дано: $\overline{a} \nparallel \overline{b}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – компланарны.

Доказать: $\overline{c} = \lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{b}$.



Доказательство:



Докажем возможность разложения:

$$\overline{OA} \parallel \overline{a} \quad \overset{\text{ПКВ}}{\Rightarrow} \quad \overline{OA} = \lambda_1 \cdot \overline{a}$$

$$\overline{OB} \parallel \overline{b} \quad \overset{\text{ПКВ}}{\Rightarrow} \quad \overline{OB} = \lambda_2 \cdot \overline{b}$$

$$\overline{c} = \overline{OA} + \overline{OB} = \lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{b}$$

Докажем единственность разложения:

От противного:

Пусть $\overline{c} = \lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{b}$ и $\overline{c} = \lambda_3 \cdot \overline{a} + \lambda_4 \cdot \overline{b}$, $\lambda_1 \neq \lambda_3$, $\lambda_2 \neq \lambda_4$.

$$\lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{b} = \lambda_3 \cdot \overline{a} + \lambda_4 \cdot \overline{b}$$

Тогда $(\lambda_1 - \lambda_3) \cdot \overline{a} = (\lambda_4 - \lambda_2) \cdot \overline{b}$

$$\Rightarrow \overline{a} = \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3} \cdot \overline{b} = \lambda \cdot \overline{b}, \ \ \lambda \neq 0$$

$\Rightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$ – противоречит условию

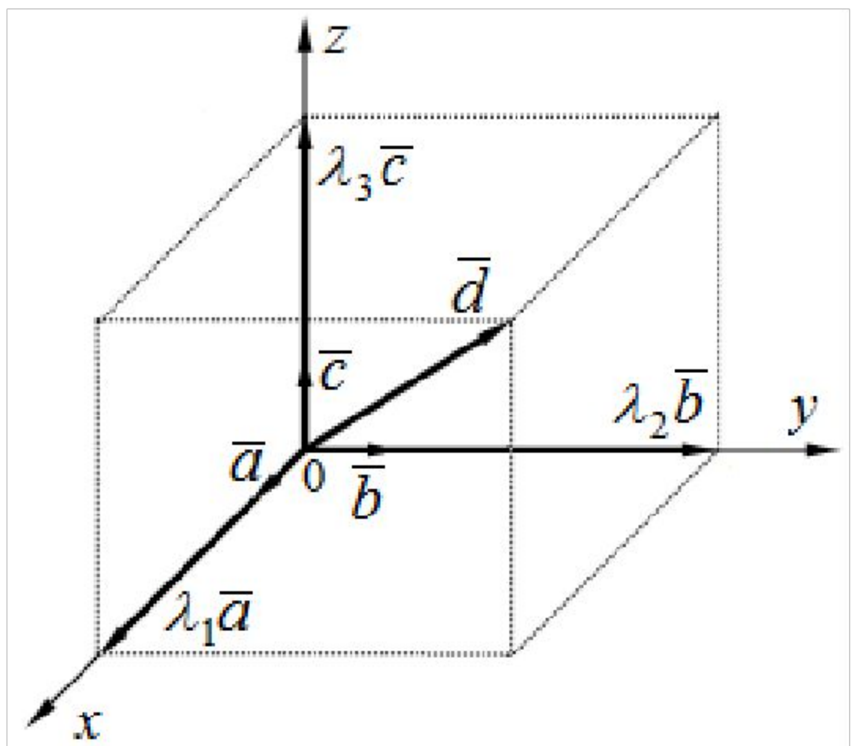
$\Rightarrow$ разложение единственное.

Теорема. (*О разложении вектора в пространстве по базису трёх некомпланарных векторов*)

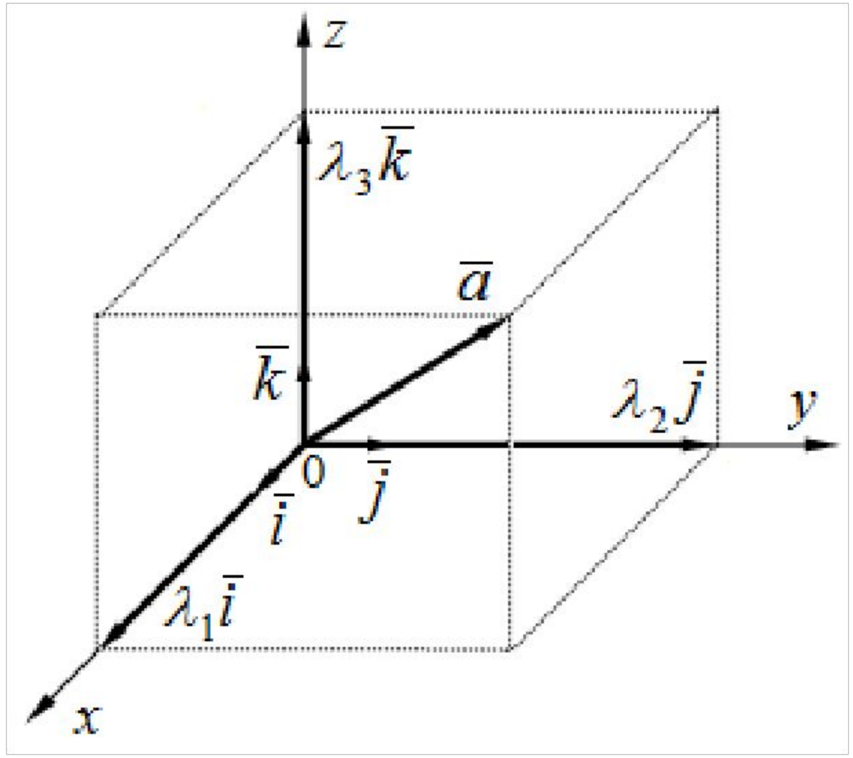
Если векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, – некомпланарны, то любой ненулевой вектор $\overline{d}$, $\overline{d} \neq \overline{0}$, в трехмерном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$

$$\left(\forall \overline{d} \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0: \quad \overline{d} = \lambda_1 \overline{a} + \lambda_2 \overline{b} + \lambda_3 \overline{c} \right)$$

и такое представление единственное.



Прямоугольные координаты вектора



$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{i} + \lambda_2 \bar{j} + \lambda_3 \bar{k}$$

$$\bar{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$$

Операции над векторами в прямоугольной системе координат

$$\overline{a} = \left\{ a_x, a_y, a_z \right\}, \quad \overline{b} = \left\{ b_x, b_y, b_z \right\}$$

$$1)\ \ \overline{a} + \overline{b} = \left\{ a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z \right\}$$

$$2)\ \ \lambda \in R, \quad \lambda \cdot \overline{a} = \left\{ \lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z \right\}$$

$$3)\ \ \overline{a} - \overline{b} = \left\{ a_x - b_x,\ a_y - b_y,\ a_z - b_z \right\}$$

Признак коллинеарности векторов в координатной форме

Теорема. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$