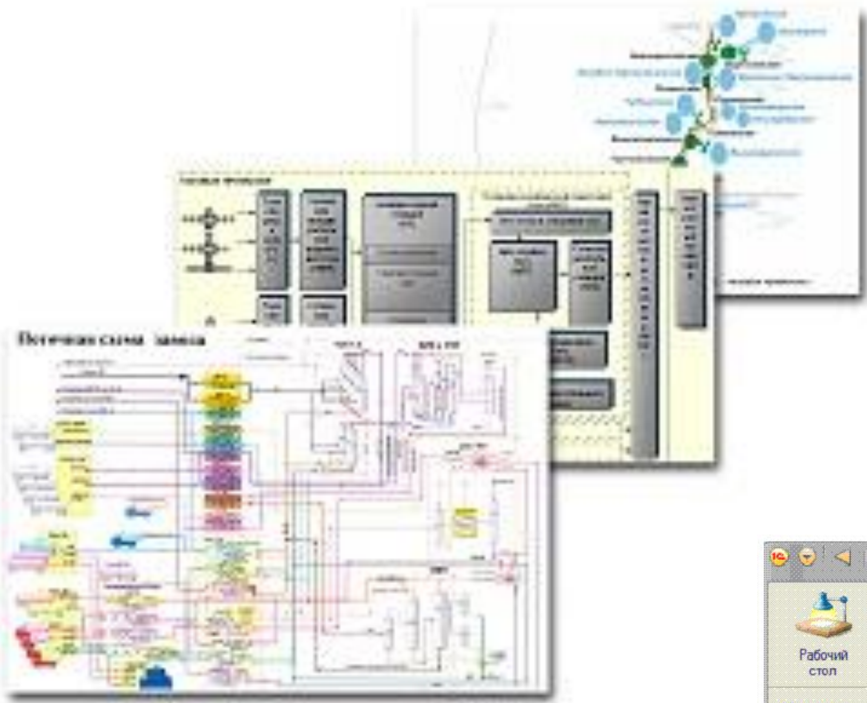
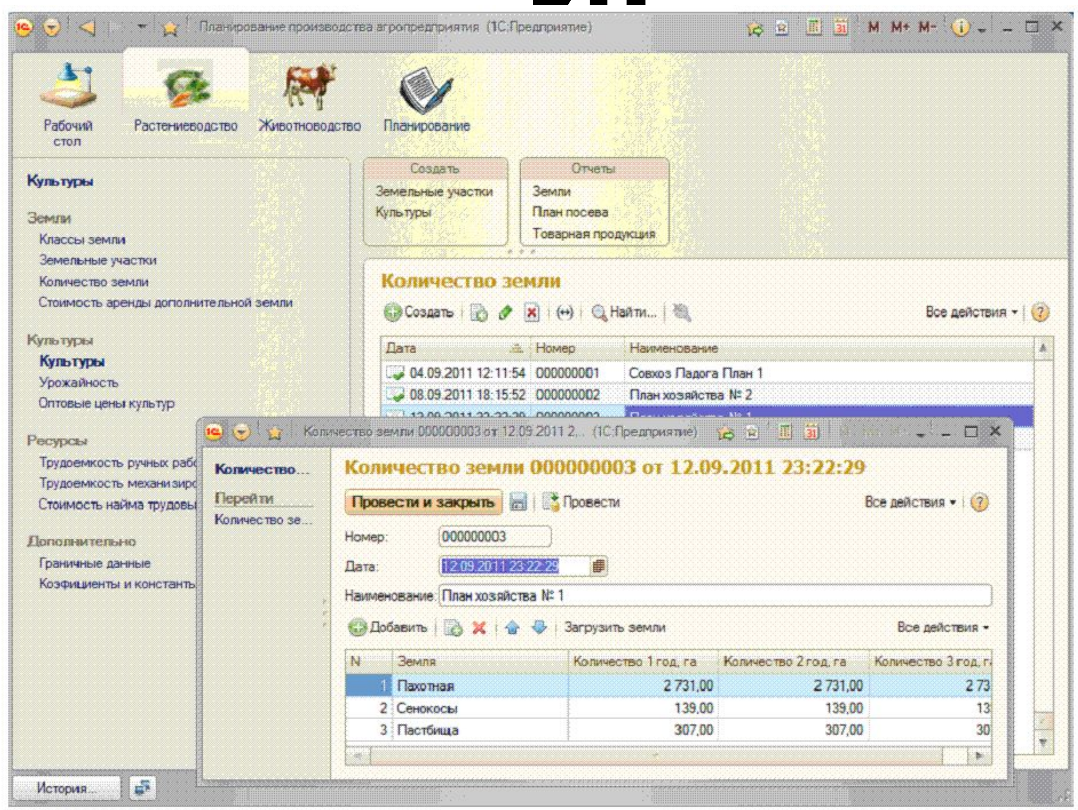
ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ





Оптимальное планирование – это система методов обоснования наилучшего с точки зрения поставленной цели и объективных условий плана развития народного хозяйства, отраслей и отдельных предприятий.

Оптимальное планирование строится на основе экономико-математических моделей объектов всех уровней, алгоритмов и машинных программ, методов анализа и оценок результатов.

При оптимальном планировании строится экономико-математическая модель, которая включает систему ограничений, задающих множество возможных вариантов плана и целевую функцию, с помощью которой один из вариантов признается оптимальным.

Составление оптимального плана включает в себя:

1) постановку задачи;

2) разработку модели, алгоритма и программ для расчета на ЭВМ;

3) проведение расчетов;

4) анализ результатов.

История развития методов линейного программирования

1938 г. Л. В. Канторович и его ученики - метод разрешающих множителей.
1949 г. Л. В. Канторович совместно с М. К. Гавуриным - метод потенциалов.
В. С. Немчинов, В. В. Новожилов, А. Л. Лурье, Г. Ш. Рубинштейн, Ц. Б. Юдин, Ю. Г. Гольштейн, А. Г. Аганбегян и многие другие ученые математики и экономисты развивали как математическую теорию линейного и нелинейного программирования, так и приложение ее методов к исследованию различных экономических проблем.

1949 г. Дж. Данциг - постановка транспортной задачи.
Форд, Фулкерсон, Кун, Лемке, Гасс и другие исследователи - приспособления к расчету на ПВМ, создание более удобных алгоритмов.

Формализация задачи планирования

Постановка задачи планирования выглядит следующим образом:

- имеются некоторые плановые показатели: *x, y* и другие;
- имеются некоторые ресурсы: *R1, R2* и другие, за счет которых эти плановые показатели могут быть достигнуты. Эти ресурсы практически всегда ограничены;
- имеется определенная стратегическая цель, зависящая от значений *x, y* и других плановых показателей, на которую следует ориентировать планирование.

Нужно определить значение плановых показателей с учетом ограниченности ресурсов при условии достижения стратегической цели. Это и будет оптимальным планом.

Пример формализации

Заводской цех изготавливает необрезную и обрезную доску. В силу ограниченности емкости склада за день можно изготовить в совокупности не более 700 куб.м изделий.

Рабочий день в цеху длится 8 часов.

Если выпускать только обрезную доску, за день можно произвести не более 250 куб.м, необрезной доски же можно произвести 1000 куб.м, если при этом не выпускать обрезную.

Стоимость обрезной доски вдвое выше, чем необрезной.

Требуется составить дневной план производства, обеспечивающий цеху наибольшую выручку.

Плановыми показателями являются:
x – дневной план выпуска необрезной доски;
y – дневной план выпуска обрезной доски.

Ресурсы производства:
длительность рабочего дня – 8 часов;
вместимость складского помещения – 700 мест.

Предполагается для простоты, что другие ресурсы (сырье, электроэнергия и пр.) неограничены.

Из условия задачи следует, что на изготовление 1 куб.м обрезной доски затрачивается в 4 раза больше времени, чем на изготовление необрезной доски.

Если обозначить время изготовления 1 куб.м необрезной доски – *t* мин, то время изготовления 1 куб.м обрезной доски будет равно *4t* мин.

