

Тема 1

Основы электростатики



Лекция 3

Теорема Гаусса для диэлектриков

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{\sum q_k}{\epsilon_0 \epsilon}$$

$$\oint_S D_n dS = \sum q_k$$

$$\operatorname{div} D = \rho$$

Энергия поля

Есть три возможности посчитать энергию электростатического поля:

- С помощью интегрирования электростатического поля по пространству:

$$w_{y\partial} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$$

$$w_{y\partial} = \frac{ED}{2}$$

- С помощью вычисления потенциалов и суммирования по всем зарядам:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i$$

- Специальный случай, когда известна емкость системы или систему можно считать конденсатором:

$$W = \frac{q^2}{2C}$$

Задача

Чему равна энергия электростатического поля заряженной сферы?
(Q – заряд, R - радиус)

$$W = \int \frac{ED}{2} dV = \int_R^{\infty} \frac{ED}{2} 4\pi r^2 dr$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Q}{R} \quad D = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R}$$

$$W = \int \frac{ED}{2} dV = \frac{1}{2} \int_R^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0\epsilon} \frac{Q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Q^2}{R}$$

Задача (второй метод)

Чему равна энергия электростатического поля заряженной сферы?
(Q – заряд, R - радиус)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i = \frac{U}{2} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{U}{2} Q$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Q}{R}$$

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 R}$$

Задача (третий метод)

Чему равна энергия электростатического поля заряженной сферы?
(Q – заряд, R - радиус)

$$C_{\text{шар.}} = 4 \pi \epsilon \epsilon_0 R$$

$$W_c = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W_c = \frac{Q^2}{2C_{\text{шар}}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 R}$$

Притяжение пластин конденсатора

Силу их притяжения называют пондермоторной.

При незначительном перемещении одной пластины в поле другой совершается работа:

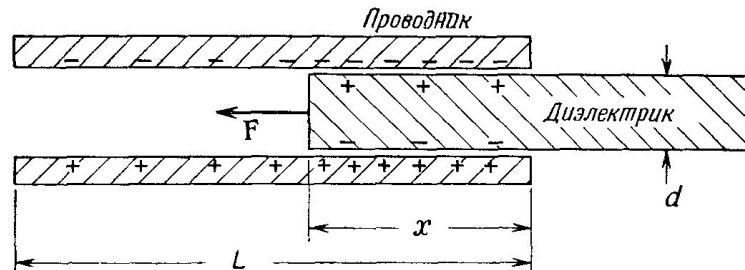
$$dA = -dW = Fdx, F = -\frac{dW}{dx}$$

отсюда можно получить формулу для расчета пондермоторной силы

$$F = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

$$dW = d\frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 dx}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Диэлектрик втягивается в конденсатор



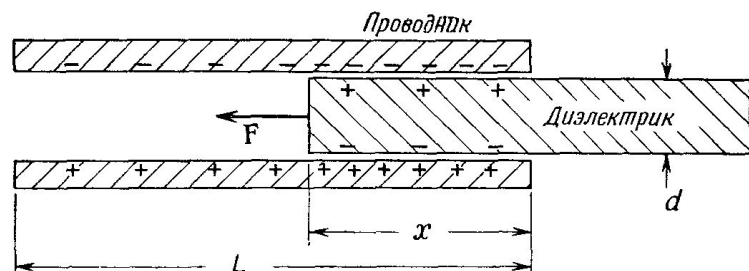
С какой силой втягивается диэлектрическая пластинка в пространство между обкладками прямоугольного плоского конденсатора?

$$F = -\frac{dW}{dx} \quad F = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right) \quad C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S(x/L)}{d} + \frac{\epsilon_0 S(1-x/L)}{d}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \left[(\epsilon - 1) \frac{x}{L} + 1 \right]$$

$$F = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S L} \frac{\epsilon - 1}{\left[(\epsilon - 1) \frac{x}{L} + 1 \right]^2}$$

Вопросы



$$F = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 SL} \frac{\epsilon - 1}{\left[(\epsilon - 1) \frac{x}{L} + 1 \right]^2}$$

- Изменится ли сила, если конденсатор будет подключен к батарее?
- Как будет выглядеть закон сохранения энергии при наличии батареи?
- Какие силы вызывают втягивание диэлектрика в конденсатор? И как они направлены?

Где работает диэлектрик ?

Почему в нем ослабеваает поле?

Поляризация диэлектриков

- Все известные в природе вещества, в соответствии с их способностью проводить электрический ток, делятся на *три основных класса*:

- *диэлектрики* $\sigma_{\text{д}} = 10^{-18} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$

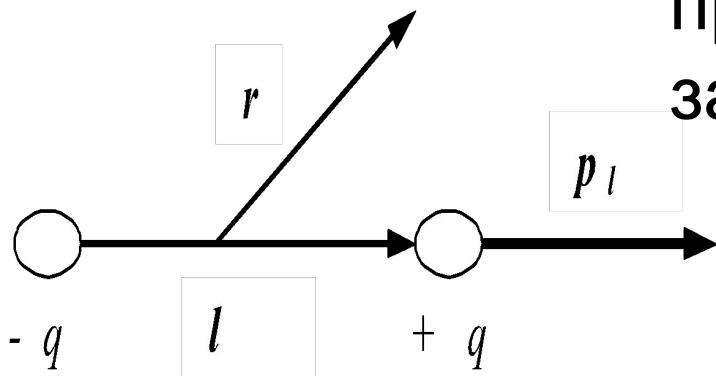
- *полупроводники* $\sigma_{\text{д}} < \sigma_{\text{п/п}} < \sigma_{\text{пр}}$.

- *проводники* $\sigma_{\text{пр}} = 10^8 \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$

Поле электрического диполя

- Электрический диполь - система двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до тех точек, в которых определяется поле.
- Ось диполя прямая, проходящая через оба заряда.

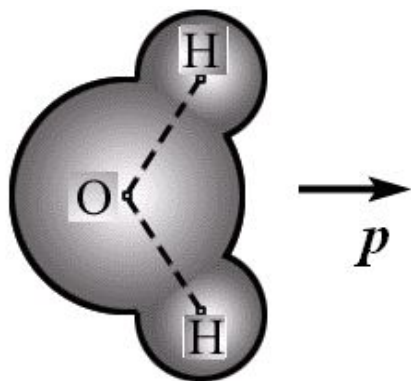
l – плечо диполя – вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному.



Дипольный момент:

$$\vec{p}_l = q\vec{l}$$

Поле электрического диполя

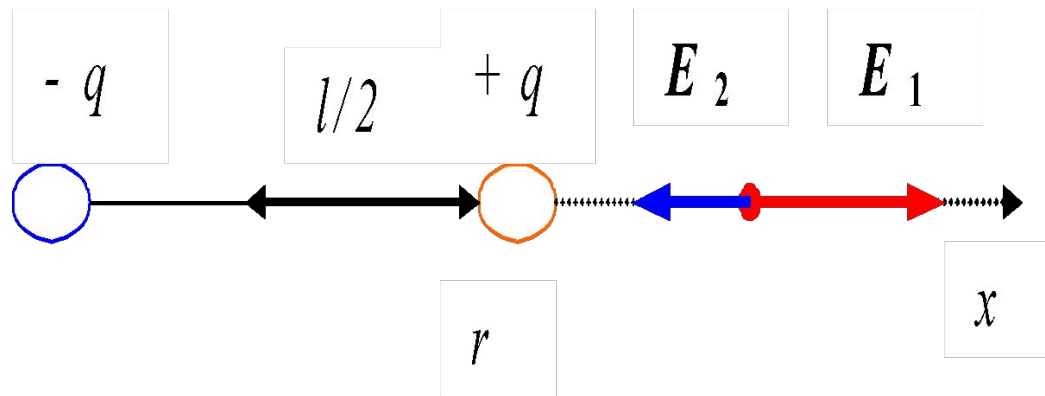


$r \gg l \rightarrow$ Диполь можно рассматривать как систему 2-х точечных зарядов.

Молекула воды H_2O обладает дипольным моментом $p = 6,3 \cdot 10^{-30}$ Кл·м.

Вектор дипольного момента направлен от центра иона кислорода O^{2-} к середине прямой, соединяющей центры ионов водорода H^+ .

Напряженность поля в точке, расположенной на оси диполя.



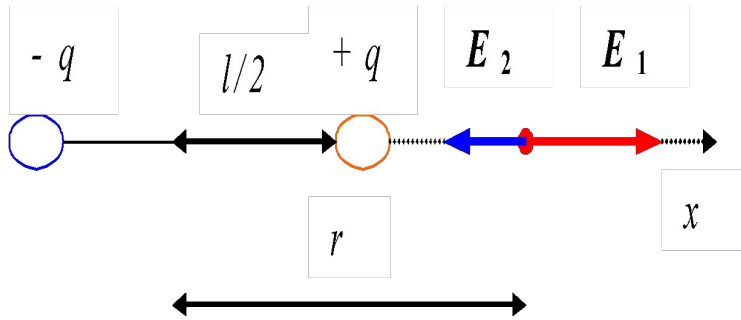
E_1 – напряженность поля положительного заряда.

E_2 – напряженность поля отрицательного заряда.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

В проекциях на ось x : $E = E_1 - E_2$

Напряженность поля в точке, расположенной на оси диполя



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{l}{2}\right)^2}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \cdot \left(r + \frac{l}{2}\right)^2}$$

$r \gg l \Rightarrow \left(r - \frac{l}{2}\right) \approx r, \quad \left(r + \frac{l}{2}\right) \approx r.$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rl}{r^4} = \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$



$$E = \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

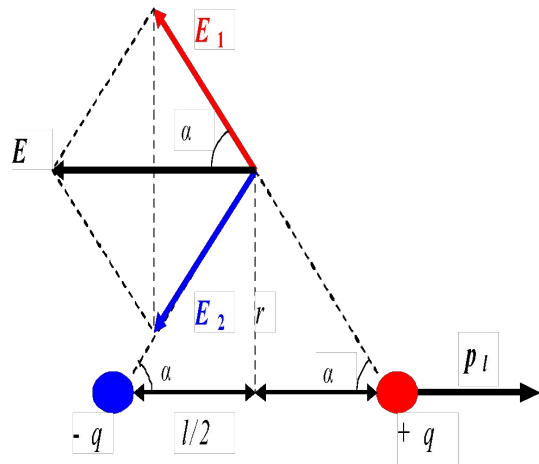
Напряженность поля диполя в точке, лежащей на перпендикуляре, восстановленном к его середине

$$E = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)} \cdot \frac{l}{2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$r \gg l \Rightarrow \frac{l^2}{4} \approx 0$$

$$\vec{E} \uparrow \downarrow \vec{p}_l$$

$$\vec{p}_l = ql$$



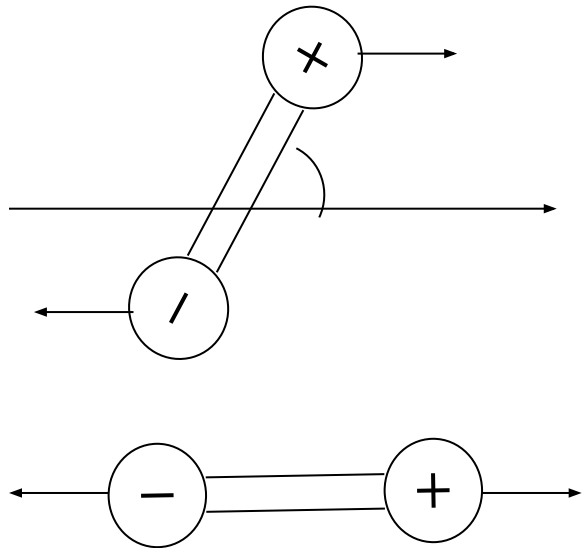
$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}_l}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Выводы

$$E \propto \frac{|p_l|}{\epsilon_0 r^3}.$$

Поле диполя убывает быстрее в зависимости от расстояния по сравнению с полем точечного заряда.

Диполь в однородном электрическом поле



$$F = E \cdot q$$

$$M = F \cdot l \cdot \sin \alpha = Eq l \sin \alpha$$

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l}$$

$$M = \vec{E} \cdot \vec{p} \cdot \sin \alpha = \left[\vec{E} \cdot \vec{p} \right]$$

$$M = pE \sin \alpha$$

$$\alpha = 0 \quad M = 0$$

Диполь в неоднородном электрическом поле

$$W = q(\varphi_+ - \varphi_-) \quad (\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{d\varphi}{dx} \cdot l$$

$$W = q \cdot l \cdot \frac{d\varphi}{dx} \quad W = -p \cdot E$$

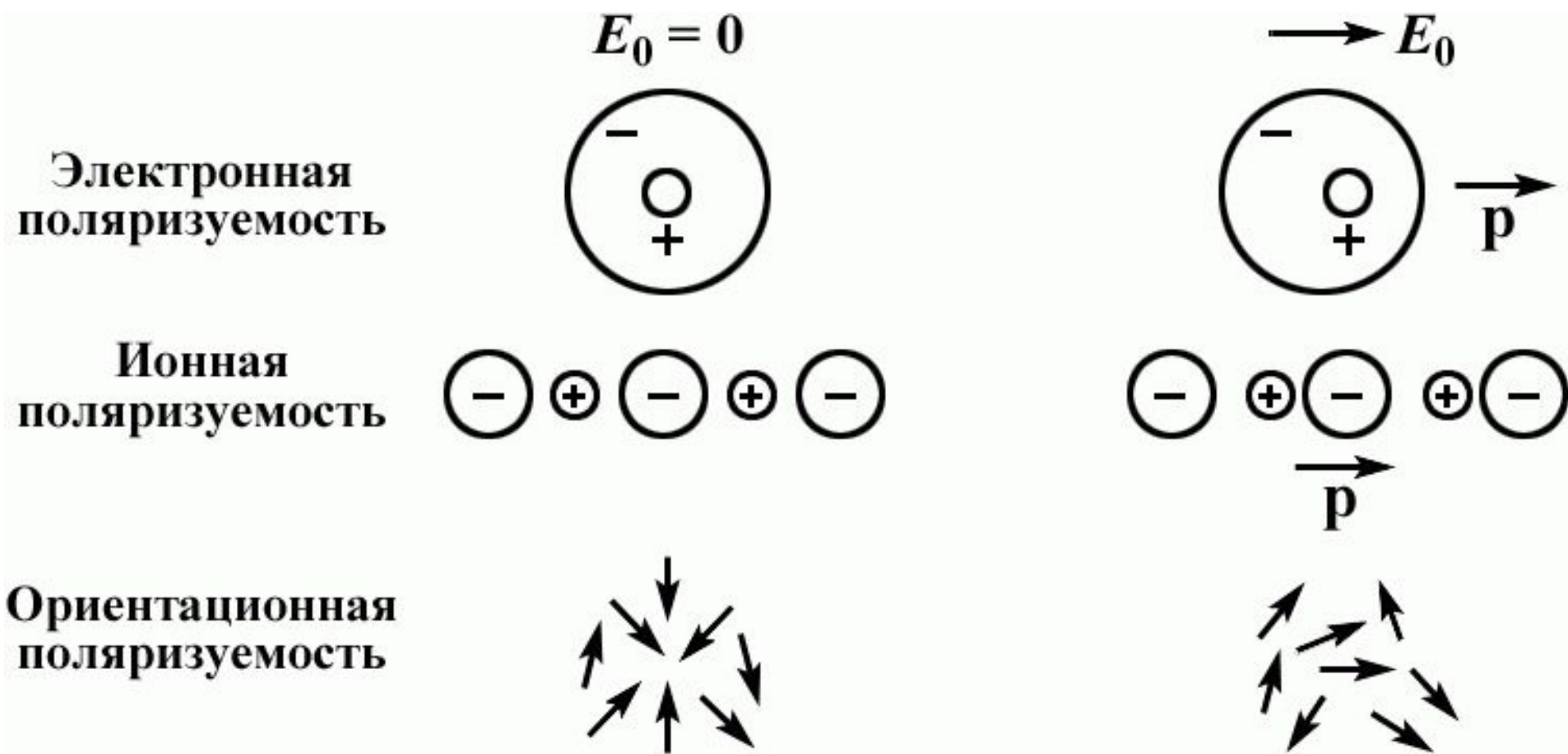
$$F_x = -\frac{dW}{dx} = p \cdot \frac{dE}{dx}$$

Вопросы

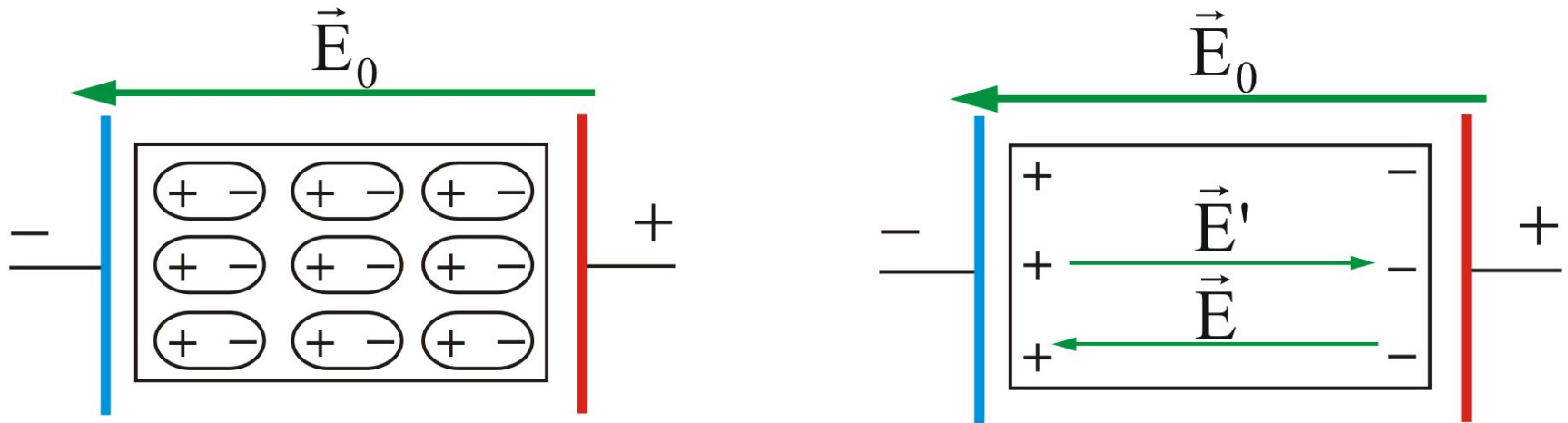
- Как будет вести себя диполь в поле плоского конденсатора?
- В поле цилиндрического конденсатора?
- В поле сферического конденсатора?

- В идеальном диэлектрике свободных зарядов нет способных перемещаться на значительные расстояния.
- Однако, это не значит, что идеальный диэлектрик, помещенный в электростатическое поле, не реагирует на него.
- Смещение электрических зарядов вещества под действием электрического поля называется **поляризацией**.
- Способность к поляризации является основным свойством диэлектриков с точки зрения электростатики.

Поляризуемость диэлектрика

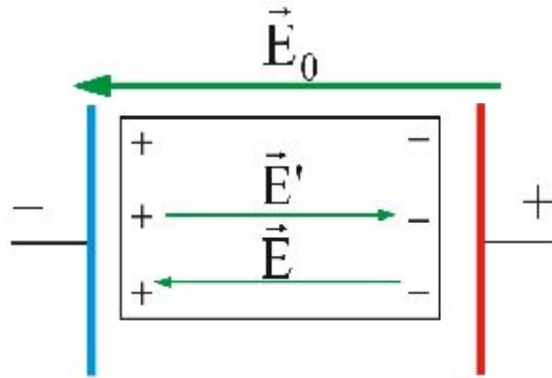


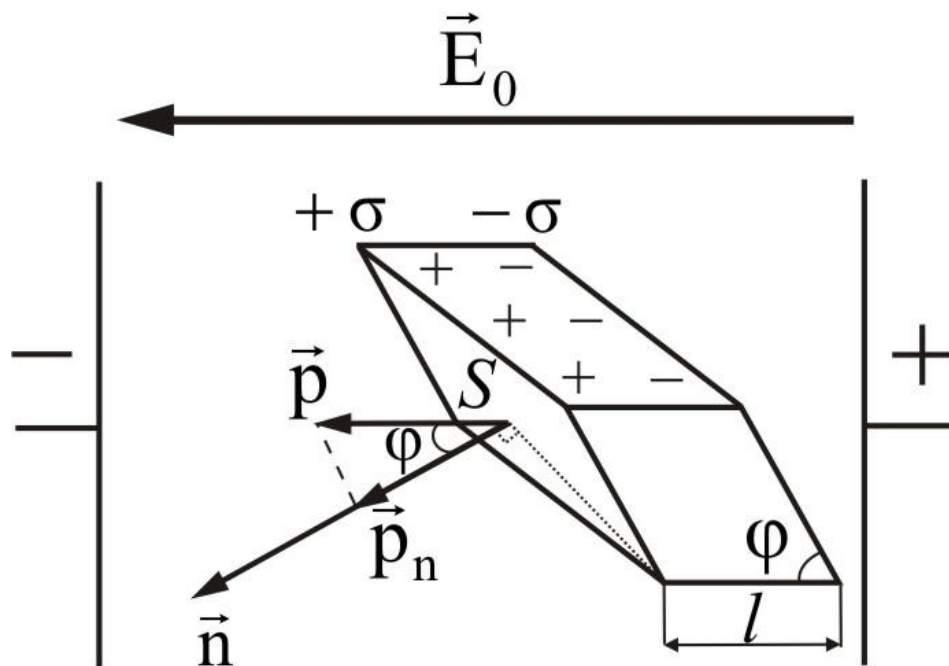
- Внутри диэлектрика электрические заряды диполей компенсируют друг друга.
- Но на внешних поверхностях диэлектрика, прилегающих к электродам, появляются заряды противоположного знака (поверхностно связанные заряды).



- Пусть E' – электростатическое поле связанных зарядов. Оно направлено всегда против внешнего поля E_0
- Следовательно, результирующее электростатическое поле внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E'$$





Поместим диэлектрик в виде параллелепипеда
электростатическое поле \vec{E}_0

Электрический момент тела, можно найти по
формуле:

$$P = ql = \sigma' S l, \text{ или } P = \sigma' S l \cos \varphi,$$

σ' – поверхностная плотность связанных зарядов

- вектор поляризации – дипольный момент единичного объема.

$$\underline{\mathbf{P}} = \sum_k^n \mathbf{P}_{1k} = n\mathbf{P}_1,$$

- где n – концентрация молекул в единице объема,
- \mathbf{P}_1 – дипольный момент одной молекулы.

$$\sigma' = \underline{P}_n$$

- Поверхностная плотность поляризационных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации в данной точке поверхности.
- Индуцированное в диэлектрике электростатическое поле E' будет влиять только на нормальную составляющую вектора напряженности электростатического поля \underline{E} .

- Вектор поляризации можно представить так:
- $$\underline{\underline{P}} = n \underline{\underline{P}}_1 = n \alpha \varepsilon_0 \underline{\underline{E}} = \chi \varepsilon_0 \underline{\underline{E}},$$
- где α – поляризуемость молекул,
- $\chi = n \alpha$ – диэлектрическая восприимчивость
– макроскопическая безразмерная
величина, характеризующая поляризацию
единицы объема.

- Величина $\epsilon = 1 + \chi$ характеризует электрические свойства диэлектрика.

- Физический смысл диэлектрической проницаемости среды:

ϵ – величина, показывающая во сколько раз электростатическое поле внутри диэлектрика меньше, чем в вакууме:

-

$$\epsilon = \frac{E_0}{E}.$$

Вопросы

- Как будет вести себя диэлектрический шарик в поле плоского конденсатора?
- В поле цилиндрического конденсатора?
- В поле сферического конденсатора?