

Лекция 6

СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Сравнение функций

Определение 1:

Пусть в некоторой проколотой окрестности $U^{\times}(x_0)$ точки x_0 определены три функции $f(x)$, $g(x)$, $\alpha(x)$.

Если выполняется равенство $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$,

где $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, то функцию $f(x)$ называют

бесконечно малой функцией по сравнению с $g(x)$

при $x \rightarrow x_0$.

Это записывают так: $f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow x_0$.

Сравнение функций

Если $g(x) \neq 0$ для $\forall x \in U^\circ(x_0)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$$

Сравнение функций

Определение 2:

Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x \rightarrow x_0$ и при этом $f(x) = o(g(x))$, то говорят, что $g(x)$ есть **бесконечно большая функция более высокого порядка** чем $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Определение 3:

Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$ и при этом $f(x) = o(g(x))$, то говорят, что $f(x)$ есть **бесконечно малая функция более высокого порядка** чем $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Сравнение функций

Пример 1:

Функции $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^5$

$x^3 = o(x^5)$ при $x \rightarrow +\infty$

так как
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Сравнение функций

Пример 2:

Функции $f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x$ и $g(x) = x$

$f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow 0$

так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x \cdot \sin x) = 0$

Эквивалентные функции

Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$, определённые в некоторой окрестности точки x_0 , **эквивалентны** или **равны асимптотически** при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Этот факт обозначают следующим образом:

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0$$

Эквивалентные функции

Пример:

Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Следовательно,

$$\sin x \sim x \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0$$

Эквивалентные функции

Теорема 1:

Для того чтобы две функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \rightarrow x_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0,$$

либо

$$g(x) = f(x) + o(f(x)) \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0.$$

Свойства эквивалентных функций

1. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0$,
то $g(x) \sim f(x)$ при $x \rightarrow x_0$.
2. Если при $x \rightarrow x_0$ $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \sim h(x)$,
то $f(x) \sim h(x)$ при $x \rightarrow x_0$.
3. Если $f_1(x) \sim g_1(x)$ и $f_2(x) \sim g_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$,
то $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$.
4. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0$,
то $f(x) - g(x) = o(f(x))$ и $f(x) - g(x) = o(g(x))$
при $x \rightarrow x_0$.

Эквивалентные функции

Теорема 2:

Если функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$
при $x \rightarrow x_0$, то

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot h(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot h(x));$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Если существуют пределы левых частей этих равенств, то существуют равные им пределы правых частей.

Эквивалентные бесконечно малые функции

Пусть $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$.

Тогда:

1) $\sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$

2) $\operatorname{tg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$

3) $\arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$

4) $\operatorname{arctg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$

5) $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$

Эквивалентные бесконечно малые функции

Пусть $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$.

Тогда:

$$6) e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

$$7) a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a \text{ при } x \rightarrow x_0$$

$$8) (1 + \alpha(x))^\beta - 1 \sim \beta \cdot \alpha(x) \text{ при } x \rightarrow x_0, \beta \in \mathbf{R}$$

$$9) 1 - \cos(\alpha(x)) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2} \text{ при } x \rightarrow x_0$$

$$10) \ln \cos(\alpha(x)) \sim -\frac{\alpha^2(x)}{2} \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Эквивалентные бесконечно малые функции

Пример 1:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\operatorname{tg}^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos x)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/2}{x^2} = -1/2\end{aligned}$$

Эквивалентные бесконечно малые функции

Пример 2:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} (1 - e^{\sin x})}{\sqrt[4]{1 + 2x^2 - x^3} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2} (-\sin x)}{\frac{1}{4}(2x^2 - x^3)} = \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(2 - x)} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(2 - x)} = -1\end{aligned}$$

Эквивалентные бесконечно малые функции

Пример 3:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos(2x)}{\left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^2} &= \left. \begin{array}{l} y = x - \pi \\ x = y + \pi \\ y \rightarrow 0, x \rightarrow \pi \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2y + 2\pi))}{\left(1 - \frac{\pi}{y + \pi}\right)^2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln \cos(2y)}{\left(\frac{y}{y + \pi}\right)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{(2y)^2}{2}}{\frac{y^2}{(y + \pi)^2}} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4y^2(y + \pi)^2}{2y^2} = \\ &= -2 \lim_{y \rightarrow 0} (y + \pi)^2 = -2\pi^2 \end{aligned}$$

math.mmts-it.org