Математическое и имитационное моделирование

Процесс принятия решения

Выдающиеся ученые

Леонид Витальевич Канторович

Джордж Данциг

Ричард Эрнст Беллман

Василий Васильевич Леонтьев

Джорж фон Нейман

Моделирование

- Моделирование – общенаучный метод исследования, который широко используется не только в естественных, но и в социально-гуманитарных науках.
- **Моделирование** – процесс построения моделей для исследования и изучения объектов, процессов, явлений.

Модель

- **Модель** – аналог оригинала, отражающий его существенные признаки в соответствии с заданной целью моделирования.

Определение модели

- ***Модель*** *— объект или описание объекта, системы для замещения (при определенных условиях, предположениях, гипотезах) одной системы (то есть оригинала) другой системой для лучшего изучения оригинала или воспроизведения каких-либо его свойств, благодаря чему изучение модели позволяет получить новую информацию об «оригинале».*

Требования к моделям:

- **Универсальность** - полнота отображения моделью изучаемых свойств реального объекта, применимость модели к анализу ряда однотипных систем.
- **Адекватность** - способность отражать нужные существенные свойства объекта с погрешностью не выше заданной.

Требования к моделям:

- **Точность** - степень совпадения значений характеристик реального объекта и значения этих характеристик, полученных с помощью моделей.
- **Экономичность** - затраты на реализацию и эксплуатация не должны превышать выгоду от использования модели.

Цели моделирования

- Изучение структуры объектов (явлений) и их свойств и проведение экспериментов;
- Проектирование и управление;
- Анализ альтернатив развития исследуемых объектов и процессов и выбор оптимального решения;
- Исследование возможного поведения изучаемого явления (или класса явлений) по построенной математической модели;
- Прогнозирование поведения объектов.

Моделирование

Проблемам моделирования посвящено огромное число работ, в которых вводятся десятки и сотни определений понятия "модель", классификаций моделей, типов математического моделирования.

Источники

- Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем-М.: Финансы и статистика, 2006.
- Хемди А. Таха Введение в исследование операций. – М.: «Вильямс», 2007.
- Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. – М.: «Финанстатинформ», 2000.
- Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе - М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
- Кремер Н.Ш., Исследование операций в экономике., 2007.

Классификация моделей:

1. ***По способу отображения действительности*** :

- Эвристические
- Натурные (материальные)
- Математические - формализуемые, то есть представляют собой совокупность взаимосвязанных математических и формально-логических выражений, как правило, отображающих реальные процессы и явления.

II. *С учетом фактора времени*:

- ***Статические*** – модели, описывающие состояние системы в определенный момент времени без учета происходящих с ним изменений (единовременный срез информации по данному объекту).
- ***Динамические*** – модели, описывающие процессы изменения и развития системы (изменения объекта во времени).

III. *По области использования*:

- учебные;
- опытные;
- игровые;
- научно-технические;
- имитационные.

IV. *По области знаний*:

- математические;
- химические;
- физические;
- экономические;
- географические и т.д.

V. *По способу реализации*:

- Компьютерные
  - структурно-функциональные, которые представляют собой условный образ объекта, описанный с помощью компьютерных технологий;
  - имитационные, представляющие собой программу или комплекс программ, позволяющий воспроизводить процессы функционирования объекта в разных условиях.
- некомпьютерные

- ***Информационная модель*** – это модель, содержащая целенаправленно отобранную и представленную в некоторой форме наиболее существенную информацию об объекте.

V. По способу представления

Классы моделей

К началу XXI века сформировались 4 класса моделей

- **Аналитические (математические),**
- **Статистические,**
- **Имитационные,**
- **Информационные.**

Классы моделей

	Статистические	Аналитические	Имитационные
Аппарат	Мат. статистика	Математические формулы и функции	Конечно-разностн. уравнения
Характер модели	Индуктивные, статические	Дедуктивные, динамические	Эмпирико-дедуктивные, динамические
Характер взаимосвязей	Стохастические	Детерминирован.	Оба типа
Уровень связей	Сложные связи, много перемен., мало уравнений	Простые связи, мало перемен., мало уравнений	Сложные связи, много перемен., много уравнений
Параметры	Из исходных данных	Из исх. данных либо *a priori*	Из исх. данных либо *a priori*
Верификация	Стат. методами	Стат. методами	Эмпирическая

Аналитический подход к моделированию

Любая модель строится и исследуется при определенных допущениях, гипотезах. Делается это обычно с помощью математических методов.