Значит, суммарное время на изготовление *x* куб.м необрезной доски и *y* куб.м обрезной доски равно

$$tx + 4ty = (x + 4y)t.$$

Но это время не может быть больше длительности рабочего дня. Отсюда следует неравенство:

$$(x + 4y)t \leqslant 8 \cdot 60,$$

Или

$$(x + 4y)t \leqslant 480.$$

Легко вычислить t – время изготовления 1 куб.м необрезной доски.
Поскольку за рабочий день их может быть изготовлено 1000 куб. м, то на один куб.м необрезной доски затрачивается 480/1000 = 0,48 мин.
Подставляя это значение в неравенство, получим:

$$(x + 4y) \cdot 0{,}48 \leqslant 480.$$

Отсюда: $$x + 4y \leqslant 1000.$$

Ограничение на общее число изделий дает совершенно очевидное неравенство:

$$x + y \leqslant 700.$$

К двум полученным неравенствам следует добавить условия положительности значений величин x и y (не может быть отрицательного числа куб.м необрезной и обрезной доски).

В итоге получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x + 4y \leqslant 1000; \\ x + y \leqslant 700; \\ x \geqslant 0; \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Перейдем к формализации стратегической цели: получению максимальной выручки.

Выручка – это стоимость всей проданной продукции. Пусть цена 1 куб.м необрезной доски – r рублей.

По условию задачи, цена 1 куб.м обрезной доски в два раза больше, то есть 2r рублей.

Отсюда стоимость всей произведенной за день продукции равна

$$rx + 2ry = r(x + 2y).$$

Будем рассматривать записанное выражение как функцию от *x*, *y*:

$$f(x,y) = r(x + 2y).$$

Она называется

Поскольку значение r – константа, то максимальное значение *f (x,y)* будет достигнуто при максимальной величине выражения *(x + 2y)*. Поэтому, в качестве целевой функции можно принять

(5)

$$f(x,y) = x + 2y.$$

Система написанных выше неравенств представляется на координатной плоскости четырехугольником, ограниченным четырьмя прямыми, соответствующими линейным уравнениям

$$x + 4y = 1000;$$

$$x + y = 700;$$

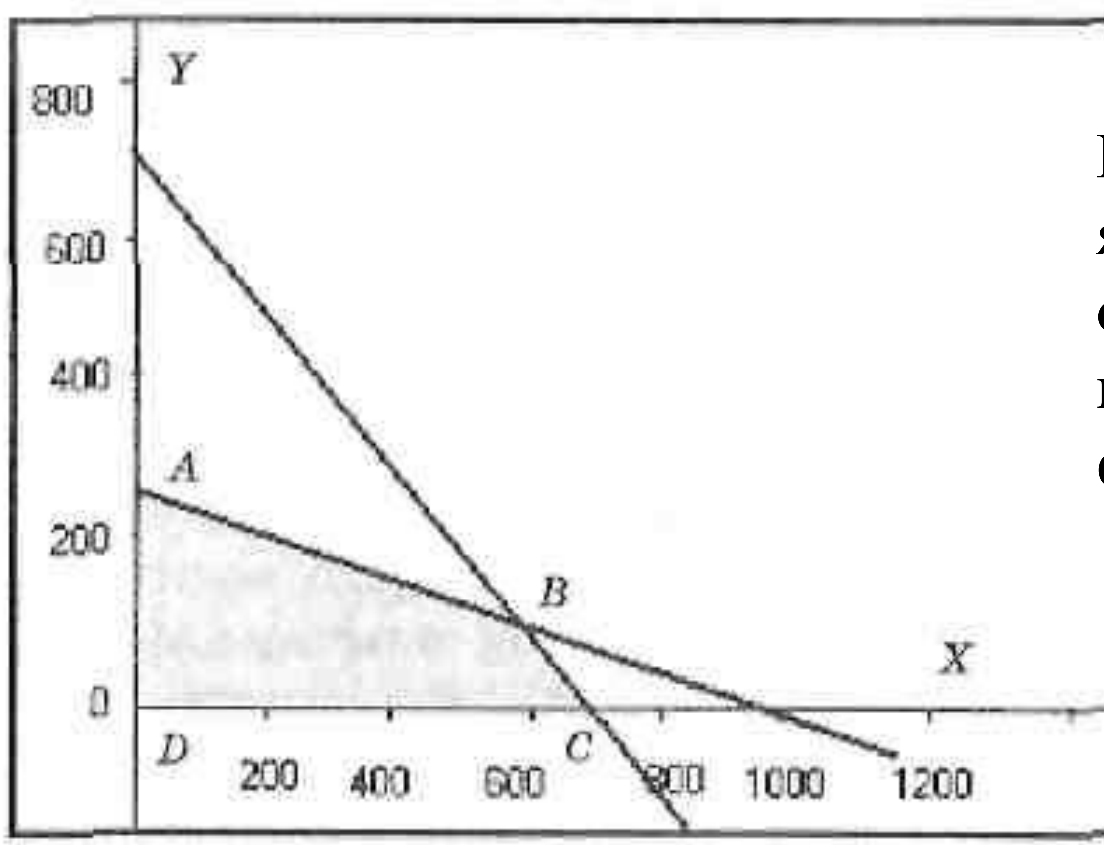
$$x = 0 \quad (\text{ось } OY);$$

$$y = 0 \quad (\text{ось } OX).$$

На рисунке эта область представляет собой четырехугольник *ABCD* и выделена заливкой.

Любая точка четырехугольника является решением системы неравенств (а).

Например, такой точкой является точка с координатами $x = 200$, $y = 100$. Ей соответствует значение целевой функции f (200,100) = 400. А точке $x = 600$, y = 50 соответствует f (600,50) = 700.



Но искомым решением является та точка области *ABCD,* в которой целевая функция максимальна.

Область поиска оптимального плана

Использование *MS Excel* для решения задачи оптимального планирования

	A	B	C	D
1	**Оптимальное планирование**			
2				
3	**Плановые показатели**			
4		X (необрезная	Y (обрезная)	
5				
6				
7	**Ограничения**			
8				
9		*Левая часть*	*Знак*	*Правая часть*
10	*Время производства:*	=B5+4*C5	<=	1000
11	*Общее количество:*	=B5+C5	<=	700
12	*Положительность X:*	=B5	>=	0
13	*Положительность Y:*	=C5	>=	0
14				
15	**Целевая функция**	=B5+2*C5		
16				

Ячейки B5 и C5 зарезервированы соответственно для значений:
x (план по изготовлению необрезной доски);
y (план по изготовлению обрезной доски).

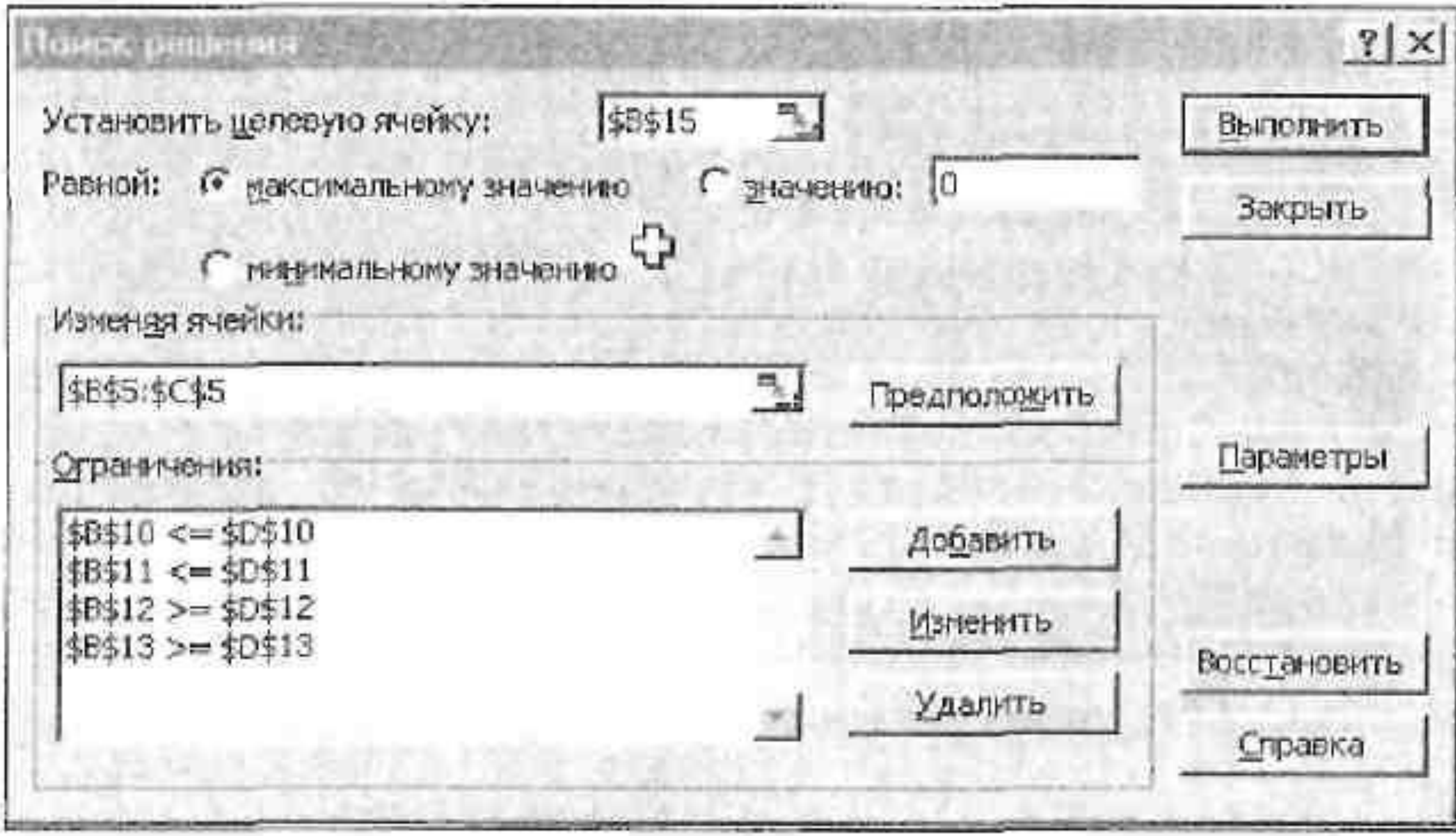
Ниже этих ячеек представлена система неравенств (а), определяющая ограничения на искомые решения.

Неравенства разделены на левую часть (столбец B) и правую часть (столбец D).

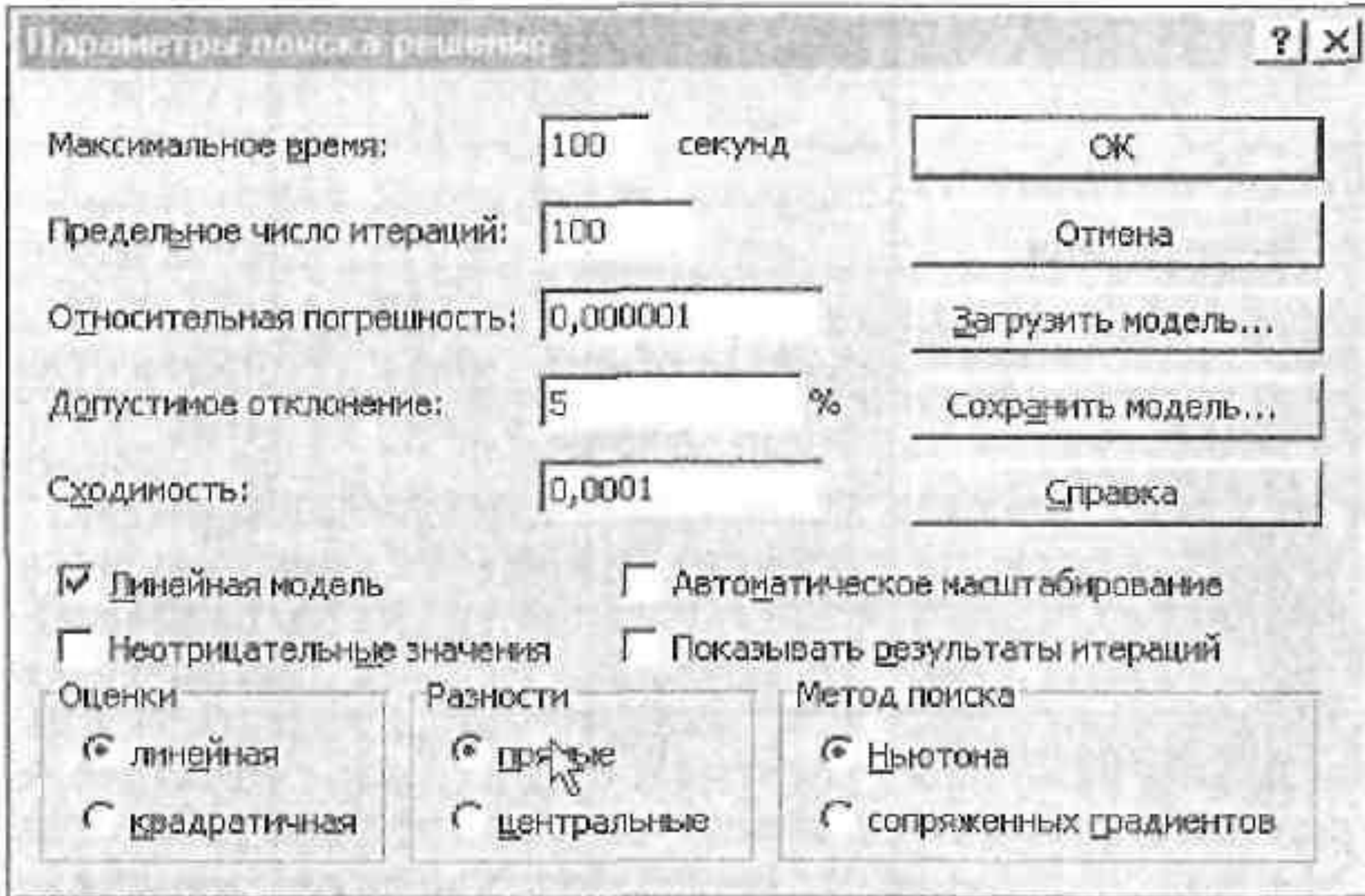
Знаки неравенств в столбце C имеют чисто оформительское значение.

Целевая функция (б) занесена в ячейку B15.

Теперь следует вызвать программу оптимизации «Поиск решения»



Параметры поиска решения



Результаты решения задачи

	A	B	C	D
1	**Оптимальное планирование**			
2				
3	**Плановые показатели**			
4		*X* (необрезная	*Y* (обрезная)	
5		600	100	
6				
7	**Ограничения**			
8				
9		*Левая часть*	*Знак*	*Правая часть*
10	*Время производства:*	1000	<=	1000
11	*Общее количество:*	700	<=	700
12	*Положительность X:*	600	>=	0
13	*Положительность Y:*	100	>=	0
14				
15	**Целевая функция**	800		
16				

Представим себе, что в цеху сменился финансовый директор, и кроме всех прочих ограничений, перед цехом ставится обязательное условие: число куб.м обрезной доски должно быть не меньше числа куб.м необрезной доски. При такой постановке задачи система неравенств (а) примет вид:

$$\begin{cases} x + 4y \leqslant 1000; \\ x + y \leqslant 700; \\ x \geqslant 0; \\ y \geqslant x. \end{cases}$$

Соответствующее изменение легко внести в электронную таблицу. Для этого достаточно в ячейке D13 вместо 0 записать B5. Результаты поиска решения будут следующими: $x = 200$, $y = 200$, $f(x,y) = 600$. Таким планом вряд ли будет доволен генеральный директор цеха, поскольку потери прибыли окажутся очень существенными.

Задание 1

Составить оптимальный план проведения экскурсионных поездок студентов на практику на заводы в следующей ситуации.

Финансовое управление университета может профинансировать поездки студентов с пяти курсов (курсы будем обозначать номерами) на три завода (назовем эти заводы X, Y и Z).

Количество студентов, которых следует отправить в поездки, таково:

Номер курса	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Кол-во студентов	300	250	400	350	200

Дирекция заводов может принять определенной число студентов:

Завод	X	Y	Z
Кол-во студентов	400	500	600

Стоимость (в рублях) поездки одного студента по каждому курсу на каждый завод:

Завод	Стоимость поездок				
	1	2	3	4	5
X	500	700	750	1000	1100
Y	700	600	400	500	800
Z	1200	1000	800	600	500

Необходимо составить такой план экскурсий, который:

- позволяет каждому из числа намеченных к поездке студентов побывать на экскурсии;
- удовлетворяет условию, определяющему общее число экскурсантов, едущих в каждый из городов;
- обеспечивает максимально низкие суммарные расходы финансирующей стороны.

План перевозок, который нам надлежит составить, будет отражен в следующей таблице:

Завод	Количество студентов по курсам				
	1	2	3	4	5
X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
Z	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5

Величины, стоящие в этой таблице, и являются объектами поиска.

Так, x_3 есть число студентов с 3 курса, которые, по разрабатываемому плану поедут на завод X.

Первое условие (ограничение задачи): все студенты с каждого курса поедут на экскурсию:

$$x_1 + y_1 + z_1 = 300,$$
$$x_2 + y_2 + z_2 = 250,$$
$$x_3 + y_3 + z_3 = 400,$$
$$x_4 + y_4 + z_4 = 350,$$
$$x_5 + y_5 + z_5 = 200.$$

Второе условие: на каждый завод поедет столько студентов, сколько этот завод в состоянии принять:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 400,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 500,$$
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 600.$$

Кроме того, искомые величины неотрицательны:

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, \ x_5 \geqslant 0, \ y_1 \geqslant 0, \ldots, \ y_5 \geqslant 0, \ z_1 \geqslant 0, \ldots, \ z_5 \geqslant 0.$$

Теперь запишем общую стоимость расходов на экскурсии. Поскольку привезти, например, на экскурсию x_1 студентов стоит x_1 * 500 рублей (см. таблицу стоимости поездки), то общие расходы составят

$$\begin{aligned} S = {} & x_1 \cdot 500 + x_2 \cdot 700 + x_3 \cdot 750 + x_4 \cdot 1000 + \\ & + x_5 \cdot 1100 + y_1 \cdot 700 + y_2 \cdot 600 + y_3 \cdot 400 + \\ & + y_4 \cdot 500 + y_5 \cdot 800 + z_1 \cdot 1200 + z_2 \cdot 1000 + \\ & + z_3 \cdot 800 + z_4 \cdot 600 + z_5 \cdot 500. \end{aligned}$$

Итак: требуется найти наименьшее значение функции (4) при условии, что входящие в нее переменные удовлетворяют системам уравнений (1) и (2) и неравенств (3).

Результат решения этой задачи:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
300	100	0	0	0	0	100	400	0	0	0	50	0	350	200

Итак, на завод *X* поедут на экскурсию 300 студентов с 1 курса и 100 студентов со 2 курса, на завод *Y* – 100 студентов со 2 курса и 400 с 3 курса, на завод *Z* – 50 студентов со 2 курса, 350 с 4 курса и 200 – с 5 курса.

Или скажем то же самое по другому: все студенты с 1 курса уедут на завод *X*, студенты со 2 курса поделятся между заводами *X*, *Y* и *Z* (соответственно 100, 100 и 50), все студенты с 3 курса уедут на завод *Y*, а все студенты с 4 и 5 курсов поедут на завод *Z*.

Такое неочевидное разделение обеспечивает в данном случае наибольшую экономию средств.

Задание 2

Транспортная задача

Фирма должна отправить некоторое количество приборов с трёх складов в пять университетов. На складах имеется соответственно 15, 25 и 20 приборов, а для пяти университетов требуется соответственно 20, 12, 5, 8 и 15 приборов.
Стоимости перевозки одного прибора со склада в университет:

Склады	Университеты				
	B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**
A1	1	0	3	4	2
A2	5	1	2	3	3
A3	4	8	1	4	3

Как следует спланировать перевозку, чтобы её стоимость была минимальной?