Результаты получаются путем решения систем уравнений либо аналитически (в общем виде), либо численно (с помощью компьютера).

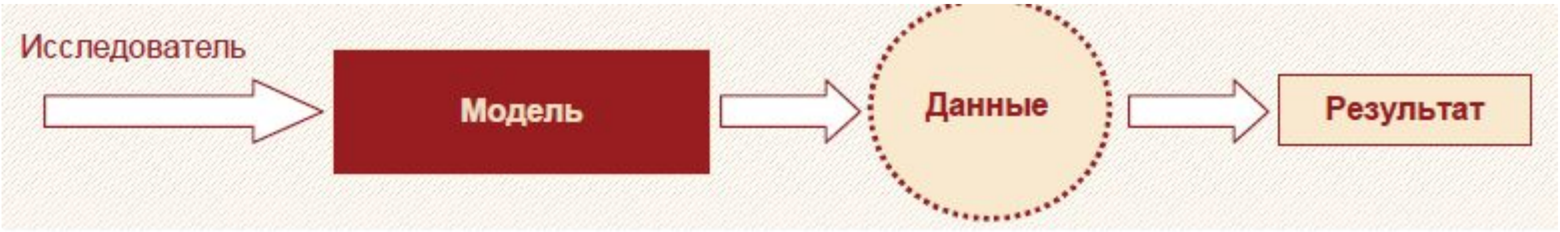
Аналитический подход к моделированию

Любая модель строится и исследуется при определенных допущениях, гипотезах. Делается это обычно с помощью математических методов.

Результаты получаются путем решения систем уравнений либо аналитически (в общем виде), либо численно (с помощью компьютера).

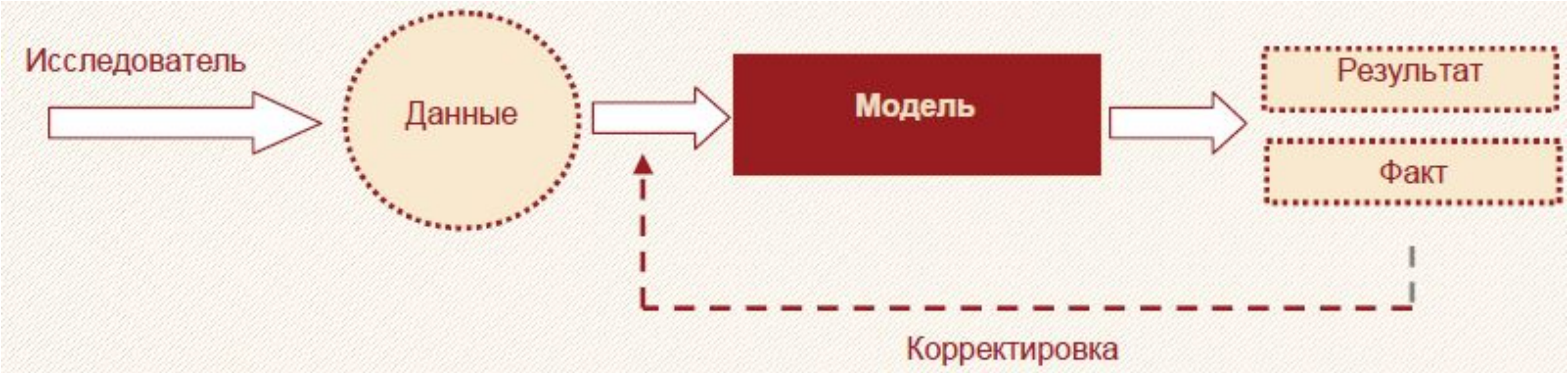
Аналитический подход к моделированию

Движение от модели к результату:



При аналитическом подходе не модель «подстраивается» под действительность, а мы пытаемся подобрать существующую аналитическую модель таким образом, чтобы она адекватно отражала реальность.

Информационный подход к моделированию



При информационном подходе отправной точкой являются данные, характеризующие исследуемый объект, и модель «подстраивается» под действительность.

Цели аналитических моделей

- анализ динамики на основе теоретических предположений о связях между переменными,
- определение некоторого желаемого (максимального или минимального) значения целевой функции путем подбора соответствующих значений входных переменных.

Верификация модели возможна статистическими методами.

Дедуктивный характер модели: модели выводятся из теории.

Аналитические модели

- ***Характер взаимосвязей:*** детерминированный (т.е. не статистический).
- ***Требования к данным***: для верификации и подтверждения надежности модели можно использовать данные разного качества.
- ***Параметры модели*** либо задаются *a priori*, либо выводятся из исходных данных с помощью статистических методов.

Математические модели в экономике

отражают с помощью математических соотношений основные свойства экономических процессов и явлений

ЭТАПЫ:

1. ***Постановка экономической проблемы и ее качественный анализ***
2. ***Формализация модели***
3. ***Идентификация модели***
4. ***Подготовка исходной информации***
5. ***Численное решение***
6. ***Верификация***
7. ***Анализ полученных результатов***

Математические модели в экономике

отражают с помощью математических соотношений основные свойства экономических процессов и явлений

ЭТАПЫ:

1. ***Постановка экономической проблемы и ее качественный анализ***
2. ***Формализация модели***
3. ***Идентификация модели***
4. ***Подготовка исходной информации***
5. ***Численное решение***
6. ***Верификация***
7. ***Анализ полученных результатов***

Аналитические модели

- ***Основные предположения*** для построения модели строятся на упрощенном представлении о переменных и связях между ними.
- ***Ограничения***:
  - малое число уравнений;
  - малое число переменных;
  - обратные связи трудны для исследования;
  - простые формы динамических связей.

Оптимизационные математические модели

Определить x, такое, что при $x \in X$ значение $F(x)$ достигает максимального или минимального значения или коротко:

$$F(x) \rightarrow min\ (max)$$

- x - оптимальное решение (оптимальная стратегия);
- X- допустимое множество (варианты стратегий);
- $F(x)$- критерий оптимизации (целевая функция).

Линейное программирование

- — это математическая дисциплина, посвященная теории и методам решения задач об экстремумах линейных функций на множествах, задаваемых системами линейных неравенств и равенств.

Постановка задачи линейного программирования

Максимизировать (минимизировать) функцию

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1, m_1} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \; i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases}$$

Постановка задачи линейного программирования

- Найти переменные задачи $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые обеспечат экстремум ЦФ
  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и удовлетворяют системе ограничений

Допустимое решение (***план***) задачи ЛП- это вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений условию неотрицательности.

Постановка задачи линейного программирования

Множество допустимых решений задачи образует ***область допустимых решений***

Оптимальным решением (***оптим***. ***планом***) задачи ЛП называется допустимое решение, при котором ЦФ достигает экстремума.

Каноническая форма задачи ЛП

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, n}$$

Построение математической модели задачи ЛП

1 этап – формирование цели

2 этап – определение параметров модели

Параметрами являются все числовые данные, приведенные в условии задачи

3 этап – формирование управляющих переменных, изменяя значение которых можно приближаться к поставленной цели.

4 этап – записать формулами ЦФ и систему ограничений

Пример планирования производства или определение оптимального ассортимента продукции

- Предприятие изготавливает два вида продукции – П1 и П2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья – А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида П1 и вида П2 дан в таблице:

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	П1	П2	
А	2	3	9
В	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию П1 никогда не превышает спроса на продукцию П2 более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию П2 никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны 3 ден. ед. – для П1 и 4 ден. ед. для П2.

Построение матем. модели

1. Цель - максимизация дохода
2. Параметры – расход сырья, запас сырья, оптовые цены продукции, цифры ограничения спроса
3. Управляющие переменные – $x1$ и $x2$ – план выпуска продукции
4. Ограничения: - производство ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию

Методы решения

- Геометрический (графический) метод

Для решения задач с двумя переменными и

задач со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух свободных переменных.

- Симплексный метод

Алгоритм решения

1. Построить прямые, соответствующие ограничениям.
2. Определить области, в которых выполняются ограничения задачи. Для этого выбрать произвольную точку и подставить ее координаты в первую часть одного из неравенств. Если неравенство верно, то искомая полуплоскость находится с той же стороны от прямой, что и точка, в противном случае искомая полуплоскость лежит с противоположной стороны от прямой. Эти действия последовательно выполняются для всех неравенств (ограничений).
3. Определить многоугольник решений, как область пересечения m полуплоскостей, соответствующих m ограничениям задачи.

Алгоритм решения

4. Определить направление возрастания (убывания) целевой функции:

   построить вектор-нормаль . Его направление показывает направление возрастание функции, в противоположном направлении функция убывает.

5. Определяют граничную точку или точки области допустимых решений, в которых целевая функция принимает максимальное или минимальное значение

6. Вычисляют значение найденной точки, решая совместно уравнения, задающие прямые, на пересечении которых находится эта точка, или выявляя уравнение граничной прямой области допустимых решений, с которой совпадает линия уровня целевой функции.

Решение примера

$$2x_1 + 3x_2 = 9 \quad (L_1)$$
$$3x_1 + 2x_2 = 13 \quad (L_2)$$
$$x_1 - x_2 = 1 \quad (L_3)$$
$$x_2 = 2 \quad (L_4)$$
$$x_1 = 0 \quad (L_5)$$
$$x_2 = 0 \quad (L_6)$$

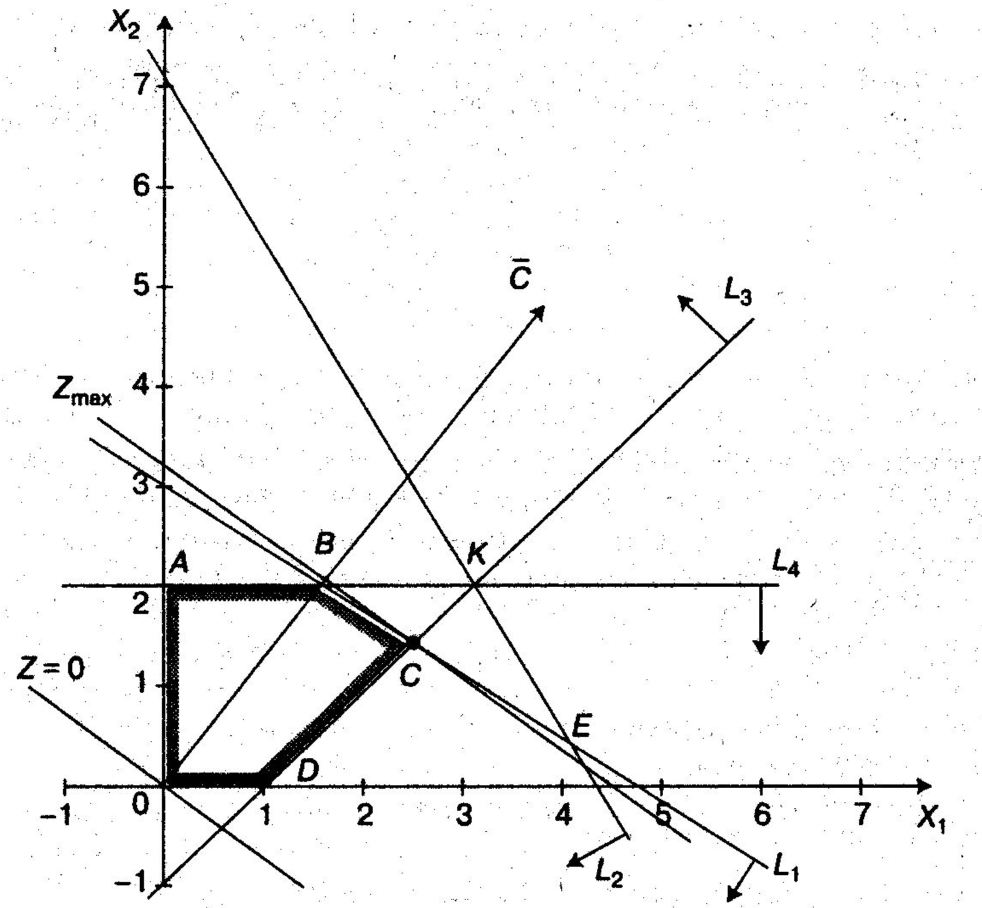


Рис. 7.5. Решение задачи линейного программирования геометрическим способом

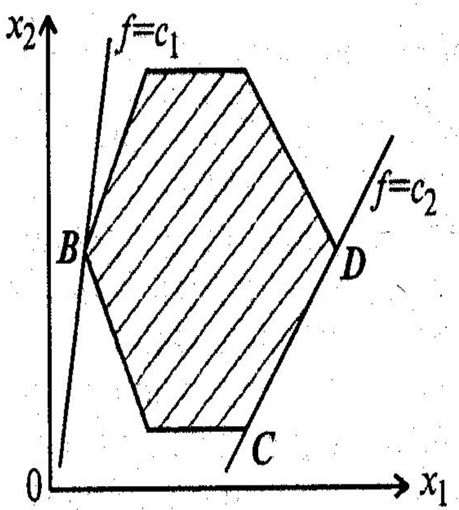


Рис. 2.3.2
Область допустимых решений — замкнутое множество (многоугольник)

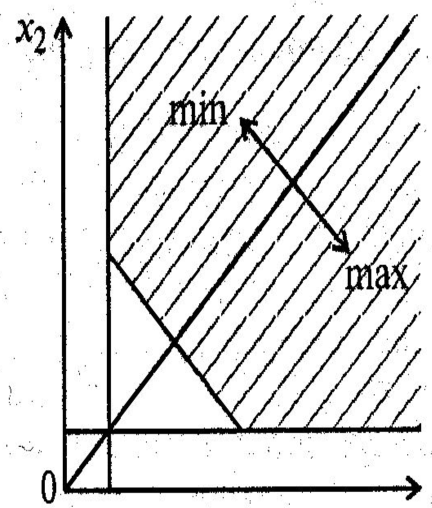


Рис. 2.3.3
Область допустимых решений — открытое множество

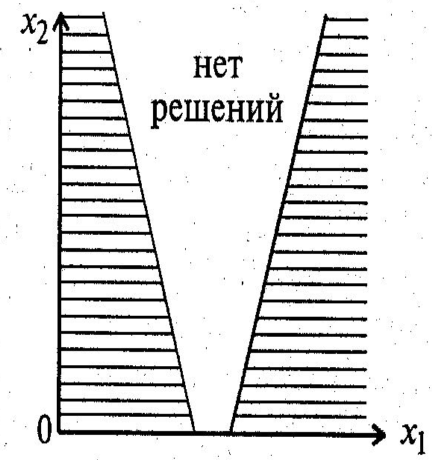


Рис. 2.3.4
Область допустимых решений — пустое множество (система ограничений (2.3.2) несовместна)

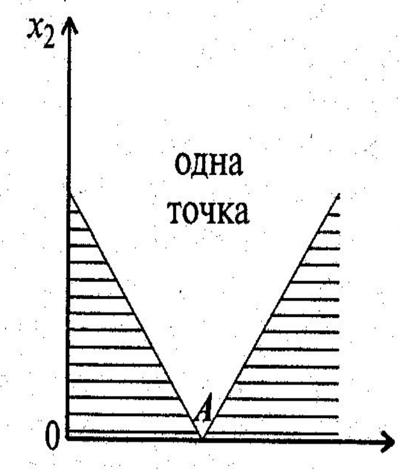


Рис. 2.3.5
Область допустимых решений состоит из единственной точки A

Имитационное моделирование

Примеры

Имитационное моделирование

- численный метод проведения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов и систем во времени в течение заданного периода, в результате чего можно получить нужную информацию об объектах окружающего мира, не обращаясь непосредственно к этим объектам, явлениям и процессам.

Имитационная модель

- это компьютерная программа, позволяющая воспроизводить на ЭВМ поведение отдельных элементов системы и связей между ними в течение заданного времени моделирования.

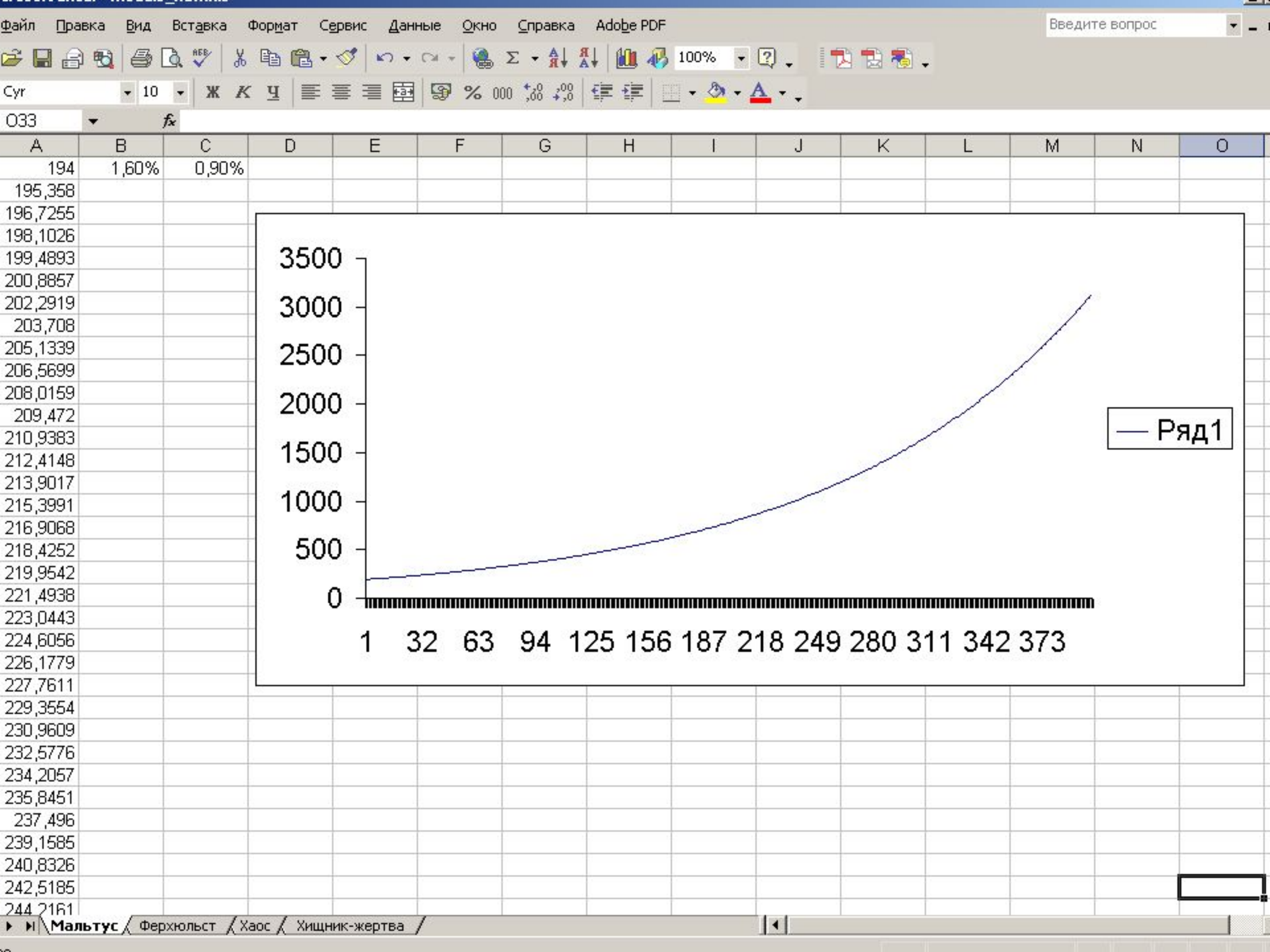
Имитационные (вычислительные) эксперименты - это эксперименты с ИМ.

Модели динамики народонаселения

- ***модели роста численности популяции***. Простейшая модель такого рода (закон экспоненциального роста) была использована в XIX веке Т. Мальтусом.
- **Недостаток:** модель не учитывала, что общий объем жизненных ресурсов накладывает естественные ограничения на динамику развития процесса.

Модель Мальтуса

- Конечно-разностное уравнение динамики численности населения:
  $$N_{i+1}=N_i + rN_i - mN_i$$
  или
  $$N_{i+1}=N_i + (r - m)N_i$$
  где разность ($r - m$) – коэффициент прироста.
- Если этот коэффициент больше нуля (рождаемость выше смертности), население растет, если меньше нуля – убывает.



Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка Adobe PDF
Введите вопрос
Cyr 10
100%
O33
A B C D E F G H I J K L M N O
194 1,60% 0,90%
195,358
196,7255
198,1026
199,4893
200,8857
202,2919
203,708
205,1339
206,5699
208,0159
209,472
210,9383
212,4148
213,9017
215,3991
216,9068
218,4252
219,9542
221,4938
223,0443
224,6056
226,1779
227,7611
229,3554
230,9609
232,5776
234,2057
235,8451
237,496
239,1585
240,8326
242,5185
244,2161
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
1 32 63 94 125 156 187 218 249 280 311 342 373
Ряд1
Мальтус
Ферхюльст
Хаос
Хищник-жертва

Модель Мальтуса

- Описывает неограниченный, экспоненциальный рост человечества.
- В результате был получен весьма неблагоприятный прогноз, связанный с невозможностью обеспечить жизненными ресурсами неограниченно растущее население.

Модель роста народонаселения

- Однако, экспоненциальный рост не может продолжаться долго. Естественные ограничения на него накладывает внешняя среда, ресурсы которой не безграничны.
- В простейшем случае можно предположить, что коэффициент прироста не является постоянным, а убывает с течением времени, по мере роста населения.

Логистическая модель роста народонаселения

- ***Логистическая модель*** роста народонаселения была предложена П. Ферхюльстом

  (в этой модели предполагается, что прирост численности в каждый момент прямо пропорционален достигнутой численности и обратно пропорционален ее квадрату).

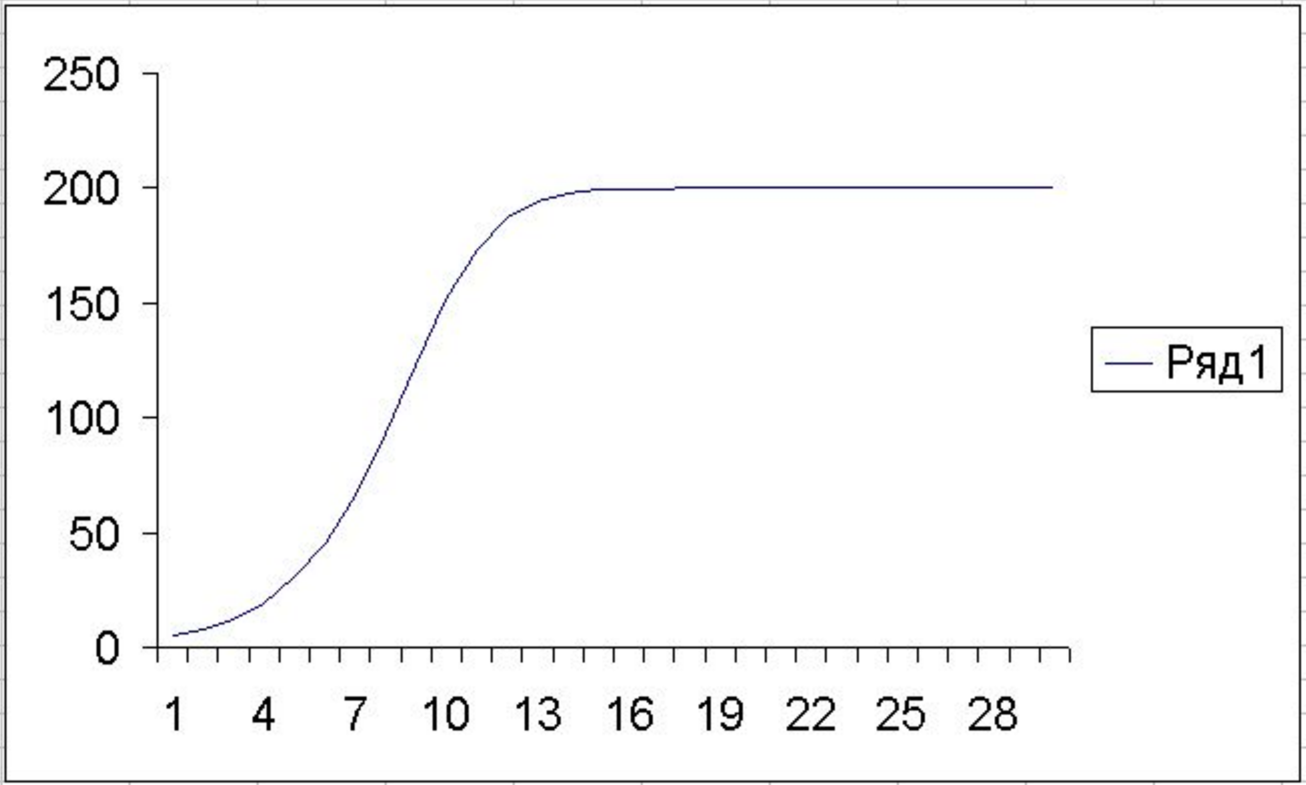
Модель Ферхюльста

- Конечно-разностное уравнение динамики численности населения:

$$N_{i+1} = N_i + rN_i - mN_i - bN_i^2$$

- Решение этого уравнения приводит к тому, что численность населения не растет неограниченно, а стремится к некоторой предельной величине.

A	B	C	D
5	1,60%	1,30%	200
7,925			
12,49158			
19,51841			
30,08656			
45,42289			
66,48691			
93,11752			
122,9754			
151,3918			
173,4685			
187,2756			
194,4245			
197,6765			
199,0544			
199,6191			
199,8472			
199,9388			
199,9755			
199,9902			
199,9961			
199,9984			
199,9994			
199,9997			
199,9999			
200			
200			
200			
200			
200			



Мальтус | Ферхюльст | Хаос | Хищник-жертва

Модель Ферхюльста

- График этого уравнения называется логистической кривой.
- Таким образом, система в данном случае имеет устойчивое (стационарное) состояние; этому состоянию соответствует прирост населения, равный нулю (рождаемость уравновешивается смертностью).

Модель Ферхюльста

- Таким образом, система в данном случае имеет устойчивое (стационарное) состояние; этому состоянию соответствует прирост населения, равный нулю (рождаемость уравновешивается смертностью).

Примеры применения моделей в истории

- Другими примерами математического моделирования для изучения сложных социальных систем могут служить:
  - применение модели клеточных автоматов (для изучения электорального поведения);
  - теоретико-игровые модели (для изучения конфликтов, например, Карибского кризиса 1962 г.) и др.

Примеры применения моделей в истории

- Важно, что модели позволяют не только углубить понимание сложных, развивающихся систем, но и прогнозировать их развитие, например:
  - модель Форрестера, имитирующая развитие американской экономики и демонстрирующая наличие коротких и длинных циклов (развитие этой модели касалось уже глобальных процессов);
  - модель Н. Моисеева для анализа последствий ядерной войны (эффект "ядерной зимы").

Примеры моделей

- Если динамических переменных больше одной, тогда и уравнений (дифференциальных или разностных) должно быть несколько, т.е. это система уравнений.
- В качестве примера системы двух уравнений укажем известную модель Лотки-Вольтерра (в биологии известна как модель "хищник-жертва", в политологии – как модель "народ-правительство", в истории – как модель "бароны и крестьяне").

Примеры моделей

- Большую известность приобрели работы немецкого ученого В. Вайдлиха. Он разработал систему моделей изучения динамики социально-экономических и политических факторов (производство и потребление товаров, инвестиции и т.п.)

Примеры моделей

- Модель Лотки-Вольтерра была использована В.Вайдлихом для изучения отношений между "народом" и "правительством" (или, например, парламентом и правительством). Одной переменной в этой модели является степень силы правительства, а другой переменной – степень политического влияния народа (парламента